

# Sur quelques solutions des équations cosmologiques de la relativité.

Autor(en): **Juvet, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **3 (1931)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4684>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Sur quelques solutions des équations cosmologiques de la relativité

par G. JUVET, Lausanne

## Introduction

Dans un article<sup>1)</sup> sur lequel Sir Arthur Eddington<sup>2)</sup> et M. W. de Sitter<sup>3)</sup> ont attiré l'attention l'an dernier, M. G. Lemaître a montré que les équations de la gravitation, dites équations cosmologiques, admettent une solution particulière non-statique, les univers correspondants sont à espace sphérique de rayon variable  $R$ , le  $ds^2$  a la forme :

$$ds^2 = - R^2 d\sigma^2 + C^2 dt^2,$$

$d\sigma^2$  étant l'élément linéaire d'une hypersphère de rayon un et  $C$  est une constante qu'on peut toujours prendre égale à l'unité.

Il pouvait être intéressant de rechercher s'il existe des univers autres que celui de M. Lemaître, à *espaces de révolution* et de grandeur variable, mais restant toujours homothétiques à eux-mêmes. Si l'on admet que  $\lambda$  est une constante dans tout l'univers, nous verrons que ceux qu'on peut trouver à côté de celui du savant belge, dépendent de 6 paramètres ; ils ont un espace qui se dilate ou se contracte suivant une loi très simple, la même pour tous. Ils ne semblent pas que ces univers soient intéressants pour l'astronome. Si l'on admet que  $\lambda$  peut avoir une valeur constante dans une région et une autre valeur constante dans une autre région, on verra que l'on peut trouver des solutions discontinues dont l'utilité paraît certaine pour l'étude du  $ds^2$  dans le voisinage d'un objet céleste : étoile, amas ou nébuleuse de forme et de structure sphériques.

Il peut sembler étonnant de prescrire des valeurs différentes à la constante cosmologique dans un même univers ; en fait la démonstration de la constance de  $\lambda$  suppose implicitement la continuité des  $g_{ik}$ . Si l'on admet que les  $g_{ik}$  ont des discontinuités de première espèce sur des variétés à deux dimensions qui divisent l'espace en deux régions dans chacune desquelles  $\lambda$  est constant, on peut encore trouver des solutions du problème cosmologique (nous ne donnerons ici que les solutions à la

---

1) Annales de la Société scientifique de Louvain, 1927.

2) Monthly Notices, vol. XC.

3) Bulletin of the astronomical Institutes of the Netherlands, vol. V.

Lemaître) et l'intérêt de ces solutions ne le cède en rien à l'intérêt des solutions continues, qui servent dès lors à construire des  $ds^2$  d'univers plus conformes à l'image fortement discontinue que présente la figure du monde.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous étudierons les  $ds^2$  statiques et continus pour lesquels la partie spatiale est de révolution; dans le deuxième chapitre, nous examinerons la variation homothétique dans le temps de ces espaces et enfin dans le troisième chapitre, nous montrerons comment on peut construire des solutions discontinues, dont les espaces correspondants sont formés de morceaux d'espaces sphériques.

## I. Cas statique

1. Un espace riemannien à trois dimensions est de révolution si son  $d\sigma^2$  peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad d\sigma^2 = D^2 du_1^2 + g^2 (du_2^2 + \sin^2 u_2 du_3^2),$$

où  $D$  et  $g$  sont des fonctions de  $u_1$ . Si l'on imagine, en effet, que cet espace riemannien est plongé<sup>4)</sup> dans un espace euclidien à quatre dimensions  $E_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , on peut exprimer les quatre  $x_i$  au moyen de 3 paramètres  $\theta, \varphi$ , et  $\omega$  par les relations suivantes:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = f(\theta) \\ x_2 = g(\theta) \cos \varphi \\ x_3 = g(\theta) \sin \varphi \cos \omega \\ x_4 = g(\theta) \sin \varphi \sin \omega \end{cases} \quad \begin{matrix} \circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ \circ \leq \varphi \leq 2\pi, \\ \circ \leq \omega \leq 2\pi, \end{matrix}$$

$f$  et  $g$  sont deux fonctions qui définissent le méridien:  $\varphi = 0, \omega = 0$ . Dans le plan de ce méridien, on a, en effet:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(\theta) \\ x_2 &= g(\theta), \end{aligned}$$

si on élimine  $\theta$  on trouve l'équation cartésienne du méridien. Il est parfois préférable de considérer des coordonnées polaires  $P$  et  $\theta$ :  $P^2 = x_1^2 + x_2^2$ ; on se donnera le méridien par l'équation

$$P = P(\theta),$$

<sup>4)</sup> Plus exactement il suffit de supposer que cet espace est applicable sur la variété (2) plongée dans  $E_4$ .

et l'on a bien évidemment

$$\begin{aligned} f(\theta) &= P \cos \theta \\ g(\theta) &= P \sin \theta, \end{aligned}$$

si l'on prend l'axe de révolution comme axe polaire. Le  $d\sigma^2$  de l'espace riemannien de révolution est dès lors :

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = [f'^2(\theta) + g'^2(\theta)] d\theta^2 + g^2(\theta) [d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\omega^2].$$

Si l'on pose  $\theta = u_1$ ,  $\varphi = u_2$ ,  $\omega = u_3$ , on a bien la formule indiquée, avec

$$D^2 = f'^2(u_1) + g'^2(u_1)$$

mais

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= P' \cos \theta - P \sin \theta \\ g'(\theta) &= P' \sin \theta + P \cos \theta, \end{aligned}$$

et dès lors :

$$D^2 = P^2 + P'^2$$

où il est entendu que les accents désignent des dérivées par rapport à  $u_1$  (ou  $\theta$ ). En fait il y a ici une seule fonction en jeu  $P(\theta)$ .

A première vue, pour la relativité, il pourrait paraître préférable de prendre une autre variable  $u_1$  définie par la relation

$$du_1 = \sqrt{f'^2(\theta) + g'^2(\theta)} d\theta,$$

et le  $d\sigma^2$  s'écrirait, puisque  $g(\theta)$  deviendrait une fonction  $K(u_1)$  :

$$(1') \quad d\sigma^2 = du_1^2 + K^2(u_1) [du_2^2 + \sin^2 u_2 du_3^2],$$

on aurait la seule fonction  $K$  dans les calculs. Cependant l'avantage pour le calcul des  $R_{ik}$  est faible comparé à l'avantage qu'on a, en prenant la forme (1), de conserver à  $u_1$  le rôle de la colatitude et de pouvoir étudier, s'il en est besoin, la forme précise du méridien.

2. On supposera que le  $ds^2$  de l'espace-temps a la forme

$$ds^2 = -d\sigma^2 + C^2 du_4^2,$$

où  $u_4$  est le temps et où  $C$  est une fonction de  $u_1$  seulement. Cela implique évidemment que l'on a fait des hypothèses sur le tenseur  $T_{ik}$  dont les composantes doivent être des fonctions de  $u_1$  seulement.

Le tableau des  $g_{ik}$  est donc :

$$\begin{pmatrix} -D^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g^2 \sin^2 u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^2 \end{pmatrix}$$

On a  $\Delta = |g_{ik}| = -D^2 g^4 C^2 \sin^2 u_2$  et dès lors les tableaux des  $\Gamma_{ik}^l$ , symboles de Christoffel de seconde espèce sont :

$$\Gamma_{1k}^l : \begin{pmatrix} \frac{D'}{D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g'}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g'}{g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C'}{C} \end{pmatrix} \quad \Gamma_{2k}^l : \begin{pmatrix} 0 & \frac{g'}{g} & 0 & 0 \\ -\frac{gg'}{D^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cot u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{3k}^l : \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{g'}{g} & 0 \\ 0 & 0 & \cot u_2 & 0 \\ -\frac{gg' \sin^2 u_2}{D^2} & -\sin u_2 \cos u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_{4k}^l : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{C'}{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{CC'}{D^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Tous les  $R_{ik}$  pour lesquels  $i \neq k$  sont nuls ; les autres sont :

$$R_{11} = -\frac{2g''}{g} - \frac{C''}{C} + \frac{2D'g'}{Dg} + \frac{D'C'}{DC},$$

$$R_{22} = -\frac{gg''}{D^2} - \frac{g'^2}{D^2} + \frac{D'gg'}{D^3} - \frac{gg'C'}{D^2 C} + 1,$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 u_2,$$

$$R_{44} = \frac{CC''}{D^2} - \frac{D'CC'}{D^3} + \frac{2g'CC'}{D^2 g}.$$

4. Le tenseur  $T_{ik}$  d'après les hypothèses faites sur le  $ds^2$  et à cause des valeurs nulles des  $R_{ik}$  pour  $i \neq k$  aura quatre composantes non

identiquement nulles, les  $T_{ii}$ . Nous ferons l'hypothèse suivante: les quatre fonctions de  $u_1$ :  $T_1^1$ ,  $T_2^2$ ,  $T_3^3$  et  $T_4^4$  satisfont aux conditions:

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3,$$

qui sont vérifiées dans un fluide parfait et dans un champ de rayonnement où n'existent pas de mouvements systématiques de la matière ou de l'énergie. Nous poserons conformément aux habitudes, sans entrer plus avant dans l'interprétation physique, ni dans l'indication des unités choisies, ce qui ne serait pas ici le lieu (Cf. p. ex. *Silberstein*, *The Theory of Relativity*, p. 415)

$$\begin{aligned} T_1^1 &= T_2^2 = T_3^3 = -p, \\ T_4^4 &= \rho = \rho_0 - p, \end{aligned}$$

$\rho$  et  $p$  étant des fonctions de  $u_1$  seulement. On admettra même qu'on a choisi l'unité de masse de façon que le coefficient  $\kappa$  des équations de la gravitation, qui s'écrivent dans la théorie cosmologique:

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = \kappa \left( T_{ik} - \frac{g_{ik}}{2} T \right),$$

soit égal à l'unité. On a de plus:  $T = T_i^i = \rho - 3p$ .

5. Dès lors, puisque  $T_{ik} = g_{il} T_k^l$ , les équations qui déterminent la métrique sont les suivantes:

$$\begin{aligned} (A_1) \quad & -\frac{2g''}{g} - \frac{C''}{C} + \frac{2D'g'}{Dg} + \frac{D'C'}{DC} + \lambda D^2 = \frac{D^2}{2} (\rho - p), \\ (A_2) \quad & -\frac{gg''}{D^2} - \frac{g'^2}{D^2} + \frac{D'gg'}{D^3} - \frac{gg'C'}{D^2C} + 1 + \lambda g^2 = \frac{g^2}{2} (\rho - p), \\ (A_4) \quad & \frac{CC''}{D^2} - \frac{D'CC'}{D^3} + \frac{2g'CC'}{D^2g} - \lambda C^2 = \frac{C^2}{2} (\rho + 3p). \end{aligned}$$

Il est inutile de mentionner l'équation  $(A_3)$  car elle est, par suite de  $R_{33} = R_{22} \sin^2 u_2$ , une conséquence de  $(A_2)$ .

On a donc trois équations pour déterminer  $C$  et  $D$  ou  $g$ . Cependant les identités auxquelles satisfont les  $R_{ik}$  et par suite aussi les  $T_{ik}$  réduisent le nombre des équations à deux. On sait en effet que la divergence du tenseur  $T_i^k$  est nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \frac{\partial (\sqrt{-\Delta} T_i^k)}{\partial x_k} - \Gamma_{ik}^l T_l^k = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial p}{\partial u_1} + \frac{C'}{C} (p + \rho) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial u_2} = \frac{\partial p}{\partial u_3} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_4} = 0.$$

C'est donc dire que les fonctions  $\rho$  et  $p$  qui sont censées être données par l'observation doivent vérifier ces conditions. D'après nos hypothèses, seule la première est à considérer puisque les autres sont satisfaites.

6. Au lieu de résoudre les équations du problème en supposant  $\rho$  et  $p$  données, nous allons chercher  $\rho$  et  $p$  connaissant la forme de l'espace, c'est-à-dire connaissant le  $d\sigma^2$ .

On peut éliminer  $\rho$  et  $p$  entre  $(A_1)$  et  $(A_2)$  par la combinaison  $\frac{(A_1)}{D^2} - \frac{(A_2)}{g^2}$  ; on en tire :

$$(3) \quad C'' - \left( \frac{D'}{D} + \frac{g'}{g} \right) C' - \left( \frac{D'g'}{Dg} + \frac{g'^2}{g^2} - \frac{g''}{g} - \frac{D^2}{g^2} \right) C = 0.$$

Cette équation différentielle linéaire et homogène du second ordre définit  $C$  en fonction de  $u_1$  lorsque le méridien est connu. En faisant les combinaisons  $\frac{3(A_1)}{D^2} + \frac{(A_4)}{C^2}$  et  $-\frac{(A_1)}{D^2} + \frac{(A_4)}{C^2}$ , on trouve :

$$(4) \quad \rho = \lambda - \frac{2g''}{gD^2} + \frac{2g'D'}{gD^3} - \frac{g'^2}{g^2D^2} + \frac{1}{g^2},$$

$$(5) \quad p = -\lambda + \frac{2g'C'}{gD^2C} + \frac{g'^2}{g^2D^2} - \frac{1}{g^2}.$$

Dans le cas particulier de l'espace sphérique,  $D = R =$  rayon de l'espace,  $g = R \sin u_1$ . L'équation (3) donne, en choisissant l'unité de longueur de façon que  $R = 1$  :

$$C'' - \frac{\cos u_1}{\sin u_1} C' = 0,$$

d'où

$$C = \alpha \cos u_1 + \beta, \quad (\alpha, \beta, \text{const.})$$

$$\rho = \lambda + 3,$$

$$p = -\lambda - 1 - \frac{2\alpha \cos u_1}{\alpha \cos u_1 + \beta}.$$

On voit donc qu'on peut trouver une infinité d'univers sphériques, si l'on imagine une pression  $p$  variable d'un point à l'autre et fonction d'une variable  $u_1$ . Un tel espace n'est pas en général parfaitement sphérique, du point de vue de la répartition de l'énergie. Il l'est cependant si  $\alpha = 0$ , ou si  $\beta = 0$ . On peut choisir l'unité de temps dans l'un et l'autre cas de façon que  $C = 1$  ou  $C = \cos u_1$ . Dans le premier cas :

$$p = -\lambda - 1,$$

$$\rho = \lambda + 3.$$

Si l'on néglige  $p$  :  $\lambda = -1$  et  $\rho = 2$ , on a l'univers d'Einstein dont le  $ds^2$  avec le choix de nos unités s'écrit :

$$ds^2 = - du_1^2 - \sin^2 u_1 (du_2^2 + \sin^2 u_2 du_3^2) + du_4^2.$$

Si on prend  $C = \cos u_1$ , on a :

$$p = -\lambda - 3$$

$$\rho = \lambda + 3$$

et si on néglige  $p$ ,  $\lambda = -3$ , l'espace est vide, le  $ds^2$  de l'univers est

$$ds^2 = - du_1^2 - \sin^2 u_1 (du_2^2 + \sin^2 u_2 du_3^2) + \cos^2 u_1 du_4^2,$$

c'est celui de de Sitter.

D'une manière générale, connaissant  $\rho$  et  $p$ , l'équation (4) donnera le méridien, l'équation (3), la vitesse  $C$  et dès lors l'équation (5) est identiquement vérifiée, à moins peut-être qu'elle ne donne la valeur de  $\lambda$ .



## II. Cas non-statique

7. On peut se demander, comme l'a fait M. Lemaître pour l'univers d'Einstein, s'il est possible de trouver un univers dont le  $ds^2$  ait des coefficients variables avec le temps, tels que la forme de l'espace, supposée de révolution, reste homothétique à elle-même et que la fonction  $C$  conserve en chaque point  $(u_1, u_2, u_3)$  la même valeur. Autrement dit, existe-t-il des  $ds^2$  tels que leur forme soit

$$(6) \quad ds^2 = -A^2 d\sigma^2 + C^2 du_4^2,$$

$d\sigma^2$  étant de révolution,  $C$  étant une fonction de  $u_1$  et  $A$  une fonction de  $u_4$  seulement.

Le tableau des  $g_{ik}$  est dès lors:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -A^2 D^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^2 g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A^2 g^2 \sin^2 u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^2 \end{array} \right\};$$

pour les  $\Gamma_{ik}^l$  on a les quatre tableaux<sup>5)</sup>:

$$\Gamma_{1k}^l: \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{D'}{D} & 0 & 0 & \frac{A \dot{A} D^2}{C^2} \\ 0 & \frac{g'}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g'}{g} & 0 \\ \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 & \frac{C'}{C} \end{array} \right\} \quad \Gamma_{2k}^l: \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \frac{g'}{g} & 0 & 0 \\ -\frac{g g'}{D^2} & 0 & 0 & \frac{A \dot{A} g^2}{C^2} \\ 0 & 0 & \cot u_2 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Gamma_{3k}^l: \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{g'}{g} & 0 \\ 0 & 0 & \cot u_2 & 0 \\ -\frac{g g' \sin^2 u_2}{D^2} & -\sin u_2 \cos u_2 & 0 & \frac{A \dot{A} g^2 \sin^2 u_2}{C^2} \\ 0 & 0 & \frac{\dot{A}}{A} & 0 \end{array} \right\} \quad \Gamma_{4k}^l: \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 & \frac{C'}{C} \\ 0 & \frac{\dot{A}}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{A}}{A} & 0 \\ \frac{C C'}{A^2 D^2} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

<sup>5)</sup> Le point sur  $A$  indique la dérivée de  $A$  par rapport à  $u_4$ .

8. Les  $R_{ik}$  qui ne sont pas nuls et que nous représenterons ici en surlignant la lettre  $R$  pour les distinguer des grandeurs analogues du cas statique sont :

$$\begin{aligned}\bar{R}_{11} &= R_{11} + \frac{D^2}{C^2} (A\ddot{A} + 2\dot{A}^2) \\ \bar{R}_{22} &= R_{22} + \frac{g^2}{C^2} (A\ddot{A} + 2\dot{A}^2) \\ \bar{R}_{33} &= \bar{R}_{22} \sin^2 u_2 \\ \bar{R}_{44} &= \frac{R_{44}}{A^2} - \frac{3\ddot{A}}{A}.\end{aligned}$$

En faisant les mêmes hypothèses sur le tenseur  $T_{ik}$ , en particulier en supposant qu'il n'y a pas de mouvements systématiques, mais en faisant remarquer que dans le nouveau problème,  $\rho$  et  $p$  sont des fonctions de  $u_1$  et de  $u_4$ , on obtient les équations cosmologiques suivantes :

$$\begin{aligned}(\bar{A}_1) \quad R_{11} + \frac{D^2}{C^2} (A\ddot{A} + 2\dot{A}^2) + \lambda A^2 D^2 &= \frac{A^2 D^2}{2} (\rho - p), \\ (\bar{A}_2) \quad R_{22} + \frac{g^2}{C^2} (A\ddot{A} + 2\dot{A}^2) + \lambda A^2 g^2 &= \frac{A^2 g^2}{2} (\rho - p), \\ (\bar{A}_4) \quad \frac{R_{44}}{A^2} - \frac{3\ddot{A}}{A} - \lambda C^2 &= \frac{C^2}{2} (\rho + 3p),\end{aligned}$$

à quoi s'ajoutent les quatre équations de conservation :

$$\begin{aligned}(7) \quad \frac{\partial p}{\partial u_1} + \frac{C'}{C} (p + \rho) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial u_2} = \frac{\partial p}{\partial u_3} &= 0, \\ (8) \quad \frac{\partial \rho}{\partial u_4} + \frac{3\dot{A}}{A} (p + \rho) &= 0.\end{aligned}$$

9. Comment ces équations vont-elles nous être utiles? Nous supposons que le méridien est donné à un certain instant, celui pour lequel  $A = 1$  par exemple; nous chercherons s'il est possible de choisir un des méridiens du cas statique avec la fonction  $C$  correspondante, puis nous verrons s'il est possible de déterminer  $\rho$  et  $p$  en fonction de  $u_1$  et de  $u_4$  et le rapport d'homothétie  $A$ , fonction de  $u_4$ .

Les combinaisons:  $\frac{(\bar{A}_1)}{D^2} - \frac{(\bar{A}_2)}{g^2}$ ,  $\frac{3(\bar{A}_1)}{D^2} + \frac{(\bar{A}_4)A^2}{C^2}$ ,  $-\frac{(\bar{A}_1)}{D^2} + \frac{(\bar{A}_4)A^2}{C^2}$   
 qui peuvent remplacer  $(\bar{A}_1)$ ,  $(\bar{A}_2)$  et  $(\bar{A}_4)$  donnent les équations:

$$(9) \quad C'' - \left( \frac{D'}{D} + \frac{g'}{g} \right) C' - \left( \frac{D'g'}{Dg} + \frac{g'^2}{g^2} - \frac{g''}{g} - \frac{D^2}{g^2} \right) C = 0,$$

$$(10) \quad \rho = \lambda + \frac{1}{A^2} \left( -\frac{2g''}{gD^2} + \frac{2g'D'}{gD^3} - \frac{g'^2}{g^2D^2} + \frac{1}{g^2} \right) + \frac{3\dot{A}^2}{A^2C^2},$$

$$(11) \quad p = -\lambda + \frac{1}{A^2} \left( \frac{2g'C'}{gD^2C} + \frac{g'^2}{g^2D^2} - \frac{1}{g^2} \right) - \frac{2A\dot{A} + \dot{A}^2}{A^2C^2}.$$

Or l'équation (9), qui est la même que celle qui détermine  $C$  dans le cas statique lorsqu'on connaît le méridien, permet donc d'affirmer que les fonctions  $g$  et  $D$  étant données, on est fondé à chercher une fonction  $A$  dépendant de  $u_4$  seulement, telle que le  $ds^2$  prenne la forme supposée (6),  $C$  étant l'une des fonctions déterminées dans le cas statique, car il est possible que tous les  $ds^2$  statiques ne donnent pas lieu à un  $ds^2$  du type (6).

Il est clair cependant que  $\rho$  et  $p$  ne peuvent être données arbitrairement, car en général le  $ds^2$  ne pourrait avoir la forme (6); il y a lieu dès lors d'ajouter aux équations (9), (10) et (11) les deux équations de continuité (7) et (8) et avec ces cinq équations, on cherchera à déterminer les fonctions  $C(u_1)$ ,  $A(u_4)$ ,  $p(u_1, u_4)$  et  $\rho(u_1, u_4)$ , le paramètre constant  $\lambda$  étant encore une inconnue.

10. On tire  $\frac{\partial \rho}{\partial u_4}$  de (10), on porte sa valeur dans (8) et on tient compte de (10) et (11) pour calculer  $p + \rho$ . On trouve:

$$\frac{\dot{A}}{A} \left\{ \frac{C^2}{2} (\rho + 3p) + \lambda C^2 + \frac{3\dot{A}}{A} \right\} = 0;$$

ce qui donne: ou bien  $\frac{\dot{A}}{A} = 0$  et l'on retrouve les univers statiques, ou bien

$$\frac{C^2}{2} (\rho + 3p) + \lambda C^2 + \frac{3\dot{A}}{A} = 0,$$

ce qui d'après  $(\bar{A}_4)$  donne  $R_{44} = 0$ , c'est-à-dire

$$\frac{C}{D^2} \left( C'' - \frac{D' C'}{D} + \frac{2g' C'}{g} \right) = 0$$

ou

$$(12) \quad C'' - \left( \frac{D'}{D} - \frac{2g'}{g} \right) C' = 0.$$

On obtient ainsi une seconde équation pour déterminer  $C$ . Il va sans dire que cette nouvelle condition, si elle est compatible avec (9), définit simplement des méridiens particuliers et que, par conséquent, il n'est pas possible ici, comme nous l'avons fait dans le cas statique, de prendre le méridien arbitrairement. On éliminera  $C$  entre (9) et (12) par des dérivations. Si l'on utilise la forme (1') pour le  $ds^2$ , l'élimination conduit à l'équation du troisième ordre en  $K$ :

$$(13) \quad \frac{3U'}{U} + \frac{2K'}{K} - \frac{2K''}{K'} - \frac{2}{KK'} = 0$$

où  $U = \frac{K'^2}{K^2} + \frac{2K''}{K} - \frac{1}{K^2}$ ; la solution dépendra de 3 constantes arbitraires, et  $C$  sera donné ensuite avec 2 constantes arbitraires.  $K$  étant donnée, le calcul de  $f$  et de  $g$  introduit encore une constante arbitraire. On peut donc dire que nos univers dépendent de 6 paramètres. Quel que soit le nombre de ceux-ci, ils particularisent infiniment les univers variables, alors que les univers statiques du chapitre I dépendent d'une fonction inconnue  $P$  d'une variable  $\theta$  et de 2 paramètres.

Il faut distinguer le cas particulier pour lequel  $C$  est une constante, alors:

$$(14) \quad \frac{D^2}{gg'} + \frac{g''}{g'} - \frac{g'}{g} - \frac{D'}{D} = 0.$$

Cette équation définit des méridiens dépendant de 3 constantes arbitraires, nous en ferons l'étude plus loin; les univers correspondants seront appelés les univers  $U_0$ .

II. Si on fait la même chose avec l'équation (7), c'est-à-dire si l'on calcule  $\frac{\partial p}{\partial u_1}$  au moyen de (11) et qu'on reporte cette valeur dans (7) en tenant compte de (10) et (11) pour calculer  $p + \rho$ , on trouve

$$(A \ddot{A} + 2\dot{A}^2) C' = 0;$$

1°)  $C' = 0$ , ce qui conduit aux univers  $U_0$ ;

2°)  $A\dot{A} + 2\dot{A}^2 = 0$ ,

ou  $\log A^2 \dot{A} = \log \nu$ , ( $\nu$ , const.),

$$\frac{d \frac{A^3}{3}}{du_4} = \nu,$$

$$(16) \quad A = M(u_4 + \xi)^{\frac{1}{3}}, \quad (\xi \text{ et } M, \text{ const.}).$$

Le rapport d'homothétie de nos univers variables — les univers  $U_0$  exceptés — varie d'une façon tout à fait indépendante de la forme du méridien. En d'autres termes, tous les univers dont le  $ds^2$  est donné par la formule (6), où  $C$  n'est pas une constante, ont un espace qui se dilate ou se contracte suivant la même loi (16). La distribution de  $p$  et de  $\rho$  suivant  $u_1$  et  $u_4$  est donnée par les formules :

$$\rho = \lambda + \frac{1}{M^2 t^{\frac{2}{3}}} \left( -\frac{2g''}{gD^2} + \frac{2g'D'}{gD^3} - \frac{g'^2}{g^2 D^2} - \frac{1}{g^2} \right) + \frac{1}{3C^2 t^2},$$

$$p = -\lambda + \frac{1}{M^2 t^{\frac{2}{3}}} \left( \frac{2g'C'}{gD^2 C} + \frac{g'^2}{g^2 D^2} - \frac{1}{g^2} \right) + \frac{1}{3C^2 t^2},$$

où l'on a posé

$$t = u_4 + \xi,$$

et où il faut entendre que les parenthèses se calculent en tenant compte de (9), (12) et (13).

Si on détermine les constantes par des conditions en  $u_4 = 0$  :  $A = A_0$ ,  $\dot{A} = B_0$ , on aura :

$$M \xi^{\frac{1}{3}} = A_0, \quad \frac{1}{3} M \xi^{-\frac{2}{3}} = B_0,$$

d'où

$$\xi = \frac{A_0}{3B_0}, \quad M = 3^{\frac{1}{3}} A_0^{\frac{2}{3}} B_0^{\frac{1}{3}}.$$

Si  $B_0 < 0$ :  $\xi < 0$ ,  $M < 0$  et  $A$  n'est positif que si  $u_4 < -\xi$ , les espaces se contractent et lorsque  $t \rightarrow 0$ , étant parti de  $t_0 = \xi$ ,  $\rho$  et  $p$  deviennent infinis. Il y a une singularité à cette époque.

Si  $B_0 > 0$ :  $\xi > 0$ ,  $M > 0$ ,  $A$  croît; lorsque  $t$  augmente indéfiniment

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \lambda, \\ p &\rightarrow -\lambda, \quad \text{donc } \rho_0 = \rho + p \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On a encore

$$\rho + 3p + 2\lambda = \frac{4}{3C^2 t^2},$$

ce qui montre que  $\lambda$  est une constante négative; donc lorsque l'espace se dilate, la pression qui travaille, comme l'a montré M. Lemaître par un calcul qui se généralise immédiatement, diminue et tend vers  $-\lambda$  et la densité  $\rho_0$  tend vers zéro<sup>6) 7)</sup>.

12. Pour étudier les univers  $U_0$ , il est préférable d'employer la variable  $u_1$  définie au début  $du_1 = \sqrt{f'^2 + g'^2} d\theta$ . Alors l'équation (14) devient

$$(14') \quad \frac{1}{KK'} + \frac{K''}{K'} - \frac{K'}{K} = 0,$$

dont l'intégrale générale se détermine aisément en prenant  $K' = Y$  comme fonction inconnue et  $K = x$  comme variable indépendante. Ce changement de variables transforme (14') en

<sup>6)</sup> Si on pose  $D=1$ ,  $g=\sin u_1$ , on a un univers dont l'espace est applicable sur une hypersphère; on trouve avec (9),  $C=\alpha \cos u_1 + \beta$ , mais (12) n'est pas satisfaite par cette forme de  $C$ ; donc l'univers de de Sitter n'a pas un espace dilatable selon le mode que nous étudions ici.

<sup>7)</sup> Les univers statiques dont le méridien est défini par (13) ne sont pas stables, comme le montre un raisonnement fondé sur l'équation  $\ddot{A} = -\frac{AC^2}{3} \left( \lambda + \frac{\rho + 3p}{2} \right)$ , et semblable à celui qu'a fait Sir Arthur Eddington (loc. cit.) pour montrer l'instabilité de l'univers d'Einstein. Pour les autres univers statiques, la question de la stabilité reste ouverte; on pourrait songer à la résoudre, du moins pour certains d'entre eux, et en même temps expliquer l'uniformité de la variation de  $A$  dans les univers (13), en imaginant une variabilité des coefficients avec le temps différente de celle que nous étudions ici, par exemple:  $C$  serait fonction de  $u_4$  aussi, avec le  $ds^2$  (6) ou bien:

$$ds^2 = -A^2 D^2 du_1^2 - B^2 g^2 (du_2^2 + \sin^2 u_2 du_3^2) + C^2 du_4^2,$$

$A$  et  $B$  étant des fonctions de  $u_4$ . Cependant dans ce cas plus général, il faut faire d'autres hypothèses sur les  $T_{ik}$  sinon  $\dot{A} = \dot{B}$ , comme le montrerait l'équation  $R_{14} = 0$ .

$$(14'') \quad xY \frac{dY}{dx} - Y^2 + 1 = 0,$$

$$\text{d'où} \quad \frac{x}{\sqrt{1 - Y^2}} = \alpha, \quad (\alpha, \text{ const.})$$

et en revenant aux notations précédentes :

$$\frac{K}{\sqrt{1 - \left(\frac{dK}{du_1}\right)^2}} = \alpha,$$

ou

$$\frac{dK}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{\alpha^2}}} = du_1, \quad K = \alpha \sin \frac{u_1 + \beta}{\alpha}, \quad (\beta, \text{ const.}).$$

Le cas particulier  $\alpha = 0$  avec  $K = 0$  n'offre pas d'intérêt.

Ces valeurs de  $K$  définissent des  $d\sigma^2$  applicables sur des hypersphères. Pour simplifier, prenons la surface  $u_3 = 0$ , elle est de révolution et son élément linéaire  $d\zeta$  est défini par la relation :

$$d\zeta^2 = du_1^2 + \alpha^2 \sin^2 \frac{u_1 + \beta}{\alpha} du_2^2.$$

Or on a posé

$$du_1^2 = (f'^2 + g'^2) d\theta^2,$$

et l'on a

$$g^2(\theta) = \alpha^2 \sin^2 \frac{u_1 + \beta}{\alpha},$$

$$g(\theta) = \alpha \sin \frac{u_1 + \beta}{\alpha},$$

$$g'(\theta) d\theta = \cos \frac{u_1 + \beta}{\alpha} du_1,$$

d'où

$$f'(\theta) d\theta = \sin \frac{u_1 + \beta}{\alpha} du_1,$$

et alors :

$$f(\theta) = \alpha \cos \frac{u_1 + \beta}{\alpha} + \eta, \quad (\eta, \text{const.}).$$

Les équations de la méridienne en fonction du paramètre  $u_1$  sont

$$x_1 = \alpha \cos \frac{u_1 + \beta}{\alpha} + \eta,$$

$$x_2 = \alpha \sin \frac{u_1 + \beta}{\alpha};$$

ce sont des cercles. Nos univers  $U_0$  ont leurs espaces applicables sur des hypersphères de rayon  $\alpha$ ; de plus  $\theta = 0$ , si  $u_1 = -\beta$ ;  $\theta = \pi$ , si  $u_1 = -\beta + \alpha \pi$ ; donc  $u_1$  doit varier entre  $-\beta$  et  $-\beta + \alpha \pi$ . On pourra poser  $u_1 = -\beta + \alpha \theta$ , mais d'une manière générale, il faudra écrire

$$u_1 = -\beta + \alpha \pi \varphi(\theta),$$

$\varphi(\theta)$  étant une fonction nulle en  $\theta = 0$  et égale à 1 en  $\theta = \pi$ .

On peut faire dans ces univers  $C = \text{const.} = 1$  en choisissant l'unité de temps convenablement, les fonctions  $p$ ,  $\rho$  et  $A$  satisfont donc aux équations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial u_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_1} + \frac{3\dot{A}}{A} (p + \rho) = 0,$$

$$\rho = \lambda + \frac{1}{A^2} \left( -\frac{2g''}{gD^2} + \frac{2g'D'}{gD^3} - \frac{g'^2}{g^2D^2} + \frac{1}{g^2} \right) + \frac{3\ddot{A}^2}{A^2},$$

$$p = -\lambda + \frac{1}{A^2} \left( \frac{g'^2}{g^2D^2} - \frac{1}{g^2} \right) - \frac{2A\ddot{A} + \dot{A}^2}{A^2},$$

et, d'après (14), ou mieux d'après la forme de  $K$  :

$$p = -\lambda - \frac{\gamma}{A^2} - \frac{2A\ddot{A} + \dot{A}^2}{A^2},$$

$$\rho = \lambda + \frac{3\gamma}{A^2} + \frac{3\dot{A}^2}{A^2}. \quad \left( \gamma = \frac{1}{\alpha^2} \right)$$



Ces équations ne suffisent pas à trouver la loi suivant laquelle  $A$  varie. Il faut se donner une relation de plus entre  $p$  et  $\varrho$ , par exemple. L'univers de Lemaître pour lequel  $A = R$ ,  $\gamma = 1$  est caractérisé par la relation

$$p = 0,$$

ce qui fait

$$(17) \quad \frac{2 \ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} + \lambda = 0,$$

$$(18) \quad \varrho = \frac{3 \dot{R}^2}{R^2} + \frac{3}{R^2} + \lambda.$$

On intègre l'équation (17) en prenant  $R = x$  comme variable indépendante et  $\frac{dR}{du_4} = y$  comme fonction inconnue. On trouve alors :

$$2xy \, dy + (y^2 + 1 + \lambda x^2) \, dx = 0,$$

qu'on intègre immédiatement :

$$y^2 x + x + \frac{\lambda x^3}{3} + \beta = 0, \quad (\beta, \text{const.}),$$

d'où

$$u_4 = \int_{R_0}^R \sqrt{\frac{-R}{\frac{\lambda R^3}{3} + R + \beta}} \, dR.$$

La quadrature se fait sans difficulté par les fonctions de Weierstrass ; il n'est pas utile ici de donner les calculs ni même les résultats.

En remplaçant  $\frac{dR}{du_4} = \dot{R}$  par sa valeur dans (18), on trouve

$$\varrho = -\frac{3\beta}{R^3},$$

équation qui se confond avec celle de M. Lemaître pour  $p = 0$ . Lorsque  $R \rightarrow \infty$ ,  $\varrho = \varrho_0 \rightarrow 0$ .

### III. Solutions discontinues.

13. On peut se proposer de chercher des solutions pour lesquelles la densité et la pression sont discontinues, c'est manifestement ce qui arrive si l'on cherche le  $ds^2$  dans le voisinage d'un amas et dans cet amas lui-même.

Reprenons le problème avec  $\rho = \text{const.}$ ,  $p = 0$ , dans le cas statique. Imaginons que le méridien soit composé de deux arcs de cercles de rayons  $a$  et  $b$ ,  $a < b$ :

$$\left. \begin{aligned} g(\theta) &= b \sin \theta, \\ f(\theta) &= b \cos \theta, \end{aligned} \right\} \text{ pour } \theta > \theta_0,$$

pour  $\theta < \theta_0$ , on prendra une variable auxiliaire  $\varphi$  (angle au centre du petit cercle) dont  $\theta$  est fonction :

$$\left. \begin{aligned} g(\theta) &= a \sin \varphi, \\ f(\theta) &= d + a \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\theta < \theta_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ &d = \text{distance des centres.} \end{aligned}$$

On aura pour le grand cercle et pour  $\theta > \theta_0$  les relations connues :

$$\rho_b = \lambda_b + \frac{3}{b^2},$$

$$p_b = -\lambda_b - \frac{1}{b^2},$$

où  $\lambda_b$  est une constante; puisque  $p = 0$ ,

$$\lambda_b = -\frac{1}{b^2}.$$

Pour le petit cercle de rayon  $a$ , le calcul montre qu'on a encore :

$$\rho_a = \lambda_a + \frac{3}{a^2},$$

$$p_a = -\lambda_a - \frac{1}{a^2},$$

et si  $p_a = 0$ ,  $\lambda_a = -\frac{1}{a^2}$ . On voit que, dans cette hypothèse,  $\lambda$  est une constante dans chaque région;  $\lambda$  est donc une grandeur représentable par une courbe en escalier.

Les deux espaces  $E_a$  et  $E_b$  ont une partie commune qui est la surface d'une sphère  $\theta = \theta_0$ , correspondant à  $\varphi = \varphi_0$ , lieu des points par lesquels la lumière, qui part des points intérieurs à l'amas  $E_a$ , passe dans  $E_b$ . L'angle solide sous lequel on voit, d'un point de  $E_b$ , le faisceau des rayons lumineux en question, qui y passent, est l'angle solide sous lequel on voit l'amas; on y peut mesurer un diamètre apparent et, connaissant la distance de l'observateur à l'amas (ou à la sphère de séparation), on peut connaître le diamètre de cette sphère et par suite  $\theta_0$ .

Il y a dès lors 2 possibilités,  $a$  étant connu: ou bien le centre de  $E_a$  est sur «l'axe de révolution»<sup>8)</sup> à une distance supérieure à  $b$ , ou il est à une distance inférieure à  $b$  du centre de  $E_b$ . Dans le premier cas,  $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$ , dans le second,  $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ ; on a d'ailleurs

$$\sin \varphi_0 = \frac{a}{b} \sin \theta_0.$$

Or

$$d = b \cos \theta_0 \pm a \cos \varphi_0,$$

c'est-à-dire si  $\theta_0$  est petit:

$$d = b \pm a \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \theta_0^2}.$$

Tout cela suppose que

$$\frac{a^2}{b^2} \theta_0^2 \leq 1$$

ou

$$\frac{\rho_b}{\rho_a} \leq \frac{1}{\theta_0^2}.$$

Si la densité  $\rho_a$  est grande,  $\theta_0$  est petit et on peut imaginer des amas d'une densité telle que le passage de  $E_a$  à  $E_b$  ne soit pas possible. Ces amas sont hors de  $E_b$  ou à son intérieur; ils n'ont aucune relation avec  $E_b$ .

Dans ces univers on peut faire partout  $C = 1$ .

<sup>8)</sup> Cette façon de parler simplifie l'exposé, et on comprend sa signification par les considérations du début.

14. Peut-on continuer d'appliquer les considérations du chapitre II à de tels univers? Ces espaces accolés peuvent-ils se dilater homothétiquement? Remarquons que nous avons affaire à des univers  $U_0$ ; cependant l'équation (17) montre que les rayons des morceaux d'espace varient d'une façon qui change quand on passe d'une région à l'autre puisque  $\lambda$  change. L'espace total ne resterait pas homothétique à lui-même, mais si les rayons sont devenus très grands, leurs dérivées par rapport au temps ont même partie principale

$$\sqrt{-\frac{\lambda_a a^2}{3}} = \sqrt{-\frac{\lambda_b b^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

et l'on pourrait dire que la variation homothétique pour chaque région est asymptotiquement la même pour les deux régions.

Il serait souhaitable que l'on fît des applications de ces  $ds^2$  discontinus à l'étude des amas globulaires ou des nébuleuses sphériques. Pour avoir une idée plus précise encore du voisinage et de l'intérieur des galaxies aplaties, il conviendrait d'étudier des  $ds^2$  dont l'espace fût applicable sur des variétés possédant une symétrie moins complète.

(Reçu le 15 mai 1931)