

# Ueber automorphe Funktionen der Picard'schen Gruppe I.

Autor(en): **Fueter, Rud.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **3 (1931)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4677>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Ueber automorphe Funktionen der Picard'schen Gruppe I

Von RUD. FUETER, Zürich

In einer früheren Arbeit habe ich Funktionen dreier Variabler aufgestellt<sup>1)</sup>, die gegenüber einer in der Ebene uneigentlich diskontinuierlichen Gruppe automorph sind. Im folgenden untersuche ich diese Funktionen näher. Ich beschränke mich dabei auf die *Picard'sche* Gruppe, hebe aber ausdrücklich hervor, daß die Ausführungen ohne Schwierigkeit auch auf jede andere Gruppe ausgedehnt werden können. Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich allerdings aus dem Umstande, daß die Zusammenhangsverhältnisse des Diskontinuitätsraumes (D. R.) der *Picard'schen* Gruppe besonders einfach sind, und am weitgehendsten denjenigen des Diskontinuitätsbereiches der Modulgruppe in der Ebene entsprechen. Ich beschränke mich im folgenden auch auf den dreidimensionalen Raum, trotz Einführung der Quaternionen, da sich die vierte Dimension nicht als notwendig erwiesen hat, und da so die Anschauung vollständig gewahrt bleiben kann. Doch kann alles auch in gleicher Weise mit der vierten Variablen durchdacht werden.

In dem vorliegenden ersten Teile der Untersuchungen werden die Symmetrieverhältnisse, die Differenzierbarkeit der Komponenten der Funktion, sowie ihr Verhalten bei der Annäherung an den im Unendlichen liegenden Eckpunkt, d. h. in den rationalen Punkten der komplexen Ebene angegeben. Letzteres ergibt sich durch wesentliche Verwendung der Transformationsformel der von *Hecke* benutzten Thetafunktionen, die zum Körper  $k(\sqrt{-1})$  gehören. Sie führt auf *Bessel'sche Funktionen 3. Art*, deren asymptotisches Verhalten man genau kennt. Die Resultate lassen eine weitgehende, merkwürdige Analogie mit der Theorie der elliptischen Modulfunktion erkennen. Nicht nur bildet die betrachtete Funktion die ganze Umrandung des Diskontinuitätsraumes und ihrer Symmetrieebene auf eine Ebene ab, sondern sie nähert sich auch bei Annäherung an den im Unendlichen liegenden Eckpunkt einem bestimmten, von den beiden andern Koordinaten unabhängigen Werte.

---

<sup>1)</sup> Ueber automorphe Funktionen in Bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind. *Crelle's Journal*, Bd. 137 (1927), S. 66.

## 1. Die automorphe Funktion $f(z)$

Die Picard'sche Gruppe  $\mathfrak{G}$  enthalte die Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

wo also  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ganze Zahlen des Körpers  $k(\sqrt{-1})$  sind, die der Bedingung  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  genügen. Die imaginäre Einheit derselben werde als die Einheit  $i_1$  unter den Quaternionen Einheiten  $1, i_1, i_2, i_3$  gewählt. Die *reduzierte* Quaternionenvariable  $z = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2$  werde im  $012$ -Koordinatensystem des Raumes versinnbildlicht. Es bedeutet dann:

$$Sz = (\alpha z + \beta) (\gamma z + \delta)^{-1}$$

die bekannte, ursprünglich von *Poincaré* angegebene Raumtransformation, bei der Kugeln (Ebenen) wieder in Kugeln (Ebenen) übergehen. Transformiert man  $\mathfrak{G}$  mit:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & i_2 \\ i_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{G}' = s^{-1} \mathfrak{G} s,$$

und setzt:

$$s' = s^{-1} S s,$$

so führen alle Substitutionen  $s'$  die Einheitskugel in sich über, und, wegen  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , geht jeder Punkt des Innern derselben wieder in einen Punkt des Innern über. Zudem entspricht bezüglich  $s$  dem obern Halbraum dieses Innere der Einheitskugel. Die von mir aufgestellten Funktionen  $f'(z)$  haben dann die Eigenschaft, daß:

$$f'(s' z) = f'(z)$$

wird. Die Funktion:

$$f(z) = f'(s^{-1} z)$$

hat dann die Eigenschaft, daß:

$$f(Sz) = f'(s^{-1} Sz) = f'(s' s^{-1} z) = f'(s^{-1} z) = f(z)$$

wird, also ungeändert bleibt bei allen Substitutionen von  $\mathfrak{G}$ .  $f'(z)$  ist definiert als Quotient von zwei unendlichen, absolut konvergenten Reihen. Der Nenner konvergiert zugleich gleichmäßig in jedem, ganz im Innern der Einheitskugel liegenden Bereiche, der Zähler ebenfalls in jedem solchen Bereiche, der aber außerdem einen im Innern des D. R. von  $\mathfrak{G}'$  fest gegebenen Punkt  $\zeta'$  und alle seine äquivalenten Punkte nicht enthält. Der Nenner ist zudem reell. Setzt man in  $f'(z)$  an Stelle von  $z$  den Wert:

$$s^{-1} z = (z - i_2) (-i_2 z + 1)^{-1} = (z i_2 - 1)^{-1} (-z + i_2),$$

so ergibt die Rechnung, daß sich  $f(z)$  so darstellen läßt, wobei gemeinsame, reelle Faktoren des Zählers und Nenners weggelassen sind:

$$\left. \begin{aligned} T(z) &= \sum_{(S)} \frac{1}{n((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^k}, \\ R(z) &= \sum_{(S)} \frac{[(\alpha - i_2 \gamma) z + \beta - i_2 \delta] ((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^{-1} - \zeta'}{n((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^k}, \\ f(z) &= \frac{R(z)}{T(z)}, \quad f(Sz) = f(z), \quad S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \text{I.}$$

Die Summen sind über alle Substitutionen  $S$  von  $\mathfrak{G}$  zu erstrecken, und  $k$  bedeutet eine natürliche Zahl  $\geq 3$ .  $n(a) = a\bar{a}$  ist die Norm des Quaternions  $a$ .

Setzt man:

$$\zeta' = (\zeta - i_2) (-i_2 \zeta + 1)^{-1},$$

so ist  $\zeta$  sicherlich ein Punkt des obern Halbraumes und liegt im Innern des D. R. Die Reihen von  $f(z)$  sind dann absolut und gleichmäßig konvergent in jedem endlichen, ganz über der  $OI$ -Ebene gelegenen Raume  $\Omega$ , der weder  $\zeta$  noch einen seiner äquivalenten Punkte enthält. Setzt man also:

$$w = f(z) = u_0 + u_1 i_1 + u_2 i_2,$$

so sind  $u_0, u_1, u_2$  stetige und endliche Funktionen der drei Variablen  $x_0, x_1, x_2$  in  $\Omega$ .

Im folgenden werden wir uns mit dieser Funktion  $w = f(z)$  genauer beschäftigen.

## 2. Symmetrieeigenschaften

Wir wollen den D. R. von  $\mathfrak{G}$  durch die Bedingungen:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \cong 1, \quad 0 \cong x_0 \cong \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \cong x_1 < \frac{1}{2}, \quad (\text{siehe Fig. 1}),$$

festlegen. Die  $02$ -Ebene ist dann eine Symmetrieebene dieses D. R. Ferner wollen wir von der Umgrenzung desselben nur die Flächenstücke mit *negativem*  $x_1$  hinzunehmen. Denn zunächst ist wegen:

$$-i_1 z i_1^{-1} = i_1 z i_1 = -x_0 - x_1 i_1 + x_2 i_2, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -i_1 & 0 \\ 0 & i_1 \end{pmatrix},$$

jeder Punkt der  $12$ -Ebene seinem in bezug auf die  $2$ -Axe spiegelbildlichen äquivalent.

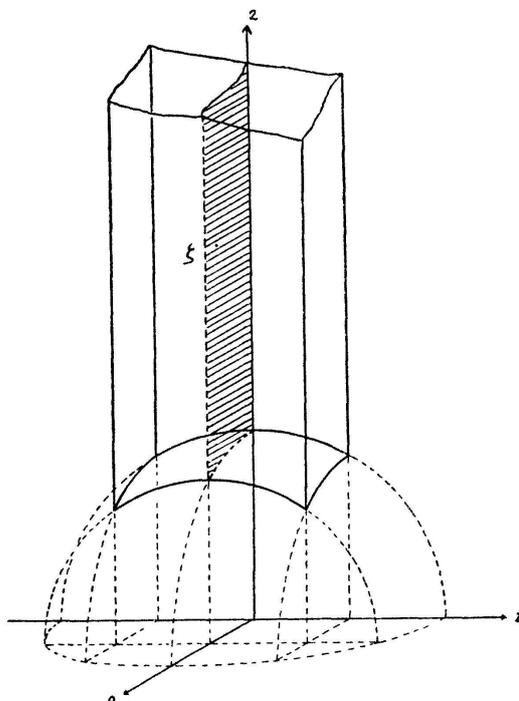


Fig. 1.

Ferner sind wegen  $S_2 z = z + i_1$ ,  $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & i_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , alle Punkte der Grenzfläche  $x_1 = -\frac{1}{2}$  dem Spiegelpunkt in bezug auf die  $02$ -Ebene äquivalent. Wegen:

$$(-i_1 z + i_1) i_1^{-1} = (-x_0 + 1) - i_1 x_1 + i_2 x_2,$$

ist jeder Punkt  $x_0 = \frac{1}{2}$  seinem Spiegelpunkt in bezug auf die  $02$ -Ebene äquivalent. Und schließlich ist für jeden Punkt der Einheitskugel:

$$i_1 (i_1 z)^{-1} = x_0 - x_1 i_1 + x_2 i_2$$

seinem Spiegelbild in bezug auf die  $o_2$ -Ebene äquivalent.

Wir wählen jetzt  $\xi$  im Innern dieses D. R. auf der  $o_2$ -Ebene. Dann ist auch  $\xi'$  ein Quaternion, das nur von den Einheiten  $1, i_2$  abhängt. Wir setzen:

$$\xi = z_0 + z_2 i_2, \quad \xi' = z'_0 + z'_2 i_2, \quad \text{wo } z_2 > \frac{1}{2} \sqrt{3}, \quad 0 < z_0 < \frac{1}{2}, \quad z_0^2 + z_2^2 > 1.$$

Wir wollen von nun an die Spiegelung an der  $o_2$ -Ebene durch einen Strich bezeichnen. Es sei also:

$$z' = x_0 - x_1 i_1 + x_2 i_2,$$

während der Querstrich stets die Konjugierte, also die Spiegelung um die  $o$ -Axe bedeute. Dann ist:

$$\begin{aligned} n((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta) &= n(-i_2((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta) i_2) \\ &= n((\bar{\gamma} - i_2 \bar{\alpha}) z' + \bar{\delta} - i_2 \bar{\beta}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 [(\alpha - i_2 \gamma) z + \beta - i_2 \delta] ((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^{-1} - \xi' & i_2^{-1} \\ = i_2 ((\alpha - i_2 \gamma) z + \beta - i_2 \delta) ((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^{-1} i_2^{-1} - \xi' \\ = ((\bar{\alpha} - i_2 \bar{\gamma}) z' + \bar{\beta} - i_2 \bar{\delta}) i_2 [(\bar{\gamma} - i_2 \bar{\alpha}) z' + \bar{\delta} - i_2 \bar{\beta}] i_2^{-1} - \xi' \\ = ((\bar{\alpha} - i_2 \bar{\gamma}) z' + \bar{\beta} - i_2 \bar{\delta}) ((\bar{\gamma} - i_2 \bar{\alpha}) z' + \bar{\delta} - i_2 \bar{\beta})^{-1} - \xi'. \end{aligned}$$

Somit wird:

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{(S)} \frac{1}{n((\bar{\gamma} - i_2 \bar{\alpha}) z' + \bar{\delta} - i_2 \bar{\beta})^k} \\ i_2 R(z) i_2^{-1} &= \sum_{(S)} \frac{[(\bar{\alpha} - i_2 \bar{\gamma}) z' + \bar{\beta} - i_2 \bar{\delta}] ((\bar{\gamma} - i_2 \bar{\alpha}) z' + \bar{\delta} - i_2 \bar{\beta})^{-1} - \xi'}{n((\bar{\gamma} - i_2 \bar{\alpha}) z' + \bar{\delta} - i_2 \bar{\beta})^k}. \end{aligned}$$

Nun ist aber auch:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$$

eine Substitution von  $\mathfrak{G}$ . Wenn also  $S$  alle Substitutionen von  $\mathfrak{G}$  durchläuft, so wird auch  $\bar{S}$  dasselbe tun. Somit ist:

$$\left. \begin{aligned} T(z) &= T(z'), \\ i_2 R(z) i_2^{-1} &= R(z'), \end{aligned} \right\} \text{ also } i_2 f(z) i_2^{-1} = f(z').$$

Nun ist aber:

$$i_2 f(z) i_2^{-1} = i_2 (u_0 + u_1 i_1 + u_2 i_2) i_2^{-1} = u_0 - u_1 i_1 + u_2 i_2 = f(z)',$$

und es folgt die grundlegende Symmetrieeigenschaft:

$$\underline{f(z')} = f(z) \quad \text{II.}$$

$$z' = x_0 - i_1 x_1 + i_2 x_2, \quad f(z)' = u_0 - i_1 u_1 + i_2 u_2.$$

**1. Satz:** *Punkten, die in bezug auf die 02-Ebene spiegelbildlich sind, entsprechen Funktionswerte, die ebenfalls in bezug auf die 02-Ebene spiegelbildlich sind.*

Nun nimmt nach dem obigen  $f(z)$  auch in bezug auf Punkte der Umgrenzung, die spiegelbildlich zur 02-Ebene liegen, gleiche Werte an. Denn diese Punkte sind äquivalent bezüglich der Gruppe  $\mathfrak{G}$ , und es gilt I. Da diese Werte zugleich spiegelbildlich sein müssen, so müssen sie auf der 02-Ebene selbst liegen. Dasselbe gilt für alle Punkte  $z$  auf der 02-Ebene selbst. Unsere Funktionen genügen also einem Spiegelungsprinzip.

**2. Satz:** *Die Umrandung, sowie die Symmetrieebene des D. R. der Gruppe  $\mathfrak{G}$  werden auf Punkte der 02-Ebene durch  $f(z)$  abgebildet.*

Wenden wir dieses Resultat auf die Funktionen  $u$  an, so sieht man:  $u_1(x_0, x_1, x_2)$  ist auf der 02-Ebene und auf der Umrandung des D. R.  $= 0$ ;

$$\begin{aligned} u_0(x_0, -x_1, x_2) &= u_0(x_0, x_1, x_2), \\ u_1(x_0, -x_1, x_2) &= -u_1(x_0, x_1, x_2), \\ u_2(x_0, -x_1, x_2) &= u_2(x_0, x_1, x_2), \end{aligned}$$

Dieses Resultat legt natürlich die Vermutung nahe, daß  $f(z)$  jede Symmetriehälfte des D. R. auf einen Halbraum abbildet.

Weitere, nicht so wichtige Symmetrien findet man auf dieselbe Weise. Es ist:

$$S_1 z = i_1 z i_1 = -x_0 - i_1 x_1 + i_2 x_2; \quad f(S_1 z) = f(z);$$

also:

$$f(-\bar{z}) = f(-x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2) = f(x_0 - i_1 x_1 + i_2 x_2) = f(z)'$$

Wird also in  $f(z)$  an Stelle von  $x_0$  der Wert  $-x_0$  eingesetzt, so ändern  $u_0$  und  $u_2$  sich nicht, dagegen wechselt  $u_1$  das Vorzeichen:

$$\begin{aligned} u_0(-x_0, x_1, x_2) &= u_0(x_0, x_1, x_2), \\ u_1(-x_0, x_1, x_2) &= -u_1(x_0, x_1, x_2), \\ u_2(-x_0, x_1, x_2) &= u_2(x_0, x_1, x_2). \end{aligned}$$

### 3. Die Differentialquotienten der $u$

Es fragt sich, ob die  $u$  partielle Differentialquotienten besitzen. Um einfacher zu schreiben, wollen wir unter dem partiellen Differentialquotient irgend einer Funktion  $w = u_0 + u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3$  verstehen.

$$\frac{\partial w}{\partial x_\nu} = \frac{\partial u_0}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_1}{\partial x_\nu} i_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_\nu} i_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_\nu} i_3, \quad \nu = 0, 1, 2.$$

Man sieht leicht, daß dann die Regel gilt:

$$\frac{\partial a w b}{\partial x_\nu} = a \frac{\partial w}{\partial x_\nu} b,$$

falls  $a, b$  konstante Quaternionen sind.

Wir denken uns jetzt um den Punkt  $\zeta(\zeta')$  eine Kugel von einem beliebig kleinen, aber festen Radius  $\rho(\rho')$  errichtet, und um jeden äquivalenten Punkt die äquivalente Kugel. Die Punkte dieser Kugeln schließen wir stets von der Betrachtung aus. Ferner denken wir uns einen beliebigen, ganz im obern Halbraum gegebenen endlichen Bereich  $\Omega$ . Für alle seine Punkte  $z$  sei  $x_2 \geq N > 0$ , wo  $N$  fest gegeben ist.  $z$  sei also außerhalb der genannten Kugeln, und im Innern von  $\Omega$  gelegen. Nun ist:

$$\begin{aligned} n((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta) \\ = (\alpha \bar{\alpha} + \gamma \bar{\gamma}) ((x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2), \end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned} 2(\alpha \bar{\alpha} + \gamma \bar{\gamma}) A_0 &= \gamma \bar{\delta} + \delta \bar{\gamma} + \alpha \bar{\beta} + \beta \bar{\alpha}, \\ 2(\alpha \bar{\alpha} + \gamma \bar{\gamma}) A_1 &= i_1 (\gamma \bar{\delta} - \delta \bar{\gamma} + \alpha \bar{\beta} - \beta \bar{\alpha}), \\ 2(\alpha \bar{\alpha} + \gamma \bar{\gamma}) A_2 &= 2, \end{aligned}$$

$$A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 = \frac{\delta \bar{\delta} + \beta \bar{\beta}}{\alpha \bar{\alpha} + \gamma \bar{\gamma}} \quad \text{ist.}$$

$A_0, A_1, A_2$  sind reell. Da  $x_2$  und  $A_2$  stets positiv sind, so ist für alle  $z$  von  $\Omega$ :

$$n((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta) > N^2(\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}) \cong N^2.$$

Nun ist:

$$\frac{\partial T(z)}{\partial x_\nu} = -2k \sum_{(S)} \frac{x_\nu + A_\nu}{(x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2} \times \frac{1}{n((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^k}, \nu = 0, 1, 2.$$

Für den ersten Faktor jedes Summanden gilt:

$$\left| \frac{x_\nu + A_\nu}{(x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{(x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2}} \leq \frac{1}{N}.$$

Somit konvergiert auch  $\partial T(z)/\partial x_\nu$  für  $\nu = 0, 1, 2$  in  $\Omega$  gleichmäßig und absolut. Man sieht in gleicher Weise, daß auch alle höhern partiellen Differentialquotienten existieren und stetig sind. Außerdem gilt:

$$\Delta T(z) = 2k(2k-1) \sum_{(S)} \frac{\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}}{n((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^{k+1}}$$

Entsprechend ist:

$$\frac{\partial R(z)}{\partial x_\nu} = -2k \sum_{(S)} \frac{(x_\nu + A_\nu) [((\alpha - i_2 \gamma) z + \beta - i_2 \delta) ((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^{-1} - \zeta']^{-1}}{((x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2) n((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^k} + \sum_{(S)} \frac{\frac{\partial}{\partial x_\nu} [((\alpha - i_2 \gamma) z + \beta - i_2 \delta) ((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^{-1} - \zeta']^{-1}}{n((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^k}.$$

Die erste Summe konvergiert wieder absolut und gleichmäßig in  $\Omega$ , da ja der zweite Faktor im Zähler jedes Summanden absolut kleiner als  $\rho'^{-1}$  ist. Wir müssen also nur noch die gleichmäßige Konvergenz der zweiten Summe beweisen. Dazu setzen wir:

$$w^* = u_0^* + u_1^* i_1 + u_2^* i_2 = ((\alpha - i_2 \gamma) z + \beta - i_2 \delta) ((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^{-1}.$$

Dann folgt durch Rechnung:

$$\begin{aligned} w^* &= (\alpha - i_2 \gamma) (\gamma - i_2 \alpha)^{-1} [(\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta - (\delta - i_2 \beta) \\ &\quad + (\gamma - i_2 \alpha) (\alpha - i_2 \gamma)^{-1} (\beta - i_2 \delta)] (\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^{-1} \\ &= (\alpha - i_2 \gamma) (\gamma - i_2 \alpha)^{-1} - 2(\gamma - i_2 \alpha)^{-1} ((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^{-1}, \end{aligned}$$

wobei von der Relation:

$$(\gamma - i_2 \alpha) (\alpha - i_2 \gamma)^{-1} = (-\alpha + \gamma i_2)^{-1} (-\gamma + \alpha i_2)$$

Gebrauch gemacht wurde. Da nun:

$$(\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta = (\gamma - i_2 \alpha) ((x_0 + A_0) + (x_1 + A_1) i_1 + (x_2 + A_2) i_2)$$

ist, so wird:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w^*}{\partial x_\nu} \\ &= -2(\gamma - \alpha i_2)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{x_0 + A_0 - (x_1 + A_1) i_1 - (x_2 + A_2) i_2}{(x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2} \right) (\gamma - i_2 \alpha)^{-1}, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial w^*}{\partial x_\nu} \right| &= \frac{2}{\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}} \left| -2 \frac{(x_\nu + A_\nu) (x_0 + A_0 - (x_1 + A_1) i_1 - (x_2 + A_2) i_2)}{((x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2)^2} \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{i_\nu}{(x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2} \right| \\ &\leq \frac{2}{\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}} \left\{ 2 \frac{\text{I}}{[(x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2]^2} \right. \\ &\quad \times \frac{|x_\nu + A_\nu|}{\sqrt{(x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2}} \\ &\quad \left. + \frac{\text{I}}{(x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2} \right\} \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist aber nach unsern Annahmen beschränkt, somit gibt es ein endliches, festes, von  $z$  und  $S$  unabhängiges  $M$ , so daß:

$$\left| \frac{\partial u_\mu^*}{\partial x_\nu} \right| < M, \quad \left. \begin{matrix} \nu \\ \mu \end{matrix} \right\} = 0, 1, 2.$$

Ferner ist:

$$W = (zw^* - \zeta')^{-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial u_\nu^*} = (\bar{z}w^* - \bar{\zeta}') \frac{-2(u_\nu^* - z'_\nu)}{n(zw^* - \zeta')^2} + \frac{z'_\nu}{n(zw^* - \zeta')}, \quad \nu = 0, 1, 2.$$

Da  $n(zw^* - \zeta') \leq \rho'^2$  angenommen ist, so sieht man genau wie oben, daß auch  $|\partial W / \partial u_\nu^*|$  beschränkt ist, also auch:

$$\left| \frac{\partial U_\mu}{\partial u_\nu^*} \right| \leq M_1, \quad \left. \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix} \right\} = 0, 1, 2, \quad W = \sum U_\mu z_\mu,$$

wo  $M_1$  nur von  $\Omega$  und  $\rho$  abhängt. Da nun:

$$\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial U_\mu}{\partial u_0^*} \frac{\partial u_0^*}{\partial x_\nu} + \frac{\partial U_\mu}{\partial u_1^*} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_\nu} + \frac{\partial U_\mu}{\partial u_2^*} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_\nu}, \quad \left. \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix} \right\} = 0, 1, 2,$$

ist, muß auch:

$$\left| \frac{\partial W}{\partial x_\nu} \right| \leq M_0, \quad \nu = 0, 1, 2,$$

$$W = [((\alpha - i_2 \gamma) z + \beta - i_2 \delta) ((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta - i_2 \beta)^{-1} - \zeta']^{-1},$$

sein, wo wieder  $M_0$  nur von  $\Omega$  und  $\rho$  abhängt, nicht aber von  $z$ . Damit ist aber die gleichmäßige und absolute Konvergenz auch der zweiten Reihe vollständig bewiesen.

Daraus folgt, daß  $T(z)$  und  $R(z)$  beide stetig differentierbar sind. Somit ist es auch ihr Quotient, da der Nenner reell ist.

**3. Satz:** Die drei Koordinaten der Funktion  $w = f(z)$  sind stetige und stetig differentierbare Funktionen in jedem endlichen Bereiche, der ganz über der  $01$ -Ebene liegt, und weder den Punkt  $\zeta$  noch seine äquivalenten Punkte enthält.

#### 4. Hilfssatz über die Abzählung der Substitutionen von $\mathfrak{G}$

Es sei  $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  irgend eine Substitution von  $\mathfrak{G}$ . Wir setzen:

$$\begin{aligned} f &= \alpha \bar{\alpha} + \gamma \bar{\gamma}, \\ f_1 &= \beta \bar{\beta} + \delta \bar{\delta}, \\ \rho &= \bar{\gamma} \delta + \bar{\alpha} \beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Dann ist:

$$\rho\bar{\rho} = -1 + f f_1. \quad (2)$$

Denn:

$$\rho\bar{\rho} = \gamma\bar{\gamma}\delta\bar{\delta} + \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\beta}\alpha\bar{\delta} + \alpha\bar{\delta}\gamma\bar{\beta},$$

wo man im 3. Gliede  $\gamma\bar{\beta} = \alpha\bar{\delta} - 1$  und im 4. Gliede  $\alpha\bar{\delta} = \beta\bar{\gamma} + 1$  setzt. Wegen  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  folgt dann sofort (2).

Umgekehrt sei  $f$  gegeben, sowie eine Lösung  $\rho$  der Kongruenz:

$$\rho\bar{\rho} \equiv -1 \pmod{f}.$$

Man setze  $\rho\bar{\rho} + 1 = f f_1$ . Wir setzen zunächst voraus, daß wir  $f$  in der Form:

$$f = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}$$

darstellen können, wo  $\alpha$  und  $\gamma$  ohne gemeinsamen Teiler seien. Soll dann  $\rho = \bar{\gamma}\delta + \bar{\alpha}\beta$  sein, so sind  $\beta$  und  $\delta$  eindeutig bestimmt. Denn es folgt:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\beta &= \bar{\delta}\beta\gamma + \beta\bar{\beta}\alpha = -\bar{\delta} + \alpha(\beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta}) = -\bar{\delta} + \alpha f_1, \\ \bar{\rho}\delta &= \gamma\delta\bar{\delta} + \alpha\bar{\beta}\delta = \bar{\beta} + \gamma(\beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta}) = \bar{\beta} + \gamma f_1. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen für  $\beta, \delta$  folgt durch Auflösuug:

$$\begin{aligned} f\beta &= -\bar{\gamma} + \alpha\rho, \\ f\delta &= \bar{\alpha} + \gamma\rho. \end{aligned} \quad (3)$$

Wir fragen jetzt, wie viele Darstellungen  $\alpha, \gamma$  von  $f$  es für ein gegebenes  $\rho$ , das (2) genügt, gibt, so daß die Gleichungen (1) erfüllt sind? Wegen (3) sind ja dann  $\beta, \delta$  eindeutig bestimmt. Damit nun (3) durch ganze Zahlen  $\beta, \delta$  lösbar ist, ist jedenfalls notwendig, daß:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha} &\equiv -\gamma\rho \\ \bar{\gamma} &\equiv \alpha\rho \end{aligned} \right\} \pmod{f} \text{ ist.} \quad (4)$$

Es gibt nun wenigstens eine Darstellung  $f = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}$  mit zueinander teilerfremden Zahlen  $\alpha, \gamma$ , für die (4) erfüllt ist. Denn setzt man:

$$\bar{\gamma} = \alpha\rho - \beta f,$$

so ist:

$$\gamma\bar{\gamma} = \alpha\bar{\alpha}\rho\bar{\rho} + f^2\beta\bar{\beta} - f\rho\alpha\bar{\beta} - f\rho\alpha\bar{\beta}.$$

Setzt man hier für  $\gamma\bar{\gamma}$  den Wert  $f - \alpha\bar{\alpha}$  ein, und  $\rho\bar{\rho} = f\bar{f}_1 - 1$ , so wird nach Division durch  $f$ :

$$1 = f_1\alpha\bar{\alpha} + f\beta\bar{\beta} - \rho\alpha\bar{\beta} - \bar{\rho}\alpha\bar{\beta}.$$

Führt man reelle Koordinaten ein:

$$\alpha = t_0 + t_1 i_1, \quad \beta = u_0 + u_1 i_1, \quad \rho = r_0 + r_1 i_1,$$

so lautet die Gleichung:

$$1 = f_1 (t_0^2 + t_1^2) + f (u_0^2 + u_1^2) - 2 r_0 (t_0 u_0 + t_1 u_1) - 2 r_1 (t_0 u_1 - t_1 u_0).$$

Diese quaternäre quadratische Form hat die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & 0 & -r_0 & -r_1 \\ 0 & f_1 & r_1 & -r_0 \\ -r_0 & r_1 & f & 0 \\ -r_1 & -r_0 & 0 & f \end{vmatrix} = 1.$$

Da es nur eine Klasse quaternärer Formen der Determinante 1 gibt, so ist unsere Form der Form  $t_0'^2 + t_1'^2 + u_0'^2 + u_1'^2$  äquivalent, wodurch die Darstellung der eins gegeben ist. Somit sind  $\alpha$  und  $\beta$  gefunden. Setzt man dann:

$$\gamma = \bar{\alpha}\bar{\rho} - f\bar{\beta},$$

so wird für dieses  $\gamma$ :

$$\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} = \alpha\bar{\alpha}(1 + \rho\bar{\rho}) + f^2\beta\bar{\beta} - f\rho\alpha\bar{\beta} - f\bar{\rho}\alpha\bar{\beta} = f.$$

Damit haben wir das Resultat, daß es zu jeder natürlichen Zahl  $f$  und jeder Lösung der Kongruenz:

$$\rho\bar{\rho} \equiv -1 \pmod{f}$$

wenigstens eine Darstellung  $f = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}$  gibt, für die:

$$\bar{\alpha} \equiv -\gamma\rho \pmod{f} \tag{5}$$

ist. Für diese Darstellung können wir nach (3)  $\beta, \delta$  als ganze Zahlen berechnen. Aus (3) folgt aber:

$$f(\alpha\delta - \beta\gamma) = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} = f, \text{ oder } \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

$$f(\bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta) = (\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma})\rho = \rho f, \text{ oder } \rho = \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta.$$

Somit sind  $\alpha, \gamma$  auch teilerfremd.

Wir können daher sagen, daß es zu jeder natürlichen Zahl  $f$  und jeder Lösung  $\rho$  der Kongruenz:

$$\rho\bar{\rho} \equiv -1 \pmod{f}$$

wenigstens eine Substitution  $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  von  $\mathfrak{O}$  gibt, so daß:

$$f = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}, \rho = \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta$$

ist.

Es fragt sich nun, wie viele solcher Substitutionen es gibt? Es sei  $\alpha', \gamma'$  eine weitere Lösung, die zu demselben  $f$  und  $\rho$  gehöre.

Es sei also auch:

$$\alpha'\bar{\alpha}' + \gamma'\bar{\gamma}' = f, \bar{\alpha}' \equiv \rho\gamma' \pmod{f}.$$

Eliminiert man aus dieser Kongruenz und (5)  $\rho$ , so folgt:

$$\bar{\alpha}\gamma' - \bar{\alpha}'\gamma = f\eta,$$

wo  $\eta$  eine ganze Zahl von  $k(\sqrt{-1})$  ist. Es muß:

$$f^2\eta\bar{\eta} = \alpha\bar{\alpha}\gamma'\bar{\gamma}' + \alpha'\bar{\alpha}'\gamma\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\alpha'\bar{\gamma}\gamma' - \alpha\bar{\alpha}'\gamma\bar{\gamma}'$$

sein. Setzt man hier für  $\alpha\bar{\alpha}$  den Wert  $f - \gamma\bar{\gamma}$  und für  $\gamma\bar{\gamma}$  den Wert  $f - \alpha\bar{\alpha}$ , so wird:

$$f^2\eta\bar{\eta} = f^2 - \gamma\bar{\gamma}\gamma'\bar{\gamma}' - \alpha\bar{\alpha}\alpha'\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}\alpha'\bar{\gamma}\gamma' - \alpha\bar{\alpha}'\gamma\bar{\gamma}' = f^2 - (\bar{\alpha}\alpha' + \gamma\bar{\gamma}')(\alpha\bar{\alpha}' + \gamma\bar{\gamma}'),$$

oder

$$f^2(1 - \eta\bar{\eta}) = n(\bar{\alpha}\alpha' + \gamma\bar{\gamma}').$$

Die rechte Seite ist stets  $\geq 0$ ; auf der linken Seite ist  $\eta\bar{\eta} \geq 0$ ,  $1 - \eta\bar{\eta} \leq 1$ . Daher sind nur die beiden Fälle möglich, da alle Zahlen ganz sind:

a)  $\eta\bar{\eta} = 1$ , d. h.

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}\gamma' - \bar{\alpha}'\gamma &= f z_1^{\nu}, \\ \bar{\alpha}\alpha' + \bar{\gamma}\gamma' &= 0,\end{aligned}\quad \nu = 0, 1, 2, 3;$$

woraus sich für  $\alpha'$  und  $\gamma'$  ergibt:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}' &= -z_1^{\nu} \cdot \bar{\gamma}, \\ \gamma' &= z_1^{\nu} \cdot \alpha;\end{aligned}$$

dies sind 4 Lösungen  $\alpha'$ ,  $\gamma'$ , von denen sich aber je zwei nur um das Vorzeichen unterscheiden. Umgekehrt sieht man, daß diese Lösungen auch wirklich allen Bedingungen genügen.

b)  $\eta\bar{\eta} = 0$ , d. h.:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}\gamma' - \bar{\alpha}'\gamma &= 0, \\ \bar{\alpha}\alpha' + \bar{\gamma}\gamma' &= z_1^{\nu} \varphi,\end{aligned}\quad \nu = 0, 1, 2, 3;$$

wo  $(\varphi)$  ein festes Ideal ist, dessen Norm  $f^2$  ist:  $n(\varphi) = f^2$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned}f\gamma' &= z_1^{\nu} \cdot \varphi\gamma, \\ f\bar{\alpha}' &= z_1^{\nu} \cdot \varphi\bar{\alpha};\end{aligned}$$

es müssen daher  $\varphi\gamma/f$  und  $\varphi\bar{\alpha}/f$  ganze Zahlen sein. Setzt man:

$$\varphi = f_0 \cdot \varphi_0^2, \quad f = f_0 \cdot n(\varphi_0),$$

wo  $f_0$  ganz, rational und  $\varphi_0$  ungerade und zu  $\bar{\varphi}_0$  teilerfremd angenommen werden darf, so wird:

$$\begin{aligned}\gamma' &= z_1^{\nu} \cdot \varphi_0 \cdot \frac{\gamma}{\bar{\varphi}_0}, \\ \bar{\alpha}' &= z_1^{\nu} \cdot \varphi_0 \cdot \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varphi}_0},\end{aligned}$$

und  $\gamma$  und  $\bar{\alpha}$  müssen durch  $\bar{\varphi}_0$  teilbar sein. Dann folgt aus den (3) entsprechenden Formeln für  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$ :

$$\begin{aligned} f\beta' &= -\bar{\gamma}' + \alpha'\rho, \\ f\delta' &= \bar{\alpha}' + \gamma'\rho, \end{aligned}$$

daß:

$$\begin{aligned} f\beta' &= (-i_1)^\nu \bar{\varphi}_0 (-\bar{\gamma} + \alpha\rho) \frac{1}{\varphi_0}, \\ f\delta' &= i_1^\nu \cdot \bar{\varphi}_0 (\bar{\alpha} + \gamma\rho) \frac{1}{\varphi_0}, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} -\bar{\gamma} + \alpha\rho &\equiv 0 \pmod{f_0 \cdot \varphi_0^2}, \\ \bar{\alpha} + \gamma\rho &\equiv 0 \pmod{f_0 \cdot \bar{\varphi}_0^2}. \end{aligned}$$

Wegen (3) muß daher:

$$\begin{aligned} \beta &\equiv 0 \pmod{\varphi_0}, \\ \delta &\equiv 0 \pmod{\bar{\varphi}_0}, \end{aligned}$$

sein. Somit ist:

$$\alpha\delta \equiv 0 \pmod{\varphi_0 \cdot \bar{\varphi}_0}, \quad \beta\gamma \equiv 0 \pmod{\varphi_0 \cdot \bar{\varphi}_0},$$

was wegen  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  nur für  $\varphi_0 = 1$ ,  $\varphi = f_0 = f$  möglich ist. Daher gibt es nur die vier Lösungen:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}' &= -i_1^\nu \cdot \bar{\alpha}, \\ \gamma' &= i_1^\nu \cdot \gamma, \end{aligned} \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Die so gefundenen 4 Lösungen unterscheiden sich zu zwei und zwei nur durch das Vorzeichen.

Die unter a) und b) gefundenen 8 Lösungen sind nun alle von einander verschieden, außer im Falle, daß  $\alpha$  oder  $\gamma = 0$  oder beide  $= i_1^\nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3$  sind. Dies ist nur für  $f = 1$  und 2 möglich. Sie reduzieren sich hier auf die Hälfte.

Wegen  $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$  ergeben die 8, resp. 4 Lösungen nur 4 resp. 2 verschiedene Substitutionen, da für  $-\alpha$ ,  $-\gamma$  in (3) auch  $\beta$  und  $\delta$  das umgekehrte Zeichen annehmen. Daraus folgt der

**Hilfssatz:** Jede Substitution  $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  von  $\mathfrak{G}$  legt eindeutig die Zahlen  $f = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}$ ,  $\rho = \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta$  fest, für die

$$\rho\bar{\rho} \equiv -1 \pmod{f},$$

ist. Ist umgekehrt  $f$  eine natürliche Zahl, und  $\rho$  eine feste Lösung der Kongruenz:

$$\rho\bar{\rho} \equiv -1 \pmod{f},$$

so gibt es genau 4 (für  $f=1$  oder  $=2$  nur 2) Substitutionen  $S$  von  $\mathfrak{G}$ , für die  $f = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}$ ,  $\rho = \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta$  ist.

Für jede durch 4 teilbare natürliche Zahl  $f$  hat die Kongruenz

$$\rho\bar{\rho} \equiv -1 \pmod{f}$$

keine Lösung, weil sie für  $f=4$  keine hat. Man sieht aus dem Hilfssatz, daß die Darstellung  $f = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}$  in zwei zueinander teilerfremden Zahlen  $\alpha, \gamma$  genau 8 (resp. 4) mal so oft möglich ist, als die angegebene Kongruenz inkongruente Lösungen hat. Ersetzt man  $\rho$  durch eine  $(\text{mod. } f)$  kongruente Wurzel, so ändern sich  $\alpha, \gamma$  nicht. Dagegen erhalten  $\beta, \delta$  einen andern Wert. Setzt man  $\rho^* = \rho + f\tau$ , wo  $\tau$  eine ganze Zahl von  $k(\sqrt{-1})$  ist, so werden die zugehörigen  $\beta^*, \delta^*$  nach (3):

$$\beta^* = \beta + \alpha\tau, \quad \delta^* = \delta + \gamma\tau. \quad (6)$$

Daraus ergibt sich für die Summation unserer Reihen  $T(z)$  und  $R(z)$  folgendes:

Die *äußere* Summe wird über alle natürlichen Zahlen  $f$  von 1 bis unendlich zu nehmen sein.

Die *innere* Summe ist zunächst über ein  $(\text{mod. } f)$  inkongruentes System von Wurzeln  $\rho$  der Kongruenz:

$$\rho\bar{\rho} \equiv -1 \pmod{f} \quad (7)$$

zu erstrecken.

Die *innerste* Summe ist über die 4 resp. 2 zugehörigen  $\alpha, \gamma$ , die uns ein Paar  $\beta, \delta$  festlegen, und für die  $f = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}$  ist, und dann noch über die unendlich vielen Werte:  $\beta + \tau\alpha, \delta + \tau\gamma$  zu erstrecken, wobei  $\tau$  alle ganzen Zahlen des Körpers  $k(\sqrt{-1})$  durchläuft.

## 5. Der Grenzwert der Funktionen $T(z)$ und $R(z)$ für $x_2 \rightarrow \infty$

Legt man die in 4. angegebene Bezeichnungsweise der Formeln (I) zu Grunde, so lauten die in 3. aufgestellten Gleichungen jetzt so:

$$n((\gamma - i_2 \alpha)z + \delta - i_2 \beta) = f((x_0 + A_0)^2 + (x_1 + A_1)^2 + (x_2 + A_2)^2),$$

wo:

$$\begin{aligned} fA_0 &= \frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho}) = r_0, & \rho &= r_0 + i_1 r_1, \\ fA_1 &= -\frac{1}{2}i_1(\rho - \bar{\rho}) = r_1, \\ fA_2 &= 1 \end{aligned}$$

ist. Hält man gemäß der Schlußbemerkung von 4.  $f$  und  $\rho$  fest, und setzt:

$$\Xi = x_0 + i_1 x_1, \quad \mu = f\tau + \rho,$$

so kann man nach (6) schreiben:

$$n((\gamma - i_2 \alpha)z + \delta^* - i_2 \beta^*) = f\left(x_2 + \frac{1}{f}\right)^2 + \frac{n(f\Xi + \mu)}{f}.$$

Statt über alle ganzen Zahlen  $\tau$  von  $k(\sqrt{-1})$  ist jetzt über alle ganzen Zahlen  $\mu$  zu summieren, für die

$$\mu \equiv \rho \pmod{f} \quad (8)$$

ist. Daher wird:

$$T(z) = \sum_{f=1}^{\infty} \sigma \sum_{(\rho)} T_{\rho, f}(z), \text{ wo:}$$

$$T_{\rho, f}(z) = \sum_{(\mu)} \frac{1}{\left(f\left(x_2 + \frac{1}{f}\right)^2 + \frac{n(f\Xi + \mu)}{f}\right)^k},$$

$$\sigma = 2, f = 1, 2; \sigma = 4, f \geq 3, \equiv 0 \pmod{4}, \sigma = 0, f \equiv 0 \pmod{4}$$

ist. Um  $T_{\rho, f}(z)$  zu berechnen, benutzen wir in bekannter Weise das Integral:

$$\frac{1}{n^k} = \frac{(2\pi)^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} \exp(-2\pi n \tau) \tau^{k-1} d\tau.$$

Dann wird wegen der erlaubten Vertauschung von Integration und Summation nach *Hecke*<sup>2)</sup>:

$$T_{\rho, f}(z) = \frac{(2\pi)^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} \exp\left(-2\pi f\left(x_2 + \frac{1}{f}\right)^2 \tau\right) \sum_{(\mu)} \exp\left(-2\pi \tau \frac{n(f\bar{\Xi} + \mu)}{f}\right) \tau^{k-1} d\tau$$

$$= \frac{(2\pi)^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} \exp\left(-2\pi f\left(x_2 + \frac{1}{f}\right)^2 \tau\right) \vartheta(i_1 \tau; 2\bar{\Xi}f + 2\rho, 1, 2f i_1) \tau^{k-1} d\tau.$$

Im Integral machen wir jetzt die Substitution  $\tau \rightarrow \frac{1}{\tau}$ . Nach der Transformationsformel<sup>3)</sup> wird dann:

$$\sum_{(\mu)} \exp\left(-2\pi \frac{1}{\tau} \frac{n(f\bar{\Xi} + \mu)}{f}\right)$$

$$= \frac{\tau}{2f} \sum_{(\lambda)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\rho\lambda}{2f}\right)\right) \sum_{(\nu)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\bar{\Xi}\nu}{2}\right)\right) \exp\left(-2\pi \tau \frac{n(\nu)}{4f}\right),$$

wo  $S(\ )$  die Spur der Zahl in  $k(\sqrt{-1})$  bedeutet,  $\lambda$  ein vollständiges Restsystem (mod.  $2f$ ) und  $\nu$  alle Zahlen durchläuft, für die:

$$\nu \equiv \lambda \pmod{2f}$$

ist. Berücksichtigt man dies bei Ausführung der Substitution, so folgt:

$$T_{\rho, f}(z) = \frac{(2\pi)^k}{2f\Gamma(k)} \sum_{(\lambda)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\rho\lambda}{2f}\right)\right) \sum_{(\nu)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\bar{\Xi}\nu}{2}\right)\right)$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp\left(-2\pi f\left(x_2 + \frac{1}{f}\right)^2 \frac{1}{\tau} - 2\pi \tau \frac{n(\nu)}{4f}\right) \tau^{-k} d\tau.$$

In der innersten Summe kann  $\nu$  nur dann null sein, wenn  $\lambda \equiv 0 \pmod{2f}$ , d. h. z. B.  $\lambda = 0$  ist. Wir nehmen diesen Wert  $\nu = 0$  aus der Summe heraus und deuten dies durch einen Strich an der Summe an. Es wird dann:

<sup>2)</sup> *E. Hecke*: Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Annalen, Bd. 97, 1926, pg. 222.

<sup>3)</sup> *E. Hecke*: a. a. O. pg. 222, Formel (13).

$$T_{\rho, f}(z) = \frac{(2\pi)^k}{2f\Gamma(k)} \left[ \int_0^{\infty} \exp\left(-2\pi f\left(x_2 + \frac{1}{f}\right)^2 \frac{1}{\tau}\right) \tau^{-k} d\tau \right. \\ \left. + \sum_{(\lambda)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\lambda\rho}{2f}\right)\right) \sum'_{(\nu)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{E\nu}{2}\right)\right) \mathcal{F}_{\nu} \right],$$

wo  $\lambda$  ein solches Restsystem (mod.  $2f$ ) durchläuft, in dem  $\lambda = 0$  auftritt und

$$\mathcal{F}_{\nu} = \int_0^{\infty} \exp\left(-2\pi f\left(x_2 + \frac{1}{f}\right)^2 \frac{1}{\tau} - 2\pi\tau \frac{n(\nu)}{4f}\right) \tau^{-k} d\tau$$

ist. Das erste Integral in  $T_{\rho, f}(z)$  hat den Wert:

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(2\pi f)^{k-1} \left(x_2 + \frac{1}{f}\right)^{2k-2}}$$

In  $\mathcal{F}_{\nu}$  macht man die Substitution:

$$\tau \rightarrow 2 \frac{f x_2 + 1}{\sqrt{\nu\bar{\nu}}} \tau, \text{ (positive Quadratwurzel),}$$

dann wird:

$$\mathcal{F}_{\nu} = \frac{\sqrt{\nu\bar{\nu}}^{k-1}}{2^{k-1} (f x_2 + 1)^{k-1}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} 2\pi (f x_2 + 1) \frac{\sqrt{\nu\bar{\nu}}}{f} \left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)\right) \tau^{-k} d\tau.$$

Dies ist aber nichts anderes wie eine *Bessel'sche Funktion dritter Art*. Wir setzen nach *Watson*<sup>4)</sup>

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} z \left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)\right) \tau^{-n-1} d\tau.$$

Dann ist:

$$\mathcal{F}_{\nu} = \frac{\sqrt{\nu\bar{\nu}}^{k-1}}{2^{k-2} (f x_2 + 1)^{k-1}} K_{k-1}\left(2\pi (f x_2 + 1) \frac{\sqrt{\nu\bar{\nu}}}{f}\right).$$

<sup>4)</sup> *G. N. Watson: A treatise on the theory of Bessel Functions. Cambridge, 1922, pg. 183.*

Setzen wir dies alles ein, so erhalten wir schließlich:

$$T(z) = \sum_{f=1}^{\infty} \sigma \sum_{(\rho)} T_{\rho, f}(z),$$

$$T_{\rho, f}(z) = \frac{\pi}{(k-1) f^k (x_2 + \frac{1}{f})^{2k-2}} + \frac{2 \pi^k}{f \Gamma(k) (f x_2 + 1)^{k-1}} \sum_{(\lambda)} \exp\left( (2 \pi i_1 S(\frac{\lambda \rho}{2f})) \right) \times \sum'_{(\nu)} \exp\left( 2 \pi i_1 S(\frac{\bar{E} \nu}{2}) \right) \sqrt{\nu \bar{\nu}}^{k-1} K_{k-1}\left( 2 \pi (f x_2 + 1) \frac{\sqrt{\nu \bar{\nu}}}{f} \right), \quad \text{III.}$$

wo die Summen über ein vollständiges, (mod.  $f$ ) inkongruentes System von Wurzeln  $\rho$  der Kongruenz (7), über ein vollständiges Restsystem  $\lambda$  (mod.  $2f$ ) und über alle ganzen Zahlen  $\nu$  von  $k(\sqrt{-1})$  zu erstrecken ist, für die  $\nu \equiv \lambda \pmod{2f}$  ist.

Um  $K_{k-1}(z)$  für große reelle Werte von  $z$  zu berechnen, verwendet man die Formel<sup>5)</sup>:

$$K_{k-1}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \left( \sum_{m=0}^{k-2} \frac{(k-1, m)}{(2z)^m} + \theta \frac{(k-1, k-1)}{(2z)^{k-1}} \right), \quad 0 < \theta < 1,$$

wo:

$$(n, m) = \frac{\Gamma(n+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1) \Gamma(n-m+\frac{1}{2})},$$

ist. Da in der Summe  $\sum' \nu$  niemals null ist, so erhält man die Grenzformel:

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_2^{2k-2} T(z) = \frac{\pi}{k-1} \sum_{f=1}^{\infty} \frac{\psi(f)}{f^k} = B_k, \quad k \geq 3, \quad \text{III a.}$$

wo  $\psi(f)$  die Anzahl *aller* Darstellungen von  $f$  in der Form

$$f = \alpha \bar{\alpha} + \gamma \bar{\gamma}$$

mit zueinander teilerfremden Zahlen  $\alpha, \gamma$  ist.  $B_k$  ist eine von null verschiedene reelle, positive Zahl.

<sup>5)</sup> G. N. Watson: a. a. O. pg. 207.

In gleicher Weise, wenn auch etwas umständlicher, kann der Zähler  $R(z)$  entwickelt werden. Legt man die Bezeichnungsweise von 4. zu Grunde und verwendet (3) und (6), so wird:

$$\begin{aligned} N &= ((\alpha - i_2 \gamma) z + \beta^* - i_2 \delta^*) ((\gamma - i_2 \alpha) z + \delta^* - i_2 \beta^*)^{-1} - \zeta' \\ &= 2 (\zeta i_2 - 1)^{-1} \left( (\zeta \gamma - \alpha) \left( z + \frac{\mu}{f} \right) + \frac{\zeta \bar{\alpha} + \bar{\gamma}}{f} \right) \\ &\quad \times \left( (\gamma - i_2 \alpha) \left( z + \frac{\mu}{f} \right) + \frac{\bar{\alpha} + i_2 \bar{\gamma}}{f} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

wo  $\zeta' = (\zeta - i_2) (-i_2 \zeta + 1)^{-1} = (\zeta i_2 - 1)^{-1} (-\zeta + i_2)$ ,  $\mu = \rho + \tau f$

gesetzt ist. Ist:

$$A_{f,\rho}(\zeta) = \frac{\zeta \bar{\zeta} \alpha \gamma - \bar{\alpha} \gamma + z_0 (\bar{\gamma}^2 - \bar{\alpha}^2) - i_2 f z_2}{fn (\zeta \gamma - \alpha)}, \quad \zeta = z_0 + i_2 z_2,$$

so ergibt die Rechnung:

$$\begin{aligned} N &= 2 (\zeta i_2 - 1)^{-1} (\zeta \gamma - \alpha) \left( z + \frac{\mu}{f} + A_{f,\rho}(\zeta) \right) \\ &\quad \times \left( (\gamma - i_2 \alpha) \left( z + \frac{\mu}{f} \right) + \frac{\bar{\alpha} + i_2 \bar{\gamma}}{f} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Die Zahl  $A_{f,\rho}(\zeta)$  ist ein reduziertes Quaternion, das wir in der Form schreiben:

$$A_{f,\rho}(\zeta) = \varepsilon_{f,\rho}(\zeta) + e_{f,\rho}(\zeta) i_2,$$

wo  $\varepsilon_{f,\rho}(\zeta)$  eine komplexe Zahl der 01-Ebene ist. Der reziproke Wert ergibt jetzt:

$$\begin{aligned} N^{-1} &= \frac{1}{2} \left( (\gamma - i_2 \alpha) \left( z + \frac{\mu}{f} \right) + \frac{\bar{\alpha} + i_2 \bar{\gamma}}{f} \right) \left( z + \frac{\mu}{f} + \varepsilon_{f,\rho}(\zeta) + e_{f,\rho}(\zeta) i_2 \right)^{-1} \\ &\quad \times (\zeta \gamma - \alpha)^{-1} (\zeta i_2 - 1) \\ &= A_{f,\rho}(\zeta) + B_{f,\rho}(\zeta) \left( z + \frac{\mu}{f} + \varepsilon_{f,\rho}(\zeta) + e_{f,\rho}(\zeta) i_2 \right)^{-1} C_{f,\rho}(\zeta), \end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned} A_{f,\rho}(\zeta) &= \frac{1}{2} (\gamma - i_2 \alpha) (\zeta \gamma - \alpha)^{-1} (\zeta i_2 - 1), \\ B_{f,\rho}(\zeta) &= \frac{1}{2} (\zeta i_2 - 1) (\gamma \zeta - \alpha)^{-1}, \\ C_{f,\rho}(\zeta) &= (\zeta \gamma - \alpha)^{-1} (\zeta i_2 - 1), \end{aligned}$$

ist. In der Bezeichnungsweise ist zu berücksichtigen, daß nach dem Hilfssatz in 4. zu jedem  $\rho$  4 resp. 2, resp. 0 verschiedene Wertepaare  $\alpha, \gamma$  gehören. Setzt man:

$$\bar{\Xi}' = x_0 + x_1 i_1 + \varepsilon_{f,\rho}(\zeta), \quad X_2 = x_2 + e_{f,\rho}(\zeta),$$

so wird:

$$N^{-1} = A_{f,\rho}(\zeta) + B_{f,\rho}(\zeta) \frac{f\bar{\Xi}' - fX_2 i_2 + \bar{\mu}}{fX_2^2 + \frac{n(f\bar{\Xi}' + \mu)}{f}} C_{f,\rho}(\zeta).$$

Diese Darstellung benutzt man, um  $R(z)$  in folgende Summen zu zerlegen, wobei nach der Vorschrift von 4. summiert wird:

$$R(z) = R_1(z) + R_2(z) + R_3(z), \text{ wo:}$$

$$R_1(z) = \sum_{f=1}^{\infty} \sum_{(\rho, \alpha, \gamma)} \sum_{(\mu)} \frac{A_{f,\rho}(\zeta)}{\left( f \left( x_2 + \frac{1}{f} \right)^2 + \frac{n(f\bar{\Xi} + \mu)}{f} \right)^k},$$

$$R_2(z) = \sum_{f=1}^{\infty} \sum_{(\rho, \alpha, \gamma)} \sum_{(\mu)} B_{f,\rho}(\zeta) \frac{f\bar{\Xi}' - fX_2 i_2}{\left( f \left( x_2 + \frac{1}{f} \right)^2 + \frac{n(f\bar{\Xi} + \mu)}{f} \right)^k \left( fX_2^2 + \frac{n(f\bar{\Xi}' + \mu)}{f} \right)} C_{f,\rho}(\zeta),$$

$$R_3(z) = \sum_{f=1}^{\infty} \sum_{(\rho, \alpha, \gamma)} \sum_{(\mu)} B_{f,\rho}(\zeta) \frac{\bar{\mu}}{\left( f \left( x_2 + \frac{1}{f} \right)^2 + \frac{n(f\bar{\Xi} + \mu)}{f} \right)^k \left( fX_2^2 + \frac{n(f\bar{\Xi}' + \mu)}{f} \right)} C_{f,\rho}(\zeta).$$

$R_1(z)$  kann genau nach denselben Methoden, wie  $T(z)$  dargestellt werden. Man findet:

$$\begin{aligned}
R_1(z) &= \frac{\pi}{k-1} \sum_{f=1}^{\infty} \sum_{(\rho, \alpha, \gamma)} \frac{A_{f, \rho}(\zeta)}{f^k (x_2 + \frac{1}{f})^{2k-2}} + \\
&+ \frac{2\pi^k}{\Gamma(k)} \sum_{f=1}^{\infty} \frac{1}{f(fx_2 + 1)^{k-1}} \sum_{(\rho, \alpha, \gamma)} A_{f, \rho}(\zeta) \sum_{(\lambda)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\lambda \rho}{2f}\right)\right) \text{ IV.} \\
&\sum'_{(\nu)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\Xi \nu}{2}\right)\right) V_{\nu \bar{\nu}}^{k-1} K_{k-1}\left(2\pi (fx_2 + 1) \frac{V_{\nu \bar{\nu}}}{f}\right),
\end{aligned}$$

wo die Summen wie bei  $T(z)$  auszuführen sind, und  $\alpha, \gamma$  die 4, resp. 2, resp. 0 Darstellungen von  $f$  bei gegebenem  $\rho$  zu durchlaufen hat. Daraus folgt wieder die Grenzformel:

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_2^{2k-2} R_1(z) = \frac{\pi}{k-1} \sum_{f=1}^{\infty} \sum_{(\rho, \alpha, \gamma)} \frac{A_{f, \rho}(\zeta)}{f^k} = D_k, \quad k \geq 3, \quad \text{IVa.}$$

wo  $D_k$  ein bestimmtes, nur von  $1, i_2$  abhängiges, von  $\Xi$  unabhängiges Quaternion ist. Man sieht übrigens leicht, daß wegen  $|\zeta| > 1$ :

$$\gamma = 0: f = 1, |A_{f, \rho}(\zeta)| = \frac{1}{2} |\zeta i_2 - 1|,$$

$$\gamma \neq 0: n(\zeta \gamma - \alpha) > 1, |\gamma - i_2 \alpha| = \sqrt{f}, |A_{f, \rho}(\zeta)| < \frac{1}{2} \sqrt{f} |\zeta i_2 - 1|,$$

ist, also stets  $|A_{f, \rho}(\zeta)| < \frac{1}{2} \sqrt{f} |\zeta i_2 - 1|$  ist.

Um  $R_2(z)$  zu berechnen, führen wir wie für  $T(z)$  ein Integral ein, müssen aber außerdem noch setzen:

$$\frac{1}{fX_2^2 + \frac{n(f\Xi' + \mu)}{f}} = 2\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-2\pi fX_2^2 t - 2\pi t \frac{n(f\Xi' + \mu)}{f}\right) dt.$$

Dann wird:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q} &= \frac{1}{\left(f(x_2 + \frac{1}{f})^2 + \frac{n(f\Xi + \mu)}{f}\right)^k \left(fX_2^2 + \frac{n(f\Xi' + \mu)}{f}\right)} \\
&= \frac{(2\pi)^{k+1}}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-2\pi fX_2^2 t - 2\pi f(x_2 + \frac{1}{f})^2 \tau\right) \\
&\quad \times \exp\left(-2\pi \frac{n(f\Xi' + \mu)t + n(f\Xi + \mu)\tau}{f}\right) \tau^{k-1} dt d\tau.
\end{aligned}$$

Wir substituieren für  $t \rightarrow \tau t$ . Ferner schreiben wir (Indices und Funktionszeichen sollen bei den  $e$  und  $\varepsilon$  weggelassen werden):

$$\begin{aligned} t n(f \Xi' + \mu) + n(f \Xi + \mu) &= (1+t) n\left(f \Xi + f \frac{t \varepsilon}{1+t} + \mu\right) + \frac{t n(\varepsilon) f}{1+t} \\ &= (1+t) n(f \Xi'' + \mu) + f \frac{t n(\varepsilon)}{1+t}, \text{ wo } \Xi'' = \Xi + \frac{t \varepsilon}{1+t} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} &= \frac{(2\pi)^{k+1}}{\Gamma(k)} \int_0^\infty dt \int_0^\infty \exp\left(-2\pi f \left(t X_2^2 + \left(x_2 + \frac{1}{f}\right)^2 + \frac{t n(\varepsilon)}{1+t}\right) \tau\right) \\ &\quad \times \exp\left(-2\pi \frac{n(f \Xi'' + \mu)}{f} (1+t) \tau\right) \tau^k d\tau. \end{aligned}$$

Substituiert man für  $\tau \rightarrow \frac{\tau}{(1+t)}$ , so wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} &= \frac{(2\pi)^{k+1}}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{k+1}} \int_0^\infty \exp(-2\pi f U^2 \tau) \\ &\quad \times \exp\left(-2\pi \frac{n(f \Xi'' + \mu)}{f} \tau\right) \tau^k d\tau, \end{aligned}$$

wo:

$$U = \sqrt{\left(x_2 + \frac{t\varepsilon + f^{-1}}{1+t}\right)^2 + \frac{t}{(1+t)^2} n\left(\varepsilon + i_2\left(e - \frac{1}{f}\right)\right)}, \text{ (positive Wurzel),}$$

von der Größenordnung  $x_2$  ist. Summiert man jetzt über alle ganzen Zahlen  $\mu$ , für die  $\mu \equiv \rho \pmod{f}$  ist, so erhält man in dem innern Integral wieder eine Hecke'sche Thetafunktion, die man durch die Substitution  $\tau \rightarrow \tau^{-1}$  transformieren kann. Wie im frühern Falle wird:

$$\begin{aligned} \sum_{(\mu)} \frac{1}{Q} &= \frac{(2\pi)^{k+1}}{2f\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{k+1}} \int_0^\infty \exp\left(-2\pi f U^2 \frac{1}{\tau}\right) \\ &\quad \times \sum_{(\lambda)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\rho \lambda}{2f}\right)\right) \sum_{(\nu)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\Xi'' \nu}{2}\right)\right) \exp\left(-2\pi \frac{\nu \bar{\nu}}{4f} \tau\right) \tau^{-k-1} d\tau, \end{aligned}$$

wo  $\lambda$  ein vollständiges Restsystem (mod.  $2f$ ), worunter auch  $\lambda = 0$ , durchläuft, und  $\nu$  alle ganzen Zahlen, für die  $\nu \equiv \lambda \pmod{2f}$  ist. In der Summe nehmen wir dasjenige Glied gesondert, für das  $\lambda = 0$ ,  $\nu = 0$  ist, was wieder an ihr durch einen Strich angedeutet werde. Dann folgt nach elementarer Rechnung:

$$\begin{aligned} \sum_{(\mu)} \frac{1}{Q} &= \frac{\pi}{f^{k+1}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^{k+1} U^{2k}} \\ &+ \frac{(2\pi)^{k+1}}{2f \Gamma(k)} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^{k+1}} \sum_{(\lambda)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\rho\lambda}{2f}\right)\right) \sum'_{(\nu)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\bar{E}''\nu}{2}\right)\right) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \exp\left(-2\pi f U^2 \frac{1}{\tau} - 2\pi \frac{\nu\bar{\nu}}{4f} \tau\right) \tau^{-k-1} d\tau. \end{aligned}$$

Das erste Integral ist von der Größenordnung  $1/x_2^{2k}$ . Im zweiten substituiert man

$$\tau \rightarrow \frac{2fU}{\sqrt{\nu\bar{\nu}}} \tau;$$

dann folgt wie früher:

$$\begin{aligned} \sum_{(\mu)} \frac{1}{Q} &= \frac{\pi}{f^{k+1}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^{k+1} U^{2k}} + \\ &+ \frac{\pi^{k+1}}{f^{k+1} \Gamma(k)} \sum_{(\lambda)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\rho\lambda}{2f}\right)\right) \sum'_{(\nu)} \sqrt{\nu\bar{\nu}^k} \int_0^{\infty} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\bar{E}''\nu}{2}\right)\right) \\ &\quad \times \frac{K_k(2\pi\sqrt{\nu\bar{\nu}} U) dt}{(1+t)^{k+1} U^k}, \quad V. \end{aligned}$$

$$R_2(z) = \sum_{f=1}^{\infty} \sum_{(\rho, \alpha, \gamma)} B_{f, \rho}(\xi) (f\bar{E}' - fX_2 i_2) \sum_{(\mu)} \frac{1}{Q} C_{f, \rho}(\xi).$$

In der Grenze wird, wie früher, wegen der Bemerkung über die Größenordnung des ersten Integrals, und weil  $X_2 = x_2 + e_{f, \rho}(\xi)$  ist:

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_2^{2k-2} R_2(z) = 0. \quad V a.$$

Genau ebenso wird die Reihe  $R_3(z)$  berechnet. Nur hat man jetzt die Summe (symbolisch, da  $f\bar{E}''$  unter das Integral nach  $t$  kommt):

$$\sum_{(\mu)} \frac{\bar{\mu}}{Q} = \sum_{(\mu)} \frac{f \bar{\Xi}'' + \bar{\mu}}{Q} - \sum_{(\mu)} f \bar{\Xi}'' \frac{1}{Q}$$

über alle  $\mu$  zu berechnen. Die erste Summe führt unter dem Integral auf eine *Hecke'sche* Thetareihe zweiter Gattung, deren Transformationsformel so lautet<sup>6)</sup>, wie die Differentiation nach  $\Xi$  der frühern Formel, pg. 59 ergibt:

$$\begin{aligned} \sum_{(\mu)} (f \bar{\Xi}'' + \bar{\mu}) \exp\left(-2\pi \frac{n(f \bar{\Xi}'' + \mu)}{f} \frac{1}{\tau}\right) \\ = \frac{i_1 \tau^2}{4f} \sum_{(\lambda)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\rho\lambda}{2f}\right)\right) \sum_{(\nu)} \nu \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\bar{\Xi}'' \nu}{2}\right)\right) \exp\left(-2\pi \frac{\nu \bar{\nu}}{4f\tau}\right) \end{aligned}$$

Somit wird:

$$\begin{aligned} \sum_{(\mu)} \frac{f \bar{\Xi}'' + \bar{\mu}}{Q} = -\frac{(2\pi)^{k+1} i_1}{4f \Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{k+1}} \sum_{(\lambda)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\rho\lambda}{2f}\right)\right) \\ \times \sum_{(\nu)} \nu \int_0^\infty \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\bar{\Xi}'' \nu}{2}\right)\right) \exp\left(-2\pi f U^2 \frac{1}{\tau} - 2\pi \frac{\nu \bar{\nu}}{4f\tau}\right) \tau^{-k} d\tau, \end{aligned}$$

wo jetzt kein Glied aus der Summe herausgezogen werden muß, da für  $\nu = 0$ ,  $\lambda = 0$  das Glied wegfällt. Macht man wieder im innern Integral die Substitution:

$$\tau \rightarrow \frac{2fU}{\sqrt{\nu\bar{\nu}}} \tau,$$

so wird:

$$\begin{aligned} \sum_{(\mu)} \frac{f \bar{\Xi}'' + \bar{\mu}}{Q} = -\frac{i_1 \pi^{k+1}}{4f^k \Gamma(k)} \sum_{(\lambda)} \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\rho\lambda}{2f}\right)\right) \\ \sum_{(\nu)} \nu \sqrt{\nu\bar{\nu}}^{k-1} \int_0^\infty \exp\left(2\pi i_1 S\left(\frac{\bar{\Xi}'' \nu}{2}\right)\right) \frac{K_{k-1}(2\pi \sqrt{\nu\bar{\nu}} U)}{(1+t)^{k+1} U^{k-1}} dt \quad \text{VI.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3(z) = \sum_{f=1}^\infty \sum_{(\rho, \alpha, \gamma)} B_{f, \rho}(\xi) \sum_{(\mu)} \frac{f \bar{\Xi}'' + \bar{\mu}}{Q} C_{f, \rho}(\xi) \\ - \sum_{f=1}^\infty \sum_{(\rho, \alpha, \gamma)} B_{f, \rho}(\xi) \sum_{(\mu)} f \bar{\Xi}'' \frac{1}{Q} C_{f, \rho}(\xi), \end{aligned}$$

<sup>6)</sup> E, Hecke: a. a. O. pg. 223.

wo für die zweite Summe von  $R_3(\zeta)$  die unter V. angegebene Summe einzusetzen ist. Hieraus folgt die Grenzformel:

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_2^{2k-2} R_3(z) = 0. \quad \text{VI a.}$$

IV a, V a, VI a ergeben schließlich die Grenzformel:

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_2^{2k-2} R(z) = D_k, \quad \text{VII.}$$

woraus zusammen mit III a. folgt:

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} f(z) = \frac{D_k}{B_k} = A_k, \quad \text{VIII.}$$

d. h.  $f(z)$  nähert sich mit unbegrenzt wachsendem  $x_2$  einem bestimmten endlichen, von  $x_0, x_1$  unabhängige Quaternion  $A_k$ , das die Form hat:

$$A_k = a_0 + a_2 i_2.$$

**4. Satz:** Die bezüglich der Picard'schen Gruppe automorphe Funktion  $f(z)$  besitzt für  $x_2 \rightarrow \infty$ , also auch in jedem rationalen Punkt der  $01$ -Ebene einen bestimmten, endlichen Wert  $A_k$ .

Setzt man:

$$\mathcal{F}(z) = (f(z) - A_k)^{-1},$$

so findet zwischen  $\mathcal{F}(z)$  und der elliptischen Modulfunktion  $j(z)$  eine weitgehende Analogie statt. Diese Funktion wird für  $x_2 \rightarrow \infty$  selbst unendlich, und sie hat nur eine Nullstelle für  $z = \zeta$ . Sie bildet die ganze Umrandung des D. R. auf die Ebene  $02$  ab.

(Eingegangen den 22. Februar 1931)