

# Die geometrischen Komponenten (ein Beitrag zur Punkt- und Vektorrechnung).

Autor(en): **Nolfi, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **3 (1931)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4690>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Die geometrischen Komponenten

(Ein Beitrag zur Punkt- und Vektorrechnung)

Von P. NOLFI, Zürich

In der analytischen Geometrie wird durch die Einführung eines Koordinatensystems jedem Punkt- bzw. Vektorgebilde eine bestimmte Anzahl Zahlenwerte d. h. Komponenten zugeordnet. Neben diesen skalaren Komponenten, lassen sich noch andere Komponentenarten einführen, die nicht mehr Zahlen sind, sondern geometrische Größen, im übrigen aber weitgehend dieselben Eigenschaften besitzen wie die skalaren. Diese Art Größen einzuführen und zu zeigen, daß sie in der Geometrie interessante Resultate liefern und in der Physik wertvolle Dienste leisten können, ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit. Bei diesen Untersuchungen bedienen wir uns der Terminologien des geometrischen Kalküls in enger Anlehnung an die Graßmannsche Ausdehnungslehre. Alle Entwicklungen sind so gestaltet, daß sie sowohl für Punkt- als auch für Vektorgebilde gelten.

## § 1. Begriff der allgemeinen Komponenten

In einem projektiven Hauptgebiet  $n$ -ter Stufe legen wir mit Hilfe von  $n$  voneinander unabhängig gewählten Punkten bzw. Vektoren ein Koordinatensystem fest. Unter geometrischen Größen oder Extensen verstehen wir dann solche Größen, die sich linear aus den Einheiten irgend welcher Stufe des Koordinatensystems ableiten lassen.

Im gewählten Koordinatensystem führen wir eine eindeutige Zuordnung einander dualer Größen ein. Zu jeder Einheit  $\varepsilon$   $r$ -ter Stufe ordnen wir die das System ergänzende Einheit  $(n-r)$ -ter Stufe zu. Diese letzte Größe nennen wir die Ergänzung der ersten und schreiben dafür abgekürzt:  $\varepsilon'$  <sup>1)</sup>. Sind  $e_1, e_2 \dots e_n$  die Einheiten erster Stufe, so verlangen wir allgemein:

$$[\varepsilon \varepsilon'] = [e_1 e_2 e_3 \dots e_n] = 1.$$

---

<sup>1)</sup> Vergl. *A. Lotze*: Die Graßmannsche Ausdehnungslehre. Encyclopädie der math. Wissenschaften. Bd. III Ab. 11.

Damit ist auch die Orientierung im Koordinatensystem eindeutig festgelegt. Ganz analog würde man bei einem zweiten und dritten Koordinatensystem des Hauptgebietes verfahren.

Damit keine Verwechslungen entstehen, ist noch ausdrücklich hervorzuheben, daß mit dieser Zuordnung einander dualer Elemente noch keine Metrik eingeführt wird. Die Zuordnung in einem Bezugssystem ist unabhängig von derjenigen aller andern.

Die Resultate der drei ersten Paragraphen gelten somit ganz allgemein für den projektiven Raum unabhängig von jeglicher Metrik. Es handelt sich also hier um Beziehungen von geometrischen Größen zu einem Bezugssystem, die unabhängig davon sind, ob dieses letztere auf Grund einer Metrik „orthogonal“ oder „schiefwinklig“ erscheint.

Es sei  $A$  eine Extense im Hauptgebiet und  $\varepsilon$  eine bekannte Einheit des gewählten Bezugssystems. Die Stufen von  $A$  und  $\varepsilon$  können beliebig sein im allgemeinen aber verschieden voneinander.

Als Komponente von  $A$  nach  $\varepsilon$  definieren wir folgende Größe:

$$1) \quad P = [A \varepsilon'].$$

Dieses Produkt ist im allgemeinen eine geometrische Größe. Nur im Falle wo  $A$  und  $\varepsilon$  Extensen gleicher Stufe sind, erhalten wir in  $[A \varepsilon']$  eine Zahl.

Im Falle der dreidimensionalen Vektorrechnung zum Beispiel hat man für den Vektor:  $a = l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3$  folgende Komponenten:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & l_i = [a e_i'] \\ \text{b)} \quad & P_i = [a \varepsilon_i']; \quad \varepsilon_i = e_j e_k \\ & \quad \quad \quad i \neq j \neq k. \end{aligned}$$

Die ersten sind skalare Größen und tatsächlich identisch mit den skalaren Komponenten des Vektors  $a$ . In b) kommen neu hinzu die geometrischen Komponenten des Vektors  $a$ , deren Eigenschaften wir eingehender untersuchen wollen.

## § 2. Die Zerlegungsformeln

In einem Koordinatensystem eines  $n$ -stufigen Hauptgebietes lassen sich  $n - 1$  Einheiten verschiedener Stufe unterscheiden. Jede Stufe  $r$  ist vertreten durch  $\binom{n}{r}$  Einheiten. Dementsprechend besitzt jede be-

liebige geometrische Größe  $r$ -ter Stufe auch  $\binom{n}{r}$  skalare Komponenten, die in der geforderten linearen Beziehung der Größe zum Bezugssystem auftreten. Während hier die Zerlegung nur nach den Einheiten  $r$ -ter Stufe erfolgen kann, ermöglichen die geometrischen Komponenten auch eine Zerlegung nach allen übrigen Einheiten. Dabei treten an Stelle der skalaren Komponenten die geometrischen auf.

Zunächst wollen wir wieder die Verhältnisse am Beispiele des dreidimensionalen Raumes illustrieren.

Im Falle a) wird:

$$a = e_1 [a e_1'] + e_2 [a e_2'] + e_3 [a e_3'].$$

Im Falle b) erhält man durch Multiplikation der Komponenten mit den entsprechenden Einheiten und unter Anwendung der Regel des doppelten Faktors:

$$2 a = \varepsilon_1 [a \varepsilon_1'] + \varepsilon_2 [a \varepsilon_2'] + \varepsilon_3 [a \varepsilon_3'].$$

Mit Ausnahme des Faktors 2 ist diese Gleichung hinsichtlich der Form mit derjenigen unter a) gleich. Es muß hier beachtet werden, daß die Komponenten hinter den Einheiten zu schreiben sind, da im Falle b) sonst das negative Vorzeichen auftreten würde.

Dasselbe hat man für die Zerlegung in einem Hauptgebiet  $n$ -ter Stufe. Sind  $n_1$  und  $n_2$  die Stufen von  $A$  bzw.  $\varepsilon$ , so gilt folgende allgemeine Grundgleichung:

$$2) \quad \binom{n_1}{n_2} A = \varepsilon_1 [A \varepsilon_1'] + \varepsilon_2 [A \varepsilon_2'] + \dots + \varepsilon_p [A \varepsilon_p'], \quad p = \binom{n}{n_2}.$$

Zum Beweise setzen wir vorläufig voraus  $n_1 > n_2$  und zerlegen  $A$  in ihre skalaren Komponenten.

$$A = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + \dots + l_q \alpha_q, \quad q = \binom{n}{n_1}.$$

$\alpha_i$  sind die Einheiten des Koordinatensystems gleicher Stufe wie  $A$ .

In 2) eingesetzt erhalten wir  $q$  Gleichungen von der Form:

$$\binom{n_1}{n_2} \alpha_i = \varepsilon_1 [\alpha_i \varepsilon_1'] + \varepsilon_2 [\alpha_i \varepsilon_2'] + \dots + \varepsilon_p [\alpha_i \varepsilon_p'].$$

Da die Stufe von  $\alpha_i$  größer ist als die von  $\varepsilon_j$ , können wir folgendes Verbindungsprodukt hinschreiben:  $\alpha_i = \varepsilon_j \sigma_i$  für alle diejenigen  $\varepsilon_j$ , die im Koordinatenraum  $\alpha_i$  enthalten sind.

Für solche hat man weiter:  $[\alpha_i \alpha_i'] = [\varepsilon_j \sigma_i \alpha_i'] = 1$  und andererseits  $[\varepsilon_j \varepsilon_j'] = 1$ . Also wird:  $\varepsilon_j' = \sigma_i \alpha_i'$  und damit erhalten wir:

$$[\alpha_i \varepsilon_j'] = \varepsilon_j \sigma_i \times \sigma_i \alpha_i' = \sigma_i [\alpha_i \alpha_i'] = \sigma_i.$$

Wie schon erwähnt gilt diese Umformung für alle diejenigen  $\varepsilon_j$ , die im Raume  $\alpha_i$  enthalten sind, d. h. für soviele als  $n_2$  Einheiten erster Stufe sich zu Einheiten  $n_1$ -ter Stufe kombinieren lassen. Für die übrigen Glieder  $\varepsilon_j$   $[\alpha_i \varepsilon_j']$  ist  $[\alpha_i \varepsilon_j'] = 0$ .

Weil  $\varepsilon_j$  nicht vollständig in  $\alpha_i$  liegt, hat  $\varepsilon_j'$  mehr als  $(n_1 - n_2)$  Stufen mit  $\alpha_i$  gemein, was zu einem Ueberschnitt führt.

Damit wird:

$$\sum_j \varepsilon_j [\alpha_i \varepsilon_j'] = \sum \varepsilon_j \sigma_i = \binom{n_1}{n_2} \alpha_i.$$

Die Summation in  $\sum \varepsilon_j \sigma_i$  ist über alle  $\varepsilon_i$ , die in  $\alpha_i$  enthalten sind, zu erstrecken. Ihre Anzahl ist:  $\binom{n_1}{n_2}$ . Womit Gleichung 2) bewiesen ist.

Der Fall  $n_1 < n_2$  ist zum vorliegenden dual. Die vorangehende Beweisführung bleibt auch für diesen Fall richtig, wenn wir uns die Größen  $\alpha_i$  und  $\varepsilon_j$  durch Hypereinheiten dargestellt denken. Die Vorzahl  $\binom{n_1}{n_2}$  geht dabei über in  $\binom{n - n_1}{n - n_2}$ . Da der Ausdruck  $\binom{n_1}{n_2}$  in diesem Fall als Anzahl von Kombinationen seinen Sinn verliert, können wir setzen:

$$\binom{n_1}{n_2} = \binom{n - n_1}{n - n_2}.$$

Damit bleibt Gleichung 2) in der oben hingeschriebenen Form allgemein gültig.

### § 3. Die Verjüngung

In diesem Paragraphen wollen wir einen allgemeinen Zusammenhang herleiten zwischen den Komponenten verschiedener Stufe einer und

derselben Größe. Wir erhalten damit ein allgemeines Gesetz, für die Rechnung mit solchen Komponenten, das wertvolle Dienste leisten kann.

Die Stufe von  $A$  sei  $s$ , dann gilt für die Zerlegung von  $A$  in ihre skalaren Komponenten die Gleichung:

$$A = \sum_i m_{i_1 i_2 \dots i_s} e_{i_1 i_2 \dots i_s}$$

mit:

$$m_{i_1 i_2 \dots i_s} = [A e'_{i_1 i_2 \dots i_s}].$$

Für das Folgende ist es gut zu bemerken, daß die Vertauschung zweier Indizes auf der rechten Seite der ersten Gleichung kein Vorzeichenwechsel nach sich zieht.

Besonders einfach gestaltet sich zunächst die Beziehung zwischen den geometrischen und den skalaren Komponenten. Aus der Zerlegung von  $A$  nach Einheiten  $r$ -ter Stufe greifen wir die folgende Komponente heraus:

$$[A e'_{p_1 p_2 \dots p_r}].$$

Durch Einsetzen von  $A$  erhalten wir:

$$[A e'_{p_1 p_2 \dots p_r}] = \sum_i m_{i_1 i_2 \dots i_s} [e_{i_1 i_2 \dots i_s} e'_{p_1 p_2 \dots p_r}].$$

Wir setzen voraus  $r < s$ , der Fall  $r > s$  ist zum vorliegenden dual. Damit wird  $[e_{i_1 i_2 \dots i_s} e'_{p_1 \dots p_r}]$  ein Schnittprodukt  $(s-r)$ -ter Stufe.

Damit dieses nicht verschwindet, muß:

$$e'_{p_1 \dots p_r} \quad \text{in} \quad e_{i_1 i_2 \dots i_s}$$

enthalten sein.

Alle übrigen Glieder verschwinden, da die Schnittfaktoren mehr als  $(s-r)$  gemeinsame Elemente besitzen.

Es bleibt noch:

$$[A e'_{p_1 p_2 \dots p_r}] = \sum_i m_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_s} [e_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_s} e'_{p_1 \dots p_r}].$$

Analog wie früher wird:

$$\begin{aligned} [e_{p_1 \dots p_r} e'_{p_1 \dots p_r}] &= [e_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_s} e'_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_s}] \\ e'_{p_1 \dots p_r} &= e_{i_{r+1} \dots i_s p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_s} \end{aligned}$$

und mit Hilfe der Regel des doppelten Faktors:

$$[e_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_s} e'_{p_1 \dots p_r}] = e_{i_{r+1} \dots i_s}.$$

Das Resultat lautet:

$$3) \quad [A e'_{p_1 \dots p_r}] = \sum_i m_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_s} e_{i_{r+1} \dots i_s}.$$

Eine geometrische Komponente  $r$ -ter Stufe erhält man aus den skalaren durch Summation über die restlichen  $(s-r)$  freien Indizes.

Auf ähnlichem Wege läßt sich auch der allgemeine Zusammenhang zwischen geometrischen Komponenten herleiten. Ausgehend von 3) schreiben wir:

$$[A e'_{p_1 \dots p_r}] = \sum_i m_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_t i_{t+1} \dots i_s} e_{i_{r+1} \dots i_t i_{t+1} \dots i_s}$$

und mit  $r < t < s$

$$[A e'_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_t}] = \sum_j m_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_t j_{t+1} \dots j_s} e_{j_{t+1} \dots j_s}.$$

Dabei erstreckt sich die Summe  $\sum_j$  über alle Einheiten  $(s-t)$ -ter Stufe des Koordinatensystems.

Wir multiplizieren die letzte Gleichung mit  $e_{i_{r+1} \dots i_t}$  und summieren auch über diese.

$$\begin{aligned} \sum_i e_{i_{r+1} \dots i_t} [A e'_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_t}] \\ = \sum_i \sum_j m_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_t j_{t+1} \dots j_s} e_{i_{r+1} \dots i_t} e_{j_{t+1} \dots j_s}. \end{aligned}$$

Die Produkte der beiden Einheiten  $e_{i_{r+1} \dots i_t}$   $(t-r)$ -ter und  $e_{j_{t+1} \dots j_s}$   $(s-t)$ -ter Stufe liefern die Einheiten  $e_{i_{r+1} \dots i_t i_{t+1} \dots i_s}$   $(t-r) + (s-t) = (s-r)$ -ter Stufe. Dabei ist zu beachten, daß durch die Summation über

die  $e_{i_{r+1} \dots i_t}$  und  $e_{j_{t+1} \dots j_s}$  man dieselbe Größe  $e_{i_{r+1} \dots i_t i_{t+1} \dots i_s}$  mehrmals erhält; entsprechend der Tatsache, daß sich aus  $e_{i_{r+1} \dots i_t i_{t+1} \dots i_s}$  im ganzen  $\binom{s-r}{s-t} = \binom{s-r}{t-r}$  verschiedene Produkte  $e_{i_{r+1} \dots i_t} e_{j_{t+1} \dots j_s}$  bilden lassen.

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_j m_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_t j_{t+1} \dots j_s} e_{i_{r+1} \dots i_t} e_{j_{t+1} \dots j_s} \\ &= \binom{s-r}{s-t} \sum_i m_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_s} e_{i_{r+1} \dots i_s} \\ &= \binom{s-r}{s-t} [A e'_{p_1 \dots p_r}]. \end{aligned}$$

Somit gilt folgende interessante Grundbeziehung:

$$4) \quad \binom{s-r}{s-t} [A e'_{p_1 \dots p_r}] = \sum_i e_{i_{r+1} \dots i_t} [A e'_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_t}].$$

Man erhält eine Komponente nach einer Einheit niederer Stufe aus derjenigen nach einer Einheit höherer Stufe durch Summation über die  $(t-r)$  freien Indizes und Multiplikation der ersten mit der Zahl:  $\binom{s-r}{s-t}$ . Eine derartige Summation wollen wir in Anlehnung an die Tensorrechnung Verjüngung nennen.

Diese allgemeine Eigenschaft der geometrischen Komponenten bleibt auch erhalten, wenn  $t$  größer  $s$  wird. Die Vorzahl geht dabei über in

$$\binom{s-r}{s-t} = (-1)^{r(t-s)} \binom{n-s}{t-s}.$$

#### § 4. Die Zerlegung nach einem Unterraum

Die zuletzt erhaltenen Resultate können wir bei den folgenden Untersuchungen verwerten. Bis dahin war immer die Rede von der Zerlegung einer geometrischen Größe im Operationsraum selbst. Im Gegensatz dazu wollen wir jetzt einen Unterraum des Hauptgebietes ins Auge fassen

und zeigen, in welcher Weise eine vorgegebene Größe des Hauptgebietes nach den Einheiten dieses Unterraumes zerlegt werden kann.

Von einem vorgegebenen Bezugssystem entfallen auf das betrachtete Untergebiet  $u$ -ter Stufe  $u$  Eckpunkte oder  $u$  Einheitsvektoren, die wir mit  $e_1, e_2, e_3 \dots e_u$  bezeichnen wollen. In diesem Teilbezugssystem wollen wir eine partielle Ergänzung des Hauptgebietes einführen, die wir wie folgt festlegen: Ist  $\varepsilon$  eine Einheit erster oder auch höherer Stufe des Teilbezugssystems, so soll  $\bar{\varepsilon}$  die partielle Ergänzung von  $\varepsilon$  heißen, falls sie der Gleichung genügt:

$$[\varepsilon \bar{\varepsilon}] = [e_1 e_2 e_3 \dots e_u] = U.$$

$U$  ist dabei eine geometrische Größe, sie wird gleich 1 für  $u = n$ .

Aehnlich wie früher definieren wir als partielle Komponente einer Größe  $A$  allgemeiner Lage im Hauptgebiet nach einer Einheit  $\varepsilon$  des Untergebietes mit:

$$5) \quad \bar{P} = [A \bar{\varepsilon}].$$

Es ist nun besonders interessant, daß die früher für das Hauptgebiet abgeleiteten Grundbeziehungen sich entsprechend erweitern lassen. Wir wollen uns darauf beschränken, die zur Grundgleichung 2) entsprechende Zerlegungsformel abzuleiten.

Ausgehend von der Gleichung 4) schreiben wir:

$$\begin{aligned} U &= e' p_1 p_2 \dots p_r \\ \varepsilon_k &= e_{i_{r+1} \dots i_t} \\ s - r &= q \\ t - r &= p. \end{aligned}$$

Weiter folgt aus:

$$\begin{aligned} [e_{p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_t i_{t+1} \dots i_n}] &= 1 \\ U &= [e_{i_{r+1} \dots i_t i_{t+1} \dots i_n}]. \end{aligned}$$

Definitionsgemäß ist:

$$U = [e_{i_{r+1} \dots i_t} \bar{e}_{i_{r+1} \dots i_t}],$$

somit:

$$e' p_1 \dots p_r i_{r+1} \dots i_t = e_{i_{t+1} \dots i_n} = \bar{e}_{i_{r+1} \dots i_t}.$$

Setzen wir die so erhaltenen Größen in 4) ein, so erhalten wir die folgende Zerlegungsgleichung:

$$6) \quad \binom{q}{p} [A U] = \sum_k \varepsilon_k [A \bar{\varepsilon}_k].$$

Die Summation erstreckt sich hier über alle  $\varepsilon_k$  die im Raume  $U$  enthalten sind.  $A$  ist eine Größe allgemeiner Lage des Hauptgebietes.

Für diese letzte Gleichung besteht nach dem letzten Paragraphen die Bedingung:  $r < t < s$  oder auch  $0 < t - r < s - r$  d. h.  $0 < p < q$ . Da die Stufe des Unterraumes gemäß der Ungleichung  $n - r > s - r$  d. h.  $u > q$  im allgemeinen größer höchstens gleich  $q$  ist, würde die letzte Zerlegungsgleichung nur für Einheiten  $\varepsilon_k$  deren Stufe  $p < q$  ist, gelten. Das Bezugssystem des Untergebietes kann aber noch Einheiten enthalten deren Stufe zwischen  $q$  und  $u$  liegen. Der Fall  $p > q$  führt zu  $t > s$  (vergl. Seite 251). Andererseits ist die Umformung von Gleichung 4) zu Gleichung 6) unabhängig von der Stufe  $s$  der Größe  $A$ . Somit bleibt 6) bis zur Vorzahl auch im Falle  $t > s$  erhalten. Für die Vorzahl erhalten wir:

$$\binom{q}{p} = \binom{u - q}{u - p} (-1)^{(p-q)(n-u)}.$$

Es bliebe noch der Fall  $r > s$ , der, wie schon bemerkt zum vorliegenden dual ist, und dargestellt mit Hilfe der Hypereinheiten zu demselben Resultat führen würde.

Schließlich wollen wir noch die Spezialfälle besprechen, die hier von besonderem Interesse sind:

1. Fall: Für  $u = n$  erhält man wieder mit  $\lim [A U] = A$  für  $u = n$  Gleichung 2).

2. Fall: Für  $q = p$  wird

$$7) \quad [A U] = \varepsilon_k [A \bar{\varepsilon}_k].$$

Wir bemerken zunächst, daß die Komponenten skalare Größen werden. Aus  $q = p$  folgt  $s + u - p = n$ . Da die skalaren Komponenten unter den allgemeinen eine ausgezeichnete Rolle spielen ist Gleichung 7) von besonderer Bedeutung. In der Literatur ist sie als Identität in einer etwas anderen Schreibweise bereits bekannt. (Vergl. Graßmann Werke I 2, Seite 83).

## § 5. Uebergang zum metrischen Raum

Wie bereits erwähnt gelten die vorangehenden Resultate allgemein für den projektiven Raum. Mit Hilfe einer nicht ausgearteten quadratischen Form führen wir im betrachteten Hauptgebiet eine Metrik ein. Dann wird umkehrbar eindeutig jedem Gebilde  $A$  des Raumes ein bestimmtes duales zugeordnet. Das zweite ist die Ergänzung des ersten, man schreibt dafür  $/A$  <sup>2)</sup>. Damit wird auch jeder Einheit  $\varepsilon$  eines Koordinatensystems eine duale Größe  $/\varepsilon$  zugeordnet. Im allgemeinen ist  $/\varepsilon$  von  $\varepsilon'$  verschieden.

Für die Normalsysteme ist die Relation  $/\varepsilon = \varepsilon'$  jedoch erfüllt. In der Tat ist nach den orthogonalen Bedingungen:

$$\varepsilon_i / \varepsilon_j = \begin{matrix} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{„ } i \neq j \end{matrix}.$$

Damit erkennen wir, daß die Resultate der vorangehenden Untersuchungen erhalten bleiben, wenn wir für Normalsysteme die Größen  $\varepsilon'$  durch  $/\varepsilon$  ersetzen.

## § 6. Das innere Produkt

In der metrischen Geometrie tritt zur äußeren Multiplikation die innere hinzu. Aehnlich wie die äußere in der projektiven erlaubt die innere Multiplikation in der metrischen Geometrie alle Beziehungen (Abstand u. s. w.) geometrischer Gebilde zueinander direkt mit Hilfe der Größen selbst darzustellen. Von besonderer Bedeutung ist das innere Produkt zweier Größen gleicher Stufe. Ein solches Produkt ist kommutativ und liefert als Resultat eine skalare Größe. Wir wollen eine derartige Verknüpfung ein skalares Produkt nennen.

Während bei der äußeren Multiplikation die explizierte Darstellung eines Produktes in skalare Komponenten mit Hilfe der Determinanten-Bildungen einfach geschehen kann, fehlt ein entsprechendes Bildungsgesetz bei der inneren Multiplikation. Die geometrischen Komponenten in Verbindung mit dem Verjüngungsprozeß gestatten diese Lücke weitgehend auszufüllen.

Zunächst läßt sich ein sehr allgemeines Gesetz für die Darstellung eines inneren Produktes in geometrischen Komponenten herleiten. Es

---

<sup>2)</sup> Vergl. *A. Lotze*. „Punkt- und Vektorrechnung“ Seite 71. (Göschens Lehrbücherei Bd. 13.)

ist bekannt, daß ein skalares Produkt bezogen auf ein Normalsystem sich als bilineare Normalform der skalaren Komponenten darstellen läßt. Diese Eigenschaft bleibt für die allgemeinen Komponenten erhalten, und darüber hinaus gilt sie nicht allein für skalare, sondern für innere Produkte überhaupt. Die einzige Voraussetzung ist, daß die Zerlegung der Faktoren nach denselben Koordinateneinheiten erfolge.

Zum Beweise berechnen wir das innere Produkt zweier Größen  $A$  und  $B$  von den Stufen  $s_1$  und  $s_2$ , deren Komponenten nach den beliebig gewählten Einheiten  $\varepsilon_i$   $p$ -ter Stufe wir als bekannt voraussetzen. Mit den Hilfsgrößen  $\alpha_i$  und  $\beta_j$  wollen wir die Einheiten gleicher Stufe wie  $A$  bzw.  $B$  bezeichnen. Für die Stufen der eingeführten Größen soll vor derhand folgende Bedingung  $p < s_2 < s_1$  gelten.

Damit wird:

$$[A | B] = \sum_{i,j} [\alpha_i | \beta_j] [A | \alpha_i] [B | \beta_j].$$

$[A | \alpha_i]$  und  $[B | \beta_j]$  sind Zahlen und können beliebig vertauscht werden. Soll das Schnittprodukt  $[\alpha_i | \beta_j]$  nicht verschwinden, so muß  $\beta_j$  in  $\alpha_i$  ganz enthalten sein. Die Restglieder von  $\alpha_i$  liefern alsdann den Schnitt. Mit  $\alpha_i = \beta_j \sigma_k$  erhält man:

$$[\alpha_i | \beta_j] = [\beta_j \sigma_k | \beta_j].$$

Aus der Identität  $[\beta_j \sigma_k | \beta_j \sigma_k] = 1$  folgt:  $[\beta_j = \sigma_k | \beta_j \sigma_k$

$$[\alpha_i | \beta_j] = [\beta_j \sigma_k \times \sigma_k | \beta_j \sigma_k] = \sigma_k [\beta_j \sigma_k | \beta_j \sigma_k]$$

und damit wird schließlich:

$$a) \quad [A B] = \sum_{k,j} \sigma_k [A | \beta_j \sigma_k] [B | \beta_j].$$

Andererseits erhält man aus den skalaren Komponenten von  $A$  durch Verjüngung:

$$A_i = [A | \varepsilon_i] = \sum_e \gamma_e [A | \varepsilon_i \gamma_e]$$

$$B_i = [B | \varepsilon_i] = \sum_m \delta_m [B | \varepsilon_i \delta_m]$$

$$\sum_i [A_i | B_i] = \sum_i \sum_{e,m} [\gamma_e | \delta_m] [A | \varepsilon_i \gamma_e] [B | \varepsilon_i \delta_m].$$

$\gamma_e$  und  $\delta_m$  sind dabei die Einheiten  $(s_1 - p)$ -ter bzw.  $(s_2 - p)$ -ter Stufe des Bezugssystems.

Die Stufe des Schnittproduktes  $[\gamma_e | \delta_m]$  ist wieder  $s_1 - s_2$ . Durch analoge Schlüsse wie oben erhält man:

$$\sum_i [A_i / B_i] = \sum_i \sum_{k \in m} \sigma_k [A / \varepsilon_i \gamma_e] [B / \varepsilon_i \delta_m]$$

mit:  $\gamma_e = \delta_m \sigma_k$ .

In der letzten Gleichung auf der rechten Seite erhält man immer  $\binom{s_2}{p}$  gleiche Summanden. In der Tat kann man zu jedem Wert von  $\sigma_k$  stets  $\binom{s_2}{p} = \binom{s_2}{s_2 - p}$  Werte für  $\varepsilon_i$  bzw.  $\delta_m$  so wählen, daß das Produkt  $\varepsilon_i \delta_m$  gleich bleibt. Denken wir uns alle diese Summanden zusammengefasst, so bleibt über die verschiedenen Werte von  $\varepsilon_i \delta_m$  zu summieren. Die verschiedenen Produkte  $\varepsilon_i \delta_m$  sind aber nichts anders als die Einheiten:  $\beta_j$ . Damit wird:

$$b) \quad \sum_i [A_i B_i] = \binom{s_2}{p} \sum_{kj} \sigma_k [A / \beta_j \sigma_k] [B / \beta_j].$$

Aus a) und b) folgt die interessante Beziehung:

$$8) \quad \binom{s_2}{p} [A/B] = \sum_i [A_i / B_i].$$

Gleichung 8) bleibt auch noch im Falle:  $s_2 < p < s_1$  mit der Vorzahl:

$$\binom{s_2}{p} = (-1)^{(p-s_2)(n-p_1)} \binom{s_1 - s_2}{s_1 - p}$$

und im Falle:  $s_2 < s_1 < p$  mit der Vorzahl:

$$\binom{s_2}{p} = (-1)^{(s_1-s_2)(n-p)} \binom{n-s_1}{n-p} \text{ erhalten.}$$

Alle übrigen Fälle sind zu den vorangehenden dual.

*Spezialfälle:* 1. Fall. Für  $p = s_2$  wird mit  $\beta_i = \varepsilon_i$  und  $B = \sum_i l_i \varepsilon_i$   $[A/B] = A_i l_i$ . Eine Gleichung die unmittelbar durch einsetzen von

$\sum_i l_i \varepsilon_i$  in  $[A/B]$  bestätigt werden kann. Aus ihr erhält man durch Verjüngung von  $A_i$  in skalaren Komponenten:  $A_i = \sum_e \gamma_e [A/\varepsilon_i \gamma_e]$

$$[A/B] = \sum_{ie} \gamma_e [A/\varepsilon_i \gamma_e] l_i.$$

Vertauscht man  $\gamma_e$  und  $\varepsilon_i$  in  $[A/\varepsilon_i \gamma_e]$  so folgt:

$$[A/B] = (-1)^{s_1 s_2} \sum_{ie} \gamma_e [A/\gamma_e \varepsilon_i] l_i.$$

$[A/\gamma_e \varepsilon_i]$  sind dabei die skalaren Komponenten von:  $[A/\gamma_e] = A_e$ . Denken wir uns hier die Summation bei jeweils festem  $e$  durchgeführt, so erhalten wir in:

$$\sum_i [A/\gamma_e \varepsilon_i] l_i = [A_e / B] = (A_e B)$$

ein skalares Produkt. Damit wird:

$$9) \quad [A/B] = \sum_e \gamma_e (A_e B) (-1)^{s_1 s_2}.$$

$(A_e B)$  sind die skalaren Komponenten des inneren Produktes. Gleichung 9) liefert somit ein einfaches Gesetz zur Berechnung der skalaren Komponenten eines inneren Produktes. Sie kann auch unmittelbar bestätigt werden durch direkte Zerlegung von  $[A/B]$ .

2. Fall: Für  $s_1 = s_2$  geht das innere Produkt über in ein skalares

$$(AB) = \sum_i (A_i B_i).$$

Die Glieder  $(A_i B_i)$  sind ebenfalls skalare Größen und zwar für jede beliebige Wahl der Komponenten.

Lassen wir noch insbesondere  $A = B$  werden, so erhalten wir für die Maßzahl von  $A$  den Ausdruck:

$$|A| = \sqrt{(AA)} = \sqrt{\sum_i (A_i A_i)},$$

eine Gleichung, die eine Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes darstellt.

## § 7. Anwendungen in der Physik

Die allgemeinen Komponenten können den Uebergang vermitteln von einem Hauptgebiet zu den Unterräumen. In der Physik ist es häufig von Nutzen die Wirkung eines Vektorfeldes auf einem besonderen Unterraum kennenzulernen. Geometrisch kann dies mit Hilfe der allgemeinen Komponenten geschehen, indem man die Komponenten des Feldes nach diesem Unterraum bildet, oder die das Feld beschreibende geometrische Größe nach einem im Unterraum gewählten Koordinatensystem zerlegt.

Es scheint sich immer mehr zu bestätigen, daß sich die Ereignisse der physikalischen Welt in Räumen von höheren Dimensionen abspielen, während unsere Sinneswahrnehmung auf eine Außenwelt von drei Ausdehnungen beschränkt bleibt. Dementsprechend wäre auch alles, was wir messen können zum Teil wenigstens Komponenten von mehrdimensionalen Gebilden.

Der Gedanke einer mehrdimensionalen objektiven Welt hat sich bekanntlich erstmals durch die berühmten Abhandlungen von Minkowski über die Theorie des elektromagnetischen Feldes bestätigt<sup>3)</sup>. Man hat dann mehrfach hingewiesen, wie diese Theorie mit Hilfe der verschiedenen Hilfsmittel (Vektoren, Tensoren, Quaternionen u. s. w.) einfach und anschaulich entwickelt werden kann.

Wenn wir noch einmal hier zurückgreifen, so geschieht dies den in dieser Arbeit eingeführten Komponenten zuliebe. In der Tat erlauben diese, der genannten Theorie bedeutend weitgehender gerecht zu werden, als dies bis dahin geschehen konnte.

Eine übersichtliche Zusammenfassung dieser Theorie findet man bei Felix Klein „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert“ II. Teil Kap. 2. Der Kürze wegen setze ich im folgenden diese Entwicklungen als bekannt voraus.

In einem vierdimensionalen linearen Vektorraum als Hauptgebiet führen wir folgende Extensen ein:

Die Komplexgrößen oder Sechservektoren:

$$f = H_1 e_2 e_3 + H_2 e_3 e_1 + H_3 e_1 e_2 + i E_1 e_1 e_4 + i E_2 e_2 e_4 + i E_3 e_3 e_4$$

$$F = |f = i E_1 e_2 e_3 + i E_2 e_3 e_1 + i E_3 e_1 e_2 + H_1 e_1 e_4 + H_2 e_2 e_4 + H_3 e_3 e_4,$$

die Viererdichte:

$$p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4$$

<sup>3)</sup> Mathematische Annalen Bd. 68 (1910).

und den Differentialoperator:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_3 + \frac{\partial}{\partial x_4} e_4, \quad x_4 = ict.$$

Auf diesen vier Größen wenden wir die in den vorangehenden Paragraphen entwickelte Algebra der geometrischen Komponenten an, und zeigen daß wir auf diese Weise direkt die Maxwell'sche Theorie des elektromagnetischen Feldes erhalten.

Zerlegt man die beiden Sechservektoren  $f$  bzw.  $F$  nach dem durch die Einheiten  $e_1, e_2, e_3$  aufgespannten dreidimensionalen Raum, so wird nach 7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} [e_1 e_2 e_3] f &= E_1 e_1 + E_2 e_2 + E_3 e_3 \\ [e_1 e_2 e_3] F &= H_1 e_1 + H_2 e_2 + H_3 e_3. \end{aligned}$$

Diese räumlichen Vektoren deuten wir als die Vektoren der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke eines elektromagnetischen Feldes.

Gemäß Gleichung 2) wird:

$$2f = \sum_i e_i [f/e_i] = \sum_i e_i f_i \quad \text{und} \quad 2F = \sum_i e_i [F/e_i] = \sum_i e_i F_i.$$

Die Komponenten  $[f/e_i]$  bzw.  $[F/e_i]$  sind Vektoren erster Stufe. Sie spielen in der ganzen Theorie eine ausgezeichnete Rolle. Sommerfeld konstruiert sie in explizierter Darstellung aus den skalaren Komponenten der Sechservektoren selbst. Es ist noch interessant zu bemerken, daß Sommerfeld diese Vektoren aus Analogiegründen als die Komponenten des bezüglichen Sechservektors nach den Achsen bezeichnet<sup>4)</sup>. Die implizierte Darstellung dieser Größen dürfte hier zum erstenmal erscheinen. Gemäß Gleichung 9) erhält man weiter:

$$[f/\nabla] = \sum_i (\nabla f_i) e_i \quad \text{und} \quad [F/\nabla] = \sum_i (\nabla F_i) e_i.$$

Für den leeren Raum ist  $[F/\nabla] = 0$  und  $[f/\nabla] = 0$  zu setzen, was das Verschwinden aller Komponenten nach sich zieht. Diese Gleichungen

<sup>4)</sup> Annalen der Physik 4. F. Bd. 32 (1910).

sind schon die Maxwell'schen Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} (\nabla f_1) = (\nabla f_2) = (\nabla f_3) = 0 &\equiv \text{curl } H = \frac{\dot{E}}{c} \\ (\nabla f_4) = 0 &\equiv \text{div } E = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla F_1) = (\nabla F_2) = (\nabla F_3) = 0 &\equiv \text{curl } E = -\frac{\dot{H}}{c} \\ (\nabla F_4) = 0 &\equiv \text{div } H = 0. \end{aligned}$$

Sind im Raume Ladungen vorhanden, so ist  $[f/\nabla] = \rho$  und  $[F/\nabla] = 0$  zu setzen.

Mit 9) erhält man weiter:

$$(f/\rho) = \sum_i (f_i/\rho) e_i.$$

Dieser Ausdruck liefert die Kraft des Feldes. Die räumlichen Komponenten  $(f_i/\rho)$   $i = 1, 2, 3$  liefern die dynamische Komponente der Kraft nach dem Lorentz'schen Kraftansatz, die zeitliche  $i = 4$  die energetische Komponente der Kraft oder die pro Volumeneinheit geleistete elektrische Arbeit.

Endlich können wir noch die Einheitsvektoren  $f_i$  selbst mit  $f$  vereinigen und erhalten vier Vektoren von der Form:

$$[f/f_i], \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \text{ und } 4.$$

Sie sind nichts anderes als die Zeilenvektoren eines Zehnertensors, dies folgt aus der Tatsache, daß die Größen  $(f_j f_i) = (f_i f_j)$  symmetrisch sind. (Vergl. Klein, Bd. II, Seite 83.) Analog bestimmen die Vektoren  $[F/F_i]$  einen zweiten Zehnertensor. Aus ihnen läßt sich ein weiterer für die elektromagnetische Theorie besonders wichtiger Tensor konstruieren.

$$T_i = \frac{1}{2} \{ [F/F_i] - [f/f_i] \}.$$

Die Raum-Raum Komponenten ergeben die Maxwell'schen Spannungen des Mediums, die Raum-Zeit Komponenten den elektromagnetischen Impuls und die Zeit-Zeit Komponenten die spezifische Energie.

Die Vektordivergenz dieses Tensors verschwindet. Wir können dies auf folgende einfache Art zum Ausdruck bringen:

$$(\nabla T_i) = 0.$$

Für  $i = 1, 2$  und  $3$  erhalten wir die Impulssätze und für  $i = 4$  den Energiesatz.

Während in der gewöhnlichen Schreibweise diese Sätze oft zu recht komplizierten Ausdrücken führen, gestalten sie sich hier besonders einfach. Die ganze Theorie wird dadurch anschaulicher, da sich ihre Entwicklung auf die bekannten Regeln der Vektorrechnung stützt.

(Eingegangen den 21. Juli 1931)