

Die Bedeutung der potenzierten logistischen Funktion für Prognosen = Signification de la fonction logistique affectée d'un exposant dans l'élaboration de pronostics

Autor(en): **Zobrist, Hansruedi**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri**

Band (Jahr): **52 (1974)**

Heft 8

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-874771>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Bedeutung der potenzierten logistischen Funktion für Prognosen

Signification de la fonction logistique affectée d'un exposant dans l'élaboration de pronostics

Hansruedi ZOBRIST, Bern

164.03:65.012.23
654.15.001.1:65.012.23:681.3:16

Zusammenfassung. *Prognosekurven, die einer oberen Schranke (Sättigungswert) zustreben, haben in den letzten Jahren auf allen Gebieten stark an Bedeutung gewonnen. Die potenzierte logistische Funktion eignet sich vorzüglich für solche Prognosen, weil sich ihr Kurvenbild der bisherigen und voraussichtlichen Entwicklung gut annähern lässt, wobei nach einer geeigneten Transformation die Theorie der einfachen linearen Regression angewendet werden kann. Ein entsprechendes Computer-Programm steht im elektronischen Rechenzentrum (ERZ) PTT allen Planungsstellen zur Verfügung.*

Résumé. *Au cours des dernières années, les courbes de pronostic tendant vers une limite supérieure (valeur de saturation) ont beaucoup gagné en importance dans tous les domaines. La fonction logistique affectée d'un exposant se prête particulièrement bien à de tels pronostics: sa configuration peut être fidèlement rapprochée de la courbe de l'ancien développement et du développement prévisible, et il est possible d'appliquer, après transformation adéquate, la théorie de la régression linéaire simple. Un programme d'ordinateur fondé sur cette fonction est à la disposition des services de planification au Centre de calcul électronique (CCE) des PTT.*

Significato della funzione logistica a curva esponenziale per il calcolo delle prognosi

Riassunto. *Nel corso degli ultimi anni, le curve di prognosi che tendono verso un limite superiore (valore di saturazione) acquistano sempre maggiore importanza in tutti i rami. La funzione logistica a curva esponenziale si presta particolarmente bene al calcolo di queste prognosi, perché le curve del vecchio sviluppo e di quello prevedibile sono facilmente approssimabili e, dopo essere state adattate in modo adeguato, possono essere applicate alla regressione lineare semplice. Al centro di calcolo elettronico (CCE) delle PTT un corrispondente programma di calcolatore è a disposizione di tutti i servizi di pianificazione.*

1. Einleitung

Mehr und mehr dringt heute die Erkenntnis durch, dass die Entwicklung verschiedenartiger Grössen nicht mehr lange *progressiv* ansteigen darf, wenn das Eintreten einer Kettenreaktion von katastrophalen Zuständen noch rechtzeitig vermieden werden soll.

Ökonometrische Modelle, die auf *progressiv* ansteigenden Entwicklungskurven basieren (Fig. 1), prophezeien den unweigerlichen allgemeinen Zusammenbruch bereits innerhalb der nächsten Jahrzehnte. Es ist deshalb anzustreben, die einzelnen Entwicklungsgrössen wenigstens nicht über eine bestimmte obere Schranke ansteigen zu lassen: Sie sollen sich nach Durchlaufen eines *Wendepunktes W* asymptotisch einer *Sättigungsgrenze k* nähern, damit allmählich ein einigermaßen ausgewogener Zustand des Gleichgewichts erreicht wird. Der Wendepunkt bewirkt, dass eine S-förmige Kurve entsteht, wie sie *Figur 2* zeigt. Solche Kurven werden heute für mittel- und langfristige Prognosen immer häufiger verwendet.

In *Figur 2* befindet sich der Wendepunkt der Kurve etwa auf halber Höhe des Sättigungswertes. Wie wir wissen, wurde dieser Wert auf einigen Gebieten bereits überschritten (zum Beispiel Verschmutzung bestimmter Gewässer). Andere Entwicklungen sind heute bereits nahe unterhalb der erwünschten oberen Schranke (Sättigungswert) angelangt, ohne dass sie bisher einen Wendepunkt durchlaufen hätten. In solchen Fällen sollte die die Entwicklungsgrösse approximierende Funktionskurve den Wendepunkt in der oberen Hälfte besitzen (*Figur 3a*). Dasselbe trifft für Entwicklungen zu, deren gegenwärtiger schneller Anstieg erwünscht oder unerwünscht sein kann, die jedoch beide ebenfalls eine festzulegende Schranke *k* nicht überschreiten sollten (*Fig. 3b*).

In jenen Fällen, wo wir erst am Anfang einer Entwicklung stehen und kein Rückstand aufzuholen ist, sollte, im Interesse einer möglichst harmonischen Steigerung, der *Wende-*

1. Introduction

Un fait établi tend à s'imposer aujourd'hui dans une large mesure: le développement de grandeurs de nature différente ne doit plus s'accroître longtemps de *manière progressive*, si l'on veut éviter le déclenchement d'une réaction en chaîne d'états catastrophiques.

Des modèles économétriques basés sur des courbes de développement à croissance progressive (*fig. 1*) prédisent un effondrement généralisé inévitable, lors des prochaines décennies déjà. De ce fait, il importe pour le moins d'éviter que les diverses grandeurs en développement ne dépassent une certaine limite supérieure; après avoir franchi un point d'inflexion *W*, elles doivent s'approcher d'une *limite de saturation k*, afin que puisse être réalisé progressivement un certain état d'équilibre pondéré. Ce point d'inflexion se traduit par une courbe en forme de S représentée à la *figure 2*. Aujourd'hui, l'emploi de telles courbes pour les pronostics à moyen et à long terme est de plus en plus répandu.

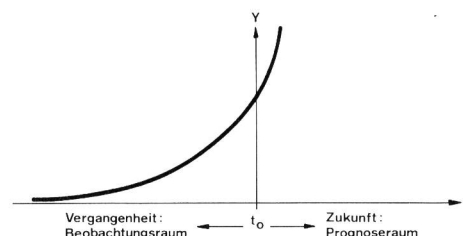


Fig. 1
Progressiv zunehmende Entwicklungskurve (zum Beispiel Exponentialfunktion) – Courbe de développement à croissance progressive (par exemple fonction exponentielle)

Y Entwicklungsgrösse, zum Beispiel Verbrauchsgüter, Nahrungsmittel, Bevölkerungszahl, Energiebedarf, Luftverschmutzung – Grandeur de développement, par exemple biens de consommation, denrées alimentaires, nombre d'habitants, besoins en énergie, pollution de l'air

t Zeit - temps

t_0 Gegenwärtiger Zeitpunkt – Époque actuelle

Vergangenheit: Beobachtungsraum – Passé: Période d'observation

Zukunft: Prognosezeitraum – Futur: Période de pronostic

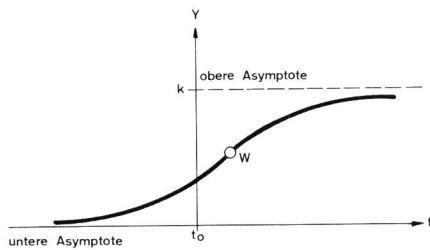


Fig. 2
S-förmige Entwicklungskurve (zum Beispiel logistische Funktion) – Courbe de développement en forme de S (par exemple fonction logistique)

t Zeit - temps
Obere Asymptote – Asymptote supérieure
Untere Asymptote – Asymptote inférieure

punkt möglichst bald herbeigeführt werden, damit es lange geht, bis die Schranke k erreicht wird. Ist eine solche Entwicklung realisierbar, so würde sie durch eine Kurve mit einem verhältnismässig tief liegenden Wendepunkt gut charakterisiert (Fig. 4).

Aus all diesen Überlegungen geht hervor, dass die S-förmigen Kurven nicht nur reinen Prognosezwecken dienen, vielmehr können sie als *Leitvorstellungen* der Planung auch die massgebenden Kriterien für Ziele liefern, nach denen sich die verschiedenen Massnahmen auszurichten haben.

2. Die potenzierte logistische Kurve

2.1 Definition

Die Funktionsgleichung der in den Figuren 2...4 gezeigten S-förmigen Kurven lautet in ihrer allgemeinsten Form:

$$y = \frac{k}{(1 + ce^{-bx})^{1/m}} \quad b, c, k, m > 0 \quad (1)$$

- y potenzierte logistische Funktion → Entwicklungsgrösse
- x unabhängige Variable → Bestimmungsfaktor: zum Beispiel Zeit
- k Entfernung der oberen Asymptote von der Abszisse → Sättigungswert, obere Schranke
- m Wendepunktparameter
- e Basis der natürlichen Logarithmen = 2,718...
- b, c Funktionsparameter

2.2 Diskussion der Kurve

2.2.1 Verhalten im Unendlichen (Asymptotik)

Strebt x gegen $-\infty$, so wächst e^{-bx} gegen e^∞ . Dadurch wird der Nenner von y immer grösser. Da der Zähler kon-

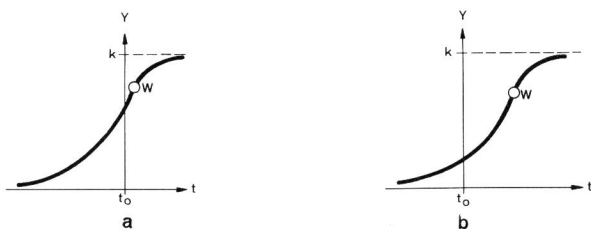


Fig. 3
S-förmige Entwicklungskurve mit Wendepunkt in oberer Hälfte – Courbes de développement en forme de S avec point d'inflexion dans la moitié supérieure

- a Y Beispielsweise Ölbedarf – Besoins en huile de chauffage
- b Y Beispielsweise Telefonanschlüsse in einem Gebiet mit grosser Warteliste: schneller Anstieg erwünscht – Raccordements téléphoniques dans une région à grande liste d'attente: croissance rapide souhaitable
- t₀ Gegenwärtiger Zeitpunkt – Epoque actuelle

Le point d'inflexion de la courbe illustrée à la figure 2 se trouve environ à mi-hauteur de la valeur de saturation. Comme nous le savons, cette valeur a déjà été dépassée dans certains domaines (par exemple dans celui de la pollution des eaux). A l'heure actuelle, d'autres développements ont déjà presque rejoint la limite supérieure désirable (valeur de saturation), sans qu'ils aient passé par un point d'inflexion. En pareils cas, la courbe d'approximation de ces grandeurs de développement devrait présenter un point d'inflexion dans la partie supérieure (fig. 3a). Il en est de même de développements dont la croissance rapide est actuellement souhaitable ou indésirable, mais ne devant pas, pour chacun des phénomènes, dépasser une limite k à déterminer (fig. 3b).

S'il s'agit d'un cas où le développement n'en est qu'à ses débuts et, s'il n'y a pas de retard à rattrapper, il y a lieu de choisir l'emplacement du point d'inflexion aussi bas que possible, en vue d'assurer une croissance harmonieuse et de reculer autant que possible l'époque à laquelle sera atteinte la limite k. Si un tel développement était réalisable, il pourrait fort bien être caractérisé par une courbe possédant un point d'inflexion situé relativement bas (fig. 4).

Toutes ces considérations révèlent que les courbes en forme de S ne servent pas uniquement à des fins de pronos-

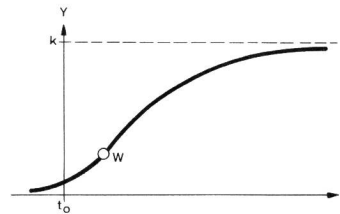


Fig. 4
S-förmige Entwicklungskurve mit Wendepunkt in der unteren Hälfte – Courbe de développement en forme de S avec point d'inflexion dans la moitié inférieure

- Y Beispielsweise Erzeugung von Kernenergie – Par exemple production d'énergie nucléaire
- t Zeit - temps

tics, mais qu'elles peuvent aussi, en tant que *figures-guide* de la planification, fournir les critères déterminants pour atteindre les buts visés, critères auxquels les différentes mesures devront se plier.

2. Courbe logistique affectée d'un exposant

2.1 Définition

L'équation de la courbe en S représentée dans les figures 2...4 s'écrit, sous sa forme la plus générale:

$$y = \frac{k}{(1 + ce^{-bx})^{1/m}} \quad b, c, k, m > 0 \quad (1)$$

- y fonction logistique affectée d'un exposant → grandeur de développement
- x variable indépendante → facteur de détermination: par exemple le temps
- k distance séparant l'asymptote supérieure de l'abscisse → valeur de saturation, limite supérieure
- m paramètre du point d'inflexion
- e base des logarithmes naturels = 2,718...
- b, c paramètres de la fonction

stant ist, strebt y dem Wert Null zu. Dasselbe in Symbolen (\longrightarrow bedeutet «strebt nach», \Rightarrow bedeutet «daraus folgt»):

$$x \longrightarrow -\infty \Rightarrow e^{-bx} \longrightarrow e^{\infty} = \infty \Rightarrow (1 + ce^{-bx})^{1/m} \longrightarrow \infty \Rightarrow y \longrightarrow k/\infty \Rightarrow y \longrightarrow 0$$

Die Abszisse bildet somit nach links eine Asymptote von y . Dies ist aus den Figuren 2...4 gut erkennbar.

Strebt x gegen $+\infty$, so gilt:

$$x \longrightarrow \infty \Rightarrow e^{-bx} \longrightarrow e^{-\infty} \text{ das heisst } e^{-bx} \longrightarrow 0 \Rightarrow y \longrightarrow \frac{k}{1^{1/m}} = k \text{ d.h.: } y \longrightarrow k$$

Das bedeutet, dass die sich im Abstand k von der Abszisse befindliche Parallele gegen rechts eine Asymptote von y bildet (siehe Figuren 2...4).

2.2.2 Lage des Wendepunkts

Der Wendepunkt W liegt an jener Stelle, wo die zweite Ableitung y'' von y null wird. Man findet dabei für die Abszisse x_w von W den Wert

$$x_w = \frac{\ln(c/m)}{b} \quad (2)$$

und für die Ordinate y_w erhält man

$$y_w = \frac{k}{(m+1)^{1/m}} \quad (3)$$

Die Gleichung (3) sagt aus, dass nach Vorgabe der Sättigungsgrenze k einzig der Potenzparameter m für die Ordinate y_w (vertikale Lage) des Wendepunkts massgebend ist. Da die Ordinate y_w , wie die Figuren 2...4 zeigen, für die praktische Anwendung sehr wichtig ist, wollen wir den Einfluss des *Wendepunktsparameters* m kurz untersuchen (vgl. S. 297).

1. Fall: $m = 1$

Für $m = 1$ wird $y_w = \frac{k}{(1+1)^{1/1}} = k/2$, das heisst, der Wendepunkt liegt in der Mitte zwischen den beiden Asymptoten. Die Gleichung für diese in der Praxis oft gebrauchte sogenannte *logistische Funktion* lautet

$$y = \frac{k}{1 + ce^{-bx}} \quad (5)$$

2. Fall: $m < 1, m \longrightarrow 0$

$$m \longrightarrow 0 \Rightarrow y_w = \frac{k}{(m+1)^{1/m}} \longrightarrow k/e$$

[Denn nach der Setzung $m = 1/n$ wird $(m+1)^{1/m} = (1+1/n)^n$ und es gilt bekanntlich $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$]

Die tiefstmögliche Lage des Wendepunkts von y liegt also auf der Höhe $k/2,718$ oder $0,37 k$.

3. Fall: $m > 1, m \longrightarrow \infty$

$$m \longrightarrow \infty \Rightarrow y_w \longrightarrow k$$

[Denn es ist $\lim_{m \rightarrow \infty} (m+1)^{1/m} = 1$]

Mit zunehmendem m nähert sich demnach der Wendepunkt immer mehr der Sättigungsgrenze k (siehe Fig. 3a und 3b).

2.2 Discussion de la courbe

2.2.1 Comportement asymptotique à l'infini

Si x tend vers $-\infty$, e^{-bx} croît en direction de e^{∞} . De ce fait, le dénominateur de y devient toujours plus grand. Le numérateur étant constant, y tend vers zéro. En utilisant les symboles (\longrightarrow signifie «tend vers» et \Rightarrow «il en résulte que»), on a:

$$x \longrightarrow -\infty \Rightarrow e^{-bx} \longrightarrow e^{\infty} = \infty \Rightarrow (1 + ce^{-bx})^{1/m} \longrightarrow \infty \Rightarrow y \longrightarrow k/\infty \Rightarrow y \longrightarrow 0$$

Cela étant, l'abscisse forme une asymptote de la courbe y à gauche, ce que l'on voit très bien sur les figures 2...4.

Si x tend vers $+\infty$, on a:

$$x \longrightarrow \infty \Rightarrow e^{-bx} \longrightarrow e^{-\infty} \text{ c'est-à-dire } e^{-bx} \longrightarrow 0 \Rightarrow y \longrightarrow \frac{k}{1^{1/m}} = k \text{ c'est-à-dire: } y \longrightarrow k$$

Ces relations montrent que la parallèle située à la distance k de l'abscisse forme une asymptote de la courbe y à droite (voir fig. 2...4).

2.2.2 Emplacement du point d'inflexion

Le point d'inflexion W se situe à l'endroit où la deuxième dérivée y'' devient égale à zéro. Il apparaît que l'abscisse x_w de W prend la valeur

$$x_w = \frac{\ln(c/m)}{b} \quad (2)$$

la valeur de l'ordonnée y_w étant

$$y_w = \frac{k}{(m+1)^{1/m}} \quad (3)$$

L'équation (3) montre que, compte tenu d'une valeur de saturation k donnée, seul le paramètre m de l'exposant est déterminant pour la position en ordonnée y_w (emplacement vertical) du point d'inflexion. Les figures 2...4 démontrent à quel point l'ordonnée y_w est importante en pratique, raison pour laquelle nous allons analyser succinctement l'influence du *paramètre m du point d'inflexion* (voir p. 297).

1^{er} cas: $m = 1$

Si $m = 1$, on a $y_w = \frac{k}{(1+1)^{1/1}} = k/2$, ce qui signifie que le

point d'inflexion se trouve à mi-chemin entre les deux asymptotes. Cette fonction, fort utilisée en pratique, se nomme *fonction logistique*; elle s'exprime par l'équation

$$y = \frac{k}{1 + ce^{-bx}} \quad (5)$$

2^e cas: $m < 1, m \longrightarrow 0$

$$m \longrightarrow 0 \Rightarrow y_w = \frac{k}{(m+1)^{1/m}} \longrightarrow k/e$$

[Après avoir posé $m = 1/n$, on voit que $(m+1)^{1/m} = (1+1/n)^n$, sachant notamment que $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$]

La position la plus basse du point d'inflexion de y se situe donc à la hauteur $k/2,718$ ou $0,37 k$.

2.2.3 Zusammenhang mit dem Tangens hyperbolicus

Unter der Benutzung der Definition des Tangens hyperbolicus

$$\operatorname{tgh}(z) = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

können wir die Gleichung (1) in die Form

$$y = k \left[\frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tgh} \frac{bx - \ln(c)}{2} \right) \right]^{1/m} \quad (6)$$

bringen. Falls also $m = 1$ ist, handelt es sich bei (6) um eine tgh-Funktion mit folgenden Eigenschaften: Wendepunkt in der Mitte zwischen oberer und unterer Asymptote, Zentralsymmetrie um den Wendepunkt. Die (nicht potenzierte) logistische Funktion (5) ist also eine tgh-Funktion. Erst ihre Potenzierung ($m \neq 1$) bewirkt eine vertikale Verschiebung des Wendepunkts, wie es in Abschnitt 2.2.2 analysiert wurde. Dabei wird die Kurve so verzerrt, dass die Zentralsymmetrie verlorengeht.

2.2.4 Bedeutung der Parameter b und c

Aus Gleichung (6) geht hervor, dass b als Koeffizient von x für die *Steilheit* der potenzierten logistischen Kurve verantwortlich ist. Dies wird bestätigt, wenn wir die Steigung y' im Wendepunkt, also an der Stelle x_w berechnen:

$$y'(x_w) = \frac{bk}{(m+1)^{1+1/m}}$$

Wir sehen, dass diese Steigung nach Vorgabe von k und m nur von b abhängig ist.

Die Gleichung (6) sagt ferner aus, dass eine Änderung des Parameters c nur eine *seitliche Verschiebung* der Kurve bewirkt. [Denn es gilt bekanntlich ganz allgemein, dass die Funktion $f(x-a)$ die um a seitlich verschobene Kurve $f(x)$ beschreibt.]

3. Approximation von Beobachtungswerten

Die in Abschnitt 2 durchgeführte Analyse der Eigenschaften der potenzierten logistischen Kurve hat gezeigt, dass sich diese vorzüglich eignet, um die Entwicklung von Größen, die einem Sättigungswert zustreben, zu beschreiben. Wie bei allen regressiven Prognoseverfahren handelt es sich nun darum, die Funktionsparameter so zu bestimmen, dass die Funktionskurve die in der Vergangenheit beobachteten Werte (Beobachtungswerte) möglichst gut approximiert. Wir stellen also die von der Regressionsanalyse her bekannte Forderung F auf, dass die Summe S der quadrierten vertikalen Abstände zwischen Beobachtungspunkten q_t und Approximationskurve y_t minimal sein soll:

$$F: \quad S = \sum_t (q_t - y_t)^2 \longrightarrow \text{Minimum} \quad (\text{siehe Fig. 5})$$

Dabei ist

$$y_t = \frac{k}{(1 + ce^{-bt})^{1/m}}, \quad (7)$$

wenn wir in (1) $x = t$ setzen. Dies bedeutet lediglich, dass wir als unabhängige Variable x die Zeit t betrachten wollen.

3^o cas: $m > 1, m \rightarrow \infty$

$$m \rightarrow \infty \implies y_w \rightarrow k$$

$$[\text{car } \lim_{m \rightarrow \infty} (m+1)^{1/m} = 1]$$

Plus m augmente, plus le point d'inflexion se rapproche de la limite de saturation k (voir fig. 3a et 3b).

2.2.3 Rapport avec la tangente hyperbolique

En s'appuyant sur la définition de la fonction de la tangente hyperbolique

$$\operatorname{tgh}(z) = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

on peut amener l'équation (1) à la forme

$$y = k \left[\frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tgh} \frac{bx - \ln(c)}{2} \right) \right]^{1/m} \quad (6)$$

Si $m = 1$, (6) est une fonction tgh dont les propriétés sont les suivantes: point d'inflexion situé à mi-chemin entre l'asymptote supérieure et inférieure, symétrie de la figure par rapport à ce point central. La fonction logistische (non affectée d'un exposant) (5) est donc aussi une fonction tgh. Il faut l'affecter d'un exposant ($m \neq 1$) pour que le point d'inflexion se déplace dans l'axe vertical, ainsi que nous l'avons expliqué à l'alinéa 2.2.2. En pareil cas, la tangente hyperbolique est déformée au point de perdre sa symétrie centrale.

2.2.4 Signification des paramètres b et c

L'équation (6) démontre que le coefficient b de x est responsable de la pente de la courbe logistische affectée d'un exposant. Il est possible de vérifier ce fait en calculant la pente y' au point d'inflexion, c'est-à-dire au point x_w :

$$y'(x_w) = \frac{bk}{(m+1)^{1+1/m}}$$

k et m étant donnés, on voit que cette pente dépend uniquement de b.

L'équation (6) prouve, de plus, qu'une modification du paramètre c n'entraîne qu'un *décalage latéral* de la courbe. (On sait que, d'une manière générale, la fonction $f(x-a)$ décrit une courbe $f(x)$ décalée latéralement de la valeur a).

3. Approximation des valeurs observées

L'analyse du 2^e alinéa montre que la fonction logistische affectée d'un exposant permet de décrire d'une manière idéale le développement de grandeurs tendant vers une valeur de saturation. Comme dans toutes les méthodes régressives de pronostic, les paramètres de la fonction doivent être choisis de manière à obtenir une courbe approchant autant que possible des valeurs enregistrées dans le passé (valeurs observées). Selon les principes connus de l'analyse régressive, nous pouvons poser la condition F, selon laquelle la somme S du carré des distances verticales séparant les points d'observation q_t et la courbe d'approximation y_t doit tendre vers un minimum:

$$F: \quad S = \sum_t (q_t - y_t)^2 \longrightarrow \text{minimum} \quad (\text{voir fig. 5})$$

Aus Abschnitt 1 geht hervor, dass die Parameter m und insbesondere k von den Planungsstellen festgesetzt werden müssen. Sie werden deshalb hier als vorgegeben betrachtet. Zur Bestimmung der noch verbleibenden Parameter b und c müsste S partiell nach diesen Parametern differenziert und anschliessend gleich null gesetzt werden, weil S minimal sein soll. Dasselbe erreichen wir leichter, wenn wir die Gleichung (7) durch Transformation linearisieren, worauf wir die von der Regressionsrechnung her bekannten Werte für die Transformationsparameter übernehmen können. Dies geschieht folgendermassen:

Eine Umformung von (7) führt nach einigen Schritten zur Gleichung

$$\left(\frac{k}{y_t}\right)^m - 1 = ce^{-bt}$$

Die Logarithmierung dieser Gleichung ergibt:

$$\ln \left[\left(\frac{k}{y_t}\right)^m - 1 \right] = -bt + \ln(c) .$$

Setzen wir nun

$$\left. \begin{aligned} Y &= \ln \left[\left(\frac{k}{y_t}\right)^m - 1 \right] \\ B &= -b \\ C &= \ln(c) \end{aligned} \right\} \text{(8), so erhalten wir:}$$

$$Y = Bt + C \quad \text{(9)}$$

Durch die Linearisierung (8) ist somit die Gleichung (7) der potenzierten logistischen Funktion in die Gleichung (9) einer Geraden übergegangen. Nun können wir die von der Regressionsanalyse her bekannten Lösungen für B und C übernehmen und damit den Regressionswert der Geraden Y an der Stelle t berechnen (9). Anschliessend werden die Transformationen (8) «rückgängig» gemacht, indem wir diese drei Gleichungen nach y_t , b und c auflösen:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{k}{e^{(Y+1)/m}} \\ b &= -B \\ c &= e^C \end{aligned}$$

Die derart berechneten Werte b und c erfüllen die Forderung F und definieren somit die bestapproximierende potenzierte logistische Kurve.

4. Festsetzung der Parameter k und m

4.1 Sättigungswert k

In den einleitenden Bemerkungen von Abschnitt 1 haben wir abschliessend festgestellt, dass die S-förmigen Kurven nicht nur mittelfristigen Prognosezwecken dienen, sondern auch langfristig gesteckte Entwicklungsziele berücksichtigen sollen. Dies bedingt geradezu die Bestimmung der Sättigungsgrenze k durch die Planungsorgane, bevor eine Approximationskurve berechnet wird. Dabei ist es durchaus möglich, dass zur Bestimmung von k ebenfalls gewisse, jedoch eher überschlagsmässige Berechnungen dienen können. Diese werden aber je nach Anwendungsgebiet voneinander abweichen.

En posant $x = t$ dans (1), nous trouvons

$$y_t = \frac{k}{(1 + ce^{-bt})^{1/m}} , \quad \text{(7)}$$

Cela signifie simplement que nous considérons le temps t comme variable indépendante x .

Nous avons vu, au premier alinéa, que les services de planification devaient déterminer le paramètre m et surtout le paramètre k . Dès lors, nous les considérerons comme donnés. Pour fixer la valeur des paramètres restants b et c , il faudrait établir la dérivée partielle de S selon ces paramètres, puis, S devant être minimale, l'égaliser à zéro. Nous y parvenons plus facilement en linéarisant l'équation (7) par transformation, étant entendu que les paramètres de transformation peuvent être remplacés par les valeurs connues fournies par le calcul de régression. Cette détermination se fait ainsi qu'il suit:

Après quelques opérations, (7) fournit l'équation

$$\left(\frac{k}{y_t}\right)^m - 1 = ce^{-bt} .$$

Exprimée sous forme logarithmique, l'équation devient:

$$\ln \left[\left(\frac{k}{y_t}\right)^m - 1 \right] = -bt + \ln(c) .$$

Si nous posons

$$\left. \begin{aligned} Y &= \ln \left[\left(\frac{k}{y_t}\right)^m - 1 \right] \\ B &= -b \\ C &= \ln(c) \end{aligned} \right\} \text{(8), nous obtenons}$$

$$Y = Bt + C \quad \text{(9)}$$

Par l'opération de linéarisation (8), nous avons converti l'équation de la fonction logistique affectée d'un exposant (7) en équation linéaire (9). Or, nous pouvons maintenant calculer la valeur de régression de la droite Y au point t (9), en reprenant pour B et C les solutions que nous fournit l'analyse régressive. Puis, en résolvant les 3 équations de (8) par rapport à y_t , b et c , nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{k}{e^{(Y+1)/m}} \\ b &= -B \\ c &= e^C \end{aligned}$$

Les valeurs de b et de c ainsi calculées satisfont à l'exigence F et définissent ainsi la meilleure approximation possible de la courbe logistique affectée d'un exposant.

4. Détermination des paramètres k et m

4.1 Valeur de saturation k

Dans les remarques liminaires du premier alinéa, nous avons relevé que les courbes en forme de S ne servaient pas seulement à des fins de pronostics à moyenne échéance, mais permettaient aussi l'analyse de développements à long terme. Par conséquent, une courbe d'approximation ne saurait être calculée avant que les organes de planification n'aient déterminé la limite de saturation k . A cet effet, il est aussi possible qu'il faille recourir à un calcul

4.2 Wendepunktsparemeter m

4.2.1 Schätzung

Auch hier kann und soll sich der Planer aufgrund der bisher beobachteten Entwicklung und der gesteckten Ziele überlegen, wo der Wendepunkt der Entwicklung etwa liegen sollte, falls er nicht offensichtlich bereits eingetroffen ist. Die grundsätzlichen Betrachtungen zur Bestimmung des Wendepunkts sind in Abschnitt 1 enthalten. Wird er in der untern Hälfte der Kurve erwartet, so ist m kleiner als 1 zu wählen, andernfalls grösser als 1. In Abschnitt 2.2.2 sind die drei Fälle $m = 1$, $m < 1$, $m > 1$ beschrieben (vgl. S. 297).

4.2.2 Optimierung

Liegen mindestens vier Beobachtungswerte vor, so kann ein optimales m systematisch gesucht werden, indem für verschiedene m die entsprechenden Regressionskurven gemäss Abschnitt 3 berechnet werden. Jene mit dem besten Bestimmtheitsmass ist dann die Kurve mit dem optimalen Wendepunktsparemeter m .

Das Bestimmtheitsmass B ($0 \leq B \leq 1$) gibt an, welchen Anteil die Veränderlichkeit der Regressionswerte

$$\sum_t (y_t - \bar{y})^2$$

von der gesamten Veränderlichkeit der Beobachtungswerte

$$\sum_t (q_t - \bar{y})^2$$

um den Mittelwert

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_t q_t$$

aller Beobachtungswerte bildet ($n =$ Anzahl Beobachtungswerte). Würden alle Beobachtungswerte gerade auf der S-förmigen Regressionskurve y liegen (siehe Fig. 5), so betrüge dieser Anteil 100% ($B = 1$), und die Approximation wäre ideal. Somit ist jenes m optimal, für welches das Bestimmtheitsmass am nächsten bei 1 liegt.

Natürlich sind diese Versuchsrechnungen zur Ermittlung des optimalen Wendepunktsparemters m und damit der optimalen Regressionskurve derart aufwendig, dass hierfür nur ein Computer-Programm in Frage kommt.

Die Berechnung des Bestimmtheitsmasses hat den zusätzlichen Vorteil, dass sie uns anzeigt, ob eine Approximation der Beobachtungswerte durch eine S-förmige

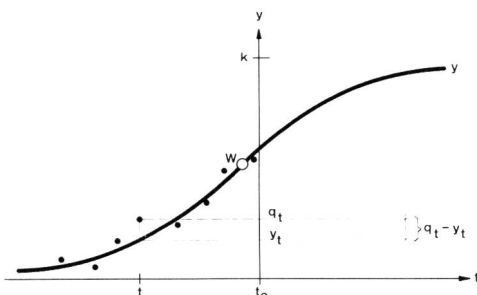


Fig. 5
Logistische Funktionskurve – Courbe de la fonction logistique

y Approximationskurve – Courbe d'approximation
 y_t Regressionswert im Zeitpunkt t – Valeur de régression à l'instant t
 q_t Beobachtungswert im Zeitpunkt t – Valeur observée à l'instant t
 t Zeit - temps

d'évaluation pour déterminer la valeur de k . Toutefois, selon le domaine d'application, ces calculs peuvent différer.

4.2 Paramètre m du point d'inflexion

4.2.1 Evaluation

En l'occurrence, le planificateur peut et doit aussi se demander, en fonction du développement observé jusqu'ici et des buts fixés, où le point d'inflexion doit être placé, si celui-ci n'est pas déjà un fait acquis. Le premier alinéa décrit les considérations fondamentales touchant à la détermination du point d'inflexion. S'il est prévu que ce dernier se trouve dans la partie inférieure de la courbe, il faut choisir m plus petit que 1, dans le cas contraire, plus grand que 1. Dans l'alinéa 2.2.2, nous avons analysé les trois cas $m = 1$, $m < 1$ et $m > 1$ (voir p. 297).

4.2.2 Optimisation

Si l'on dispose d'au moins quatre valeurs observées, il est possible de rechercher systématiquement une valeur optimale de m , en calculant la courbe de régression correspondant à différentes valeurs du paramètre m , comme il est indiqué à l'alinéa 3. La courbe ayant le meilleur coefficient de détermination est celle dont le paramètre m du point d'inflexion est optimalement choisi.

Le coefficient de détermination B ($0 \leq B \leq 1$) indique pour quelle part la variabilité des valeurs de régression

$$\sum_t (y_t - \bar{y})^2$$

entre dans l'ensemble de la variabilité des valeurs observées

$$\sum_t (q_t - \bar{y})^2$$

au voisinage de la valeur moyenne

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_t q_t$$

de toutes les valeurs observées ($n =$ nombre de valeurs observées). Si toutes les valeurs observées étaient situées sur la courbe de régression en forme de S (voir fig. 5), la part précitée serait de 100% ($B = 1$) et l'approximation serait idéale. De ce fait, la valeur de m est optimale lorsque la valeur de certitude se rapproche le plus possible de 1.

Il est évident que ces calculs expérimentaux visant à déterminer le paramètre m optimal du point d'inflexion et, de ce fait, la courbe de régression optimale, sont si compliqués que seul un programme d'ordinateur peut entrer en considération à cet effet.

De plus, le calcul du coefficient de détermination offre l'avantage d'indiquer s'il est judicieux de procéder à une approximation des valeurs observées par une courbe en forme de S; il montre encore si le développement passé correspond bien à peu près au début d'une telle courbe.

A trois valeurs observées correspond une valeur précise de m pour laquelle la courbe de régression passe exactement par ces trois points. Cela s'explique du fait qu'il est nécessaire de disposer de trois points pour déterminer sans ambiguïté trois paramètres de courbe (b , c et m).

5. Programme d'ordinateur

Sur demande de la subdivision des réseaux locaux de la division de l'équipement des télécommunications, le groupe de la recherche opérationnelle de la direction générale des

Kurve sinnvoll ist, das heisst, ob die bisherige Entwicklung überhaupt dem Beginn einer S-förmigen Kurve einigermaßen entspricht.

Liegen nur drei Beobachtungswerte vor, so gibt es genau ein m derart, dass die Regressionskurve gerade durch diese drei Punkte führt. Dies ist verständlich, weil zur *eindeutigen* Bestimmung von drei Kurvenparametern (b , c und m) drei Punkte notwendig sind.

5. Computer-Programm

Auf Ersuchen der Unterabteilung Ortsnetze der Abteilung Fernmeldebau erstellte die Dienstgruppe für Operations Research der Generaldirektion PTT (ZB3) ein Computer-Programm, das nach Eingabe der Beobachtungswerte (t , q_t) sowie der Parameter k und m folgende Grössen berechnet: die Parameter b und c sowie die Regressionswerte y_t und das Bestimmtheitsmass der am besten approximierenden potenzierten logistischen Kurve. Will der Benutzer den Wendepunktparameter m nicht selber angeben, so ermittelt das Programm den optimalen Wert für m gemäss dem in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Vorgehen.

Zusätzlich zur Regressionskurve wird eine obere und untere Kurve berechnet. Die Abweichung dieser Kurven von der Regressionskurve entspricht der Standardabweichung s der Beobachtungswerte von der Regressionskurve:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_t (q_t - y_t)^2} \quad (\text{Streuung um die Regression})$$

Das Programm ist so gestaltet, dass es ohne Schwierigkeiten auch von andern Stellen als der Unterabteilung Ortsnetze der Abteilung Fernmeldebau benützt werden kann. *Es eignet sich also für alle Entwicklungen, die S-förmig verlaufen.*

6. Anwendungsbeispiel: Entwicklung der Telefonnetze

6.1 Bestimmung von Zentralenausbauten

Bei den Telefonnetzen hat es sich als zweckmässig erwiesen, die Entwicklung ihrer *Dichte* (Anzahl Hauptanschlüsse je Einwohner) zu betrachten. Nach Berechnung der approximierenden Dichtekurve aus den beobachteten Vergangenheitswerten (Computer-Programm) kann aus den Prognosen über die Bevölkerungszahlen die entsprechende Kurve z für die Entwicklung der Hauptanschlüsse ermittelt werden: Dichte mal Einwohnerzahl. Aus dieser Kurve kann nun leicht abgelesen werden, *wann* eine Telefonzentrale um *wie viele* Hauptanschlüsse vergrössert werden muss, wenn während einer bestimmten Zeitdauer kein neuerlicher Ausbau mehr notwendig sein soll. Das Vorgehen ist aus *Figur 6* und den dazugehörigen Erklärungen ersichtlich.

6.2 Auswirkung der Optimalisierung des Wendepunktparameters

In den Technischen Mitteilungen PTT, Nr. 12/1963, ist die «Neue Studie über die wahrscheinliche Entwicklung des Telefons in der Schweiz» von *Ch. Lancoud* und *R. Trachsel* erschienen. Anhand der dort in *Figur 4* gezeichneten Dichtekurve sowie der zugehörigen Tabelle II der Dichtewerte P lässt sich gut zeigen, wie günstig sich bei relativ vielen Beobachtungswerten die Ermittlung des optimalen Wendepunktparameters m_{opt} durch den Computer auf die Zuverlässigkeit der Prognose auswirken kann.

PTT (ZB3) a élaboré un programme d'ordinateur permettant de calculer, une fois introduites les valeurs observées (t , q_t) et le paramètre k , les grandeurs suivantes: les paramètres b et c ainsi que les valeurs de régression y_t et le coefficient de détermination de la courbe logistique affectée d'un exposant répondant à la meilleure approximation. Si l'utilisateur ne veut pas indiquer lui-même le paramètre m du point d'inflexion, le programme calcule la valeur optimale de m selon le procédé décrit à l'alinéa 4.2.2.

En plus de la courbe de régression, l'ordinateur calcule une courbe inférieure et une courbe supérieure. Ces courbes s'écartent de la courbe de régression d'une valeur de déviation type s qui correspond à l'écart-type entre les valeurs observées et la courbe de régression:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_t (q_t - y_t)^2}$$

(dispersion au voisinage de la courbe de régression)

La conception du programme est telle qu'il peut être utilisé facilement non seulement par la subdivision des réseaux locaux de la division de l'équipement des télécommunications, mais aussi par d'autres services. Il permet donc de traiter tous les développements en forme de S.

6. Exemples d'application: développement des réseaux téléphoniques

6.1 Détermination des extensions de centraux

En ce qui concerne les réseaux téléphoniques, on s'est aperçu qu'il était rationnel de considérer la *densité* du développement (nombre de raccordements principaux par habitants). Après avoir calculé la valeur approximative de la courbe de densité sur la base des valeurs observées dans le passé (programme d'ordinateur), on peut déterminer la courbe correspondante du développement des raccordements principaux en se fondant sur des pronostics démographiques: densité multipliée par nombre d'habitants. Cette courbe permet facilement de déterminer *quand* il y a lieu d'agrandir un central téléphonique et *combien* de raccordements principaux il y a lieu d'ajouter si un nouvel agrandissement doit être évité pendant un certain temps. La *figure 6* et les explications y relatives illustrent cette méthode.

6.2 Conséquence de l'optimisation du paramètre du point d'inflexion

Dans son numéro 12/1963, le Bulletin Technique des PTT a publié un article de MM. *Ch. Lancoud* et *R. Trachsel* intitulé «Nouvelle étude du développement probable du téléphone en Suisse». Au vu de la courbe de densité représentée à la *figure 4* de cet article et du tableau II de la densité P , on constate à quel point il est favorable, à l'égard de la fiabilité du pronostic, d'optimiser par ordinateur le paramètre m_{opt} du point d'inflexion, compte tenu d'un nombre relativement élevé de valeurs observées.

La *figure 7* représente deux courbes de régression, calculées toutes deux en fonction des 13 valeurs observées *avant* 1963 (x) (tableau II précité). Pour les deux calculs, on a posé $k = 0,6$. L'une des courbes se fonde sur $m = 1$ et l'autre passe par un point d'inflexion dont le paramètre ($m_{opt} = 3,01$) a été optimisé par le programme d'ordinateur. Il est étonnant de constater à quel point la courbe prévoit bien les densités effectives (o) enregistrées après 1963.

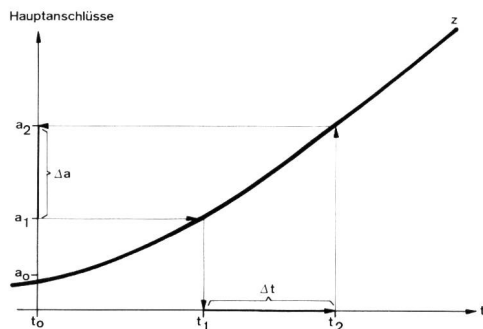


Fig. 6
Entwicklungskurve der Telefonhauptanschlüsse – Courbe de développement des raccordements téléphoniques

- t Zeit - temps
 t_0 Gegenwärtiger Zeitpunkt – Epoque actuelle
 a_0 Anzahl der gegenwärtig bestehenden Hauptanschlüsse – Nombre de raccordements principaux actuellement en service
 a_1 Gegenwärtiger Ausbau (Kapazität) der Zentrale: Es können inkl. Manövrierreserve maximal a_1 Telefonnummern vergeben werden. Aus a_1 lässt sich, wie mit den Pfeilen angedeutet, feststellen, dass die Zentrale spätestens im Zeitpunkt t_1 vergrößert sein muss, damit nicht wegen fehlenden Nummern keine Hauptanschlüsse mehr erstellt werden können – Capacité actuelle du central: a_1 numéros de téléphone au maximum peuvent être cédés, y compris une certaine réserve. Comme les flèches l'indiquent, a_1 permet de déterminer à quelle époque t_1 le central doit au plus tard être agrandi, si l'on veut éviter que le manque de numéros entrave l'établissement de raccordements principaux
 t_1 Spätester Termin für den 1. Ausbau der Zentrale – Dernier délai pour le 1^{er} agrandissement du central
 Δt Zeitspanne, während der man die Zentrale nicht erweitern will. Falls die bei einem Ausbau entstehenden fixen und variablen Kosten bekannt sind, kann Δt optimal bestimmt werden. Auch hierfür besteht ein von ZB 3 erstelltes Computerprogramm – Durée pendant laquelle le central ne doit pas être agrandi. Si les frais fixes et variables afférents à l'agrandissement sont connus, il est possible d'optimiser Δt . A cet effet, ZB 3 dispose aussi d'un programme d'ordinateur
 t_2 Spätester Termin für den 2. Ausbau der Zentrale. Von $t_2 (= t_1 + \Delta t)$ aus kann a_2 berechnet werden (siehe Pfeile) – Dernier délai pour le 2^e agrandissement du central. $t_2 (= t_1 + \Delta t)$ permet de calculer a_2 (voir flèches)
 a_2 Kapazität der Zentrale nach dem 1. Ausbau ($a_2 = a_1 + \Delta a$) – Capacité de central après le 1^{er} agrandissement ($a_2 = a_1 + \Delta a$)
 Δa Anzahl Hauptanschlüsse, um welche die Zentrale im Zeitpunkt t_1 erweitert werden muss, damit der nächste Ausbau erst im Zeitpunkt t_2 fällig ist – Nombre de raccordements principaux devant être ajoutés au central à l'époque t_1 , s'il s'agit d'éviter un nouvel agrandissement avant l'époque t_2

Figur 7 enthält zwei Regressionskurven, die beide aus den in der erwähnten Tabelle II enthaltenen 13 Beobachtungswerten vor 1963 (x) berechnet wurden. Bei beiden Berechnungen wurde $k = 0,6$ vorgegeben. Für die eine Kurve wurde ausserdem noch $m = 1$ vorgegeben; für die andere

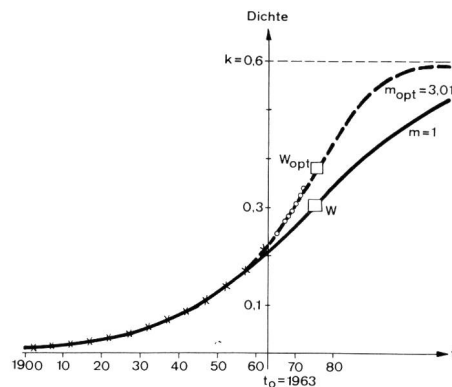


Fig. 7
Entwicklung der Telefondichte in der Schweiz – Développement de la densité du téléphone en Suisse

- t Zeit - temps
Dichte – Densité

D'autre part, la comparaison des deux courbes permet de conclure que d'éventuelles erreurs dans l'estimation de la valeur de saturation k ont des conséquences moins défavorables sur les pronostics à moyen terme, lorsque le point d'inflexion optimal est déterminé par le programme d'ordinateur.

6.3 Prise en considération de la tendance

Suivant l'allure de la courbe du développement passé, il serait favorable de tenir compte de la tendance lors des pronostics. Cela signifie que les valeurs observées les plus récentes doivent peser plus lourd dans la balance que les valeurs plus anciennes. Dans le calcul régressif, on y parvient en introduisant plusieurs fois les dernières valeurs observées dans le calcul.

6.4 Comparaison avec les méthodes de pronostic utilisées jusqu'ici

Le procédé utilisé jusqu'ici est décrit dans le n° 12/1963 du Bulletin Technique des PTT. Il est fondé sur la fonction de la tangente hyperbolique. Dans l'alinéa 2.2.3, nous avons démontré que le nouveau procédé reposait également sur cette fonction. L'intégration de celle-ci dans un modèle mathématique complet et l'emploi du calcul régressif

Tabelle I. Beeinflussung der Ordinate y_w (vertikale Lage) des Wendepunkts durch den Potenzparameter m

Tableau I. Déplacement de l'ordonnée du point d'inflexion y_w (position verticale) selon la valeur du paramètre m de l'exposant

| y_w | m | y_w | m | y_w | m | y_w | m |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|---------|
| 0,37k | 0,012 | 0,53k | 1,337 | 0,69k | 4,682 | 0,85k | 18,173 |
| 0,38k | 0,068 | 0,54k | 1,463 | 0,70k | 5,044 | 0,86k | 20,271 |
| 0,39k | 0,127 | 0,55k | 1,595 | 0,71k | 5,437 | 0,87k | 22,744 |
| 0,40k | 0,188 | 0,56k | 1,736 | 0,72k | 5,864 | 0,88k | 25,693 |
| 0,41k | 0,253 | 0,57k | 1,885 | 0,73k | 6,329 | 0,89k | 29,261 |
| 0,42k | 0,320 | 0,58k | 2,043 | 0,74k | 6,838 | 0,90k | 33,649 |
| 0,43k | 0,391 | 0,59k | 2,211 | 0,75k | 7,396 | 0,91k | 39,155 |
| 0,44k | 0,466 | 0,60k | 2,390 | 0,76k | 8,011 | 0,92k | 46,235 |
| 0,45k | 0,544 | 0,61k | 2,580 | 0,77k | 8,689 | 0,93k | 55,620 |
| 0,46k | 0,626 | 0,62k | 2,784 | 0,78k | 9,441 | 0,94k | 68,560 |
| 0,47k | 0,713 | 0,63k | 3,001 | 0,79k | 10,279 | 0,95k | 87,371 |
| 0,48k | 0,803 | 0,64k | 3,233 | 0,80k | 11,216 | 0,96k | 116,830 |
| 0,49k | 0,899 | 0,65k | 3,482 | 0,81k | 12,270 | 0,97k | 168,519 |
| 0,50k | 1,000 | 0,66k | 3,750 | 0,82k | 13,462 | 0,98k | 278,893 |
| 0,51k | 1,106 | 0,67k | 4,037 | 0,83k | 14,819 | 0,99k | 643,624 |
| 0,52k | 1,219 | 0,68k | 4,347 | 0,84k | 16,375 | | |

Kurve jedoch ermittelte das Programm den optimalen Wendepunktparameter ($m_{opt} = 3,01$). Es ist erstaunlich, wie gut diese Kurve die nach 1963 tatsächlich eingetretenen Dichtewerte (o) approximiert.

Aus dem Vergleich der beiden Kurven kann ferner geschlossen werden, dass sich eine allfällige *Fehlschätzung des Sättigungswertes* k auf die mittelfristige Prognose weniger ungünstig auswirkt, wenn der optimale Wendepunkt durch das Programm ermittelt wird.

6.3 Berücksichtigung des Trends

Je nach dem bisherigen Verlauf der Entwicklung sollte bei Prognoseverfahren auch der Trend berücksichtigt werden. Dies bedeutet, dass die letzten (neusten) Beobachtungswerte stärker gewichtet werden müssen als die früheren. Bei der Regressionsrechnung kann dies dadurch geschehen, dass die letzten Beobachtungswerte mehrmals in die Berechnung eingehen.

6.4 Vergleich mit dem bisher angewendeten Prognoseverfahren

Das bisherige Verfahren ist in den Technischen Mitteilungen PTT, Nr. 12/1963, beschrieben. Es basiert auf einer tgh-Funktion. In Abschnitt 2.2.3 ist nachgewiesen worden, dass auch das hier vorgeführte neue Verfahren mit dieser Funktion arbeitet. Die Einbettung dieser Funktion in ein umfassendes mathematisches Modell sowie die Anwendung der Regressionsrechnung bringen gegenüber dem bisherigen Verfahren folgende neue Vorteile:

- Es werden nicht nur drei spezielle Beobachtungswerte berücksichtigt, sondern alle
- Die vertikale Verschiebbarkeit des Wendepunkts ermöglicht:
 - eine noch bessere Approximation, weil ein optimaler Wendepunktparameter m ermittelt werden kann
 - eine Berücksichtigung des Trends, je nachdem m grösser oder kleiner als 1 gewählt wird
- Der Trend kann auch durch eine vermehrte Gewichtung der neusten Beobachtungswerte berücksichtigt werden.

offrent les avantages suivants par rapport à l'ancien système:

- au lieu de n'employer que trois valeurs observées spéciales, on les utilise toutes
- le décalage vertical du point d'inflexion permet:
 - une approximation encore meilleure, grâce à l'introduction d'un paramètre m de point d'inflexion optimisé
 - de tenir compte de la tendance, en choisissant m plus petit ou plus grand que 1
- on peut aussi tenir compte de la tendance en pondérant plus ou moins les valeurs observées les plus récentes.

7. Conclusion

La courbe logistique affectée d'un exposant a donné de bons résultats dans les pronostics concernant le développement des raccordements téléphoniques. Il serait souhaitable que de nombreux autres services examinent s'il est possible d'utiliser à leurs fins le programme disponible au centre de calcul électronique de l'Entreprise des PTT.

7. Schlussbemerkung

Es hat sich gezeigt, dass sich die potenzierte logistische Kurve für die Prognose über die Entwicklung der Telefonanschlüsse gut eignet. Das im ERZ verfügbare Programm sollte von möglichst vielen anderen Planungsstellen auf seine Verwendbarkeit für ihre Zwecke geprüft werden.

Bibliographie

- [1] Ch. Lancoud, R. Trachsel. Neue Studie über die wahrscheinliche Entwicklung des Telefons in der Schweiz. Bern, Techn. Mitt. PTT, 1963, Nr. 12, S. 425...456.
- [2] M. Hauser. Vorhersage des Bedarfs an Fernsprechhauptanschlüssen unter Einsatz der elektronischen Datenverarbeitung. Fernmelde-Praxis, Bd. 50/1973, Nr. 9, S. 363...373.

Die nächste Nummer bringt unter anderem Vous pourrez lire dans le prochain numéro

| | |
|-------------------------------------|---|
| H. Hügli | Fernsehversorgung mit UHF-Umsetzern in gebirgigem Gelände |
| M. Hochuli | Automatische Zettelrohrpost des manuellen Fernamtes Bern Poste pneumatique à tickets du centre manuel interurbain de Berne |
| R. Gennari P. Bühler H. Bürli | Die Mechanisierung der Fahrzeugrechnung bei den Fernmeldediensten La mécanisation de la comptabilité des véhicules aux services des télécommunications |
| H. Ludwig | Rationalisation de la construction dans l'Entreprise des PTT Razionalizzazione nel settore delle costruzioni delle PTT |