

Sur le problème inverse de la théorie du potentiel et les fonctions harmoniques multiformes.

Autor(en): **Wavre, R**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **6 (1934)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-7594>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur le problème inverse de la théorie du potentiel et les fonctions harmoniques multiformes

par R. WAVRE, Genève

Nous appelons problème inverse de la théorie du potentiel, la question suivante : *reconstituer un corps, son potentiel newtonien étant donné au voisinage d'un point*. Dans cet article, nous ne prétendons nullement apporter la solution générale de ce problème inverse dont un peu de réflexion prouve la complexité. Nous ne ferons que quelques remarques. Puissent-elles être suggestives pour la découverte de théorèmes généraux qui permettraient de répondre à la question d'une manière systématique. L'unicité de la solution relève évidemment du problème des corps de même attraction, objet des belles études actuelles de M. Dive. En effet, si deux corps différents répondaient à la question, ils devraient créer le même potentiel newtonien et par suite la même attraction au voisinage du point donné.

Quant à la détermination d'un corps générateur d'un potentiel donné, au voisinage d'un point, il relève pour une grande part de l'étude du prolongement analytique du potentiel à partir du point donné, prolongement au travers des corps générateurs.

Comme nous l'avons montré¹⁾, les arêtes d'un volume attirant ou les frontières d'une surface attirante sont des lignes de ramification pour le potentiel prolongé, de sorte que la détermination de ces arêtes ou de ces frontières revient à l'étude des lignes critiques de la fonction donnée.

§ 1. Sur les singularités des potentiels prolongés au travers des corps générateurs

a) Cas du potentiel ordinaire

Soit σ une portion régulière d'une surface analytique formant un ensemble ouvert et simplement connexe.

Soit $\rho(x, y, z)$ une fonction holomorphe au voisinage de σ et sur cette surface elle-même. Soient $f(u, v)$ et $g(u, v)$ deux fonctions holo-

¹⁾ Mathematische Zeitschrift, Bd. 37, H. 5, p. 739 (1933).
Compositio Mathematica, V. 1, F. 1, p. 69 (1933).

morphes en chaque point de σ , des paramètres u et v de représentation de σ .

En vertu du théorème de Cauchy-Kowalewska, il existe une solution et une seule des équations suivantes

$$(I) \quad \begin{aligned} \Delta p &= 4\pi\rho && \text{dans le voisinage de } o \\ \frac{dp}{dn} &= 4\pi g && \text{sur } \sigma \\ p &= -4\pi g && \text{sur } \sigma. \end{aligned}$$

La fonction p sera holomorphe au voisinage de σ ; les singularités de p seront toutes situées à une distance supérieure à un nombre positif de la surface σ .

Soit en plus τ un volume limité, partiellement ou totalement, par la surface σ , ce volume étant tout entier dans la région où la fonction p est holomorphe.

Envisageons alors le potentiel suivant:

$$(2) \quad U = \int \frac{\rho}{r} d\tau + \int \frac{g}{r} d\tau + \int f \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma$$

créé par le volume τ rempli d'une matière de densité ρ , par la simple couche g sur σ et la double f étalée sur σ . Le potentiel U est prolongeable de l'extérieur de τ au travers de σ et l'on a, à l'intérieur de τ

$$U_{e\sigma i} - U_i = U_{\text{extérieur prolongé}} - U_{\text{intérieur}} = p.$$

La fonction p , nous l'appellerons *fonction de passage* au travers de σ . Elle est, comme on vient de le voir, égale au potentiel calculé primitivement à l'extérieur e de τ puis prolongé jusqu'en un point intérieur i moins le potentiel calculé directement en ce point. Tel est un résultat fondamental établi par E. Schmidt²⁾ et J. Hadamard.

b) *Cas du potentiel logarithmique.*

Il est bien facile d'étendre cette proposition d'E. Schmidt au cas du potentiel logarithmique. La surface σ devient un arc c de courbe analytique et régulière, formant un ensemble fermé. La densité ρ est une fonction holomorphe sur l'arc lui-même en les deux variables x et y ; ρ est donc holomorphe aussi au voisinage de c . Enfin, g et f sont deux fonctions holomorphes du paramètre s de représentation de l'arc envisagé.

²⁾ Mathematische Annalen, Bd. 68, 107—118 (1909).

La fonction de passage satisfera à des équations analogues aux précédentes (1), avec le facteur 2π au lieu du facteur 4π . Quant au théorème sur le potentiel prolongé, il subsiste sans modification.

Pour l'un et l'autre potentiels, le théorème de Bruns reste valable, à savoir que le potentiel est holomorphe dans tout domaine où la densité ρ est elle-même holomorphe. Lorsque nous parlons de potentiel sans autre mention, nous entendons le potentiel physique, celui qui est donné par les intégrales portant sur les corps générateurs. Il est univoque dans tout l'espace, mais il se répartit, en général, en plusieurs fonctions holomorphes distinctes, et sitôt qu'une de ces fonctions est prolongée analytiquement au travers des surfaces qui limitent ou portent les données, elle ne représente plus en général, au delà de ces surfaces, le potentiel physique.

§ 2. Sur les polydromies des potentiels prolongés

Nous allons montrer rapidement que les prolongements analytiques admettent les frontières des surfaces attirantes où les arêtes des volumes attirants comme lignes critiques autour desquelles s'échangent en général une infinité de déterminations du potentiel prolongé.

En effet, envisageons tout d'abord une couche mixte étalée sur une surface σ , c'est-à-dire l'ensemble d'une simple couche g et d'une double couche f étalées sur σ . Le potentiel envisagé est donc de la forme

$$U = \int \frac{g}{r} d\sigma + \int f \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma.$$

Soit p la fonction de passage répondant à la solution du problème (1) de Cauchy avec $\rho \equiv 0$. Cette fonction est harmonique. Partons d'un point P voisin de la surface, traversons celle-ci pour aboutir en un point M de l'autre côté, dans le sens de la normale positive. L'on aura, en vertu de la relation de M. E. Schmidt,

$$U_{PM} = U_M + p.$$

Puis revenons en P par un chemin qui évite la surface σ mais reste dans le domaine où la fonction de passage est holomorphe. Le long de ce trajet de retour, le potentiel calculé primitivement en M reste harmo-

nique et sa valeur en P coïncide avec le potentiel primitif. On aura par conséquent

$$U_{PMP} = U_P + p.$$

Et si l'on faisait n fois le tour de la frontière F de σ , l'on aurait

$$U_{\text{arrivée}} - U_{\text{départ}} = np.$$

La frontière F de la surface σ est donc une ligne de ramification autour de laquelle s'échangent une infinité de branches du potentiel prolongé.

Envisageons maintenant un volume attirant τ , limité par deux surfaces σ et σ' qui se coupent suivant une arête A . Ces deux faces peuvent être supposées chargées ou non de simple ou de double couche, qu'importe. Pour simplifier, nous supposerons qu'elles ne portent aucune densité superficielle. Le potentiel considéré se réduit donc à

$$U = \int \frac{\rho}{r} d\tau.$$

La fonction de passage p , pour l'entrée dans τ au travers de σ , doit répondre aux conditions suivantes

$$\Delta p = 4\pi\rho \text{ au voisinage de } \sigma; \quad p = 0, \quad \frac{dp}{dn} = 0 \text{ sur } \sigma.$$

Si l'on entrait par σ' , l'on aurait une autre fonction de passage p' répondant aux conditions

$$\Delta p = 4\pi\rho \text{ au voisinage de } \sigma'; \quad p' = 0, \quad \frac{dp'}{dn} = 0 \text{ sur } \sigma'.$$

Maintenant, partons d'un point P , traversons σ pour aller jusqu'en un point M intérieur à τ . L'on aura

$$U_{P\sigma M} = U_M + p.$$

Or, la fonction U_M est holomorphe dans τ , en vertu du théorème de Bruns et les fonctions p et p' sont holomorphes au voisinage de l'arête, en vertu du théorème de Cauchy. Sortons maintenant de τ en traversant σ' , nous avons

$$U_{M\sigma'P} = U_P - p' \quad \text{d'où} \quad U_{P\sigma M\sigma'P} = U_P + p - p'.$$

Par conséquent, le potentiel prolongé le long d'un circuit suffisamment petit et décrit autour de l'arête, admet une fonction période égale à la différence des deux fonctions de passage au travers des deux faces.

En résumé, les singularités d'un potentiel newtonien prolongé au travers du corps qui lui donne naissance sont les arêtes du corps où les frontières des surfaces attirantes. A part ces singularités-là qui sont des lignes critiques, le potentiel prolongé n'admet que les singularités des fonctions de passage ou des différences des fonctions d'entrée et de sortie. La recherche de ces dernières se ramène à la solution du problème de Cauchy-Kowalewska. Le potentiel logarithmique donne lieu à des propositions qui sont exactement les mêmes, les lignes de ramification devenant des points de ramification. Pour des plans, des sphères, des cylindres, des cônes, des circonférences, des segments de droites homogènes, les fonctions de passage sont extrêmement faciles à trouver. Pour les plans et les droites, elles sont harmoniques dans tout l'espace, de sorte que les singularités des potentiels prolongés de corps tels que : un volume polyédral, un polygone, une surface polygonale, une surface polyédrale, chargées de simples couches homogènes, se réduisent aux arêtes du polyèdre ou aux sommets du polygone, qui sont des lignes critiques ou points critiques.

§ 3. Sur les corps équipotentiants et un certain problème de Cauchy³⁾

Soient σ une surface fermée régulière et analytique limitant un volume τ simplement connexe, puis $\rho(x, y, z)$ une fonction holomorphe sur l'ensemble $\tau + \sigma$, enfin, g et f deux fonctions holomorphes des paramètres u et v de représentation propre de σ . Envisageons à nouveau les deux potentiels, pris à l'extérieur e de σ , et à l'intérieur i de σ :

$$\int \frac{\rho}{r} d\tau + \int \frac{g}{r} d\sigma + \int f \frac{d^I}{dn} d\sigma = \begin{cases} U_e & \text{dans } e \\ U_i & \text{dans } i. \end{cases}$$

Soit γ la solution du problème de Cauchy:

$$(I) \quad \Delta\gamma = \rho \text{ au voisinage de } \sigma; \quad \frac{d\gamma}{dn} = g, \quad \gamma = -f \text{ sur } \sigma.$$

Nous prétendons que les trois propositions suivantes sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles s'impliquent mutuellement:

- a) $U_e \equiv 0$
- b) γ est holomorphe dans τ tout entier
- c) $U_i = -4\pi\gamma$ au voisinage de σ du côté de i .

³⁾ La bibliographie est tellement vaste sur ces sujets que je ne puis garantir l'absolue nouveauté des propositions des §§ 3, 4 et surtout 5; mais il fallait les mentionner ici puisqu'elles relèvent de la théorie des corps équipotentiants. Poincaré, Hadamard et Paul Lévy ont certainement formulé des propositions analogues.

C'est presque évident en vertu de la relation de M. Schmidt.

L'on a :

$$U_{e\sigma i} = U_i + 4\pi\gamma$$

et U_i est holomorphe dans z en vertu du théorème de Bruns. Alors :

1. a) implique c) et γ est holomorphe dans z tout entier d'où b).
2. b) implique que U_e , qui est harmonique et nul à l'infini, soit encore harmonique dans z et par conséquent U_e est identiquement nul, d'où a) et par suite c).
3. c) implique $U_{e\sigma i} \equiv 0$ d'où $U_e \equiv 0$ et par suite a) et b).

Donc pour que le problème (1) admette une solution holomorphe dans z , il faut et il suffit que U_e soit identiquement nul et la solution est alors

$$\gamma = -\frac{U_i}{4\pi}.$$

En particulier, pour que, avec les deux données : de Neumann $\frac{d\gamma}{dn} = g$ et de Dirichlet $\gamma = -f$ sur σ , la fonction γ soit harmonique dans z , il faut et il suffit que l'on ait

$$\int \frac{g}{r} d\sigma + \int f \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 0 \text{ dans } e.$$

Le potentiel de simple couche de densité g doit être équivalent dans e avec le potentiel de double couche de densité f et cette condition est suffisante. La solution est alors donnée par le premier membre pris à l'intérieur et divisé par 4π .

§ 4. Cas de données non analytiques

Soit S une surface fermée qui divise l'espace en deux régions seulement, l'une intérieure z , l'autre extérieure e . Nous supposons que toute portion de S , suffisamment petite, puisse être représentée par l'équation $z = z(x, y)$, par un choix convenable des axes, la fonction z admettant des dérivées partielles premières et secondes continues. Soient, enfin, f et g deux fonctions continues sur S et ρ une fonction continue sur l'ensemble $z + S$ et satisfaisant en chaque point de z à une condition de Hölder.

Envisageons le potentiel U suivant :

$$U = \int \frac{\rho}{r} dz + \int \frac{g}{r} dS + \int f \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} dS = \begin{cases} U_e & \text{dans } e \\ U_i & \text{dans } z. \end{cases}$$

En vertu de propriétés connues et que l'on trouve dans l'ouvrage de O. Kellogg: Foundations of Potential Theory, pages 150 à 172, le po-

tentiel U_e est continu sur l'ensemble $e + S$ et U_i sur l'ensemble $i + S$, ces deux fonctions étant définies sur S par les valeurs limites.

Prenons deux points Y et E sur une même normale en P à S et équidistants de P . L'on aura lorsque ces deux points tendent vers P

$$(2) \quad \lim (U_Y - U_E) = 4\pi f_P.$$

En effet, les potentiels de simple couche et celui de volume restent continus au travers de S , tandis que le potentiel de double couche subit la discontinuité exprimée par (2).

En vertu des propriétés connues (voir O. Kellog) l'on peut également écrire

$$\lim \left[\left(\frac{dU_i}{dn_i} \right)_Y - \left(\frac{dU_e}{dn_i} \right)_E \right] = -4\pi g.$$

Cette limite serait nulle pour le potentiel ordinaire et pour celui de double couche, et pour celui de simple couche elle a bien la valeur indiquée.

D'autre part, l'équation de Poisson est vraie dans i , à cause de la condition de Hölder :

$$\Delta U_i = -4\pi \rho.$$

Supposons maintenant que U_e soit identiquement nul. Nous aurons

$$(3) \quad f = \frac{1}{4\pi} \lim U_Y, \quad g = -\frac{1}{4\pi} \lim \frac{dU_i}{dn_i}, \quad \rho = -\frac{1}{4\pi} \Delta U_Y.$$

Et réciproquement, si les relations (3) ont lieu, f , g , ρ étant des fonctions continues, U_e est identiquement nul. Cette réciproque n'est autre que l'identité de Green.

En d'autres termes: Pour qu'il existe une fonction U telle que l'on ait

$$f^+ = U \text{ et } g^+ = \frac{dU}{dn} \text{ sur } S \text{ et } \rho^+ = \Delta U \text{ à l'intérieur de } S; f^+, g^+$$

étant continues sur S , ρ^+ satisfaisant à une condition de Hölder à l'intérieur i de S et étant continue sur l'ensemble $i + S$, il faut et il *suffit* que l'on ait:

$$\int \frac{\rho^+}{r} di + \int \frac{g^+}{r} dS - \int f^+ \frac{d^1}{dn_i} dS = 0 \text{ à l'extérieur de } S.$$

La solution U est alors donnée par la valeur du premier membre calculé à l'intérieur de S et divisé par -4π .

Si ρ^+ est identiquement nulle, le problème revient à chercher une fonction harmonique à l'intérieur de S et prenant sur S des valeurs données f^+ tandis que sa dérivée normale prend également des valeurs données g^+ . Pour que la solution existe, il faut et il *suffit* que l'on ait

$$\int \frac{g^+}{r} dS - \int f^+ \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} dS = 0 \text{ à l'extérieur de } S.$$

La solution serait unique et donnée par la valeur du premier membre à l'intérieur de S , divisée par -4π .

Dans ce dernier énoncé, on peut intervertir les mots intérieur et extérieur, l'on a affaire alors à la détermination d'une fonction harmonique hors de S , et nulle à l'infini.

La résolution de ces problèmes avec la double condition sur la frontière est donc intimement liée avec la théorie des corps équipotentiels. C'est ce qu'il m'importait de montrer.

§ 5. Sur la réduction des fonctions harmoniques à des potentiels de surface

On sait qu'une fonction harmonique h dans un domaine D simplement connexe peut être engendrée par un potentiel mixte pris sur une surface fermée S située dans D . L'on a en effet :

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \frac{dh}{dn} - h \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) dS = \begin{cases} h & \text{dans } i \\ 0 & \text{dans } e. \end{cases}$$

Si φ représente une fonction harmonique sur l'ensemble $e + \sigma$, nulle à l'infini, elle satisfait à la relation

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) dS = \begin{cases} 0 & \text{dans } i \\ -\varphi & \text{dans } e. \end{cases}$$

La soustraction membre à membre donnera h dans i et φ dans e :

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \left(\frac{dh}{dn} - \frac{d\varphi}{dn} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int (\varphi - h) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS = \begin{cases} h & \text{dans } i \\ \varphi & \text{dans } e. \end{cases}$$

Il existe donc une infinité de manières d'engendrer h dans i par le choix arbitraire de φ . L'on sait d'ailleurs par la théorie de Fredholm que la

solution du problème de Dirichlet s'exprime par un potentiel de double couche et la solution du problème de Neumann par un potentiel de simple couche et par conséquent: toute fonction harmonique h peut se mettre sous les deux formes:

$$h = \int \frac{g}{r} dS \qquad h = \int f \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS.$$

Il est donc facile de voir qu'une fois S donnée la densité g sera unique ainsi que la densité f , sauf pour la représentation de h à l'extérieur de S , car alors f admet une constante additive arbitraire. Dans tous les cas que nous venons de rappeler les potentiels sont pris sur des surfaces fermées, c'est-à-dire sans frontière. Si h était engendrée par d'autres corps situés à l'extérieur de S , ces couches seraient équipotentiantes avec les corps donnés, elles forment donc une famille très générale de corps de même attraction, puisque l'on peut choisir S et φ arbitrairement. Le potentiel U_e du § 1 était prolongeable au travers de σ dans une région allant de σ à une surface intérieure σ' , il pouvait donc être engendré par une simple ou une double couche, ou encore une infinité de couches mixtes étalées sur une surface S comprise entre σ et σ' .

Ainsi le potentiel à l'extérieur des corps attirants considérés au § 1 peut être exprimé par une couche équipotentielle et située à l'intérieur de ces corps. C'est en construisant de telles couches que M. Herglotz dans ses belles recherches démontre la possibilité du prolongement analytique du potentiel extérieur au travers de certaines surfaces limites.

Les couches étalées sur des surfaces fermées admettent donc des déformations continues dépendant d'un paramètre et qui laissent invariant le potentiel dans une certaine région de l'espace. Nous montrerons que les couches étalées sur des surfaces ouvertes n'admettent pas toujours des telles déformations.

§ 6. Sur les couches ouvertes et les déformations à potentiel invariable

Soient, dans les conditions du § 1: S une surface ouverte, puis g et f deux fonctions holomorphes sur S . Envisageons le potentiel mixte:

$$U = \int \frac{g}{r} dS + \int f \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS$$

et la solution γ du problème suivant :

$$\Delta\gamma = 0 \text{ au voisinage de } S; \frac{d\gamma}{dn} = g, \gamma = -f \text{ sur } \sigma;$$

γ est harmonique dans un volume V simplement connexe contenant S à son intérieur.

Le potentiel U s'exprime donc au moyen de la fonction de passage γ

$$U = \int (\gamma) dS \quad \text{avec} \quad \int (\gamma) dS = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \frac{d\gamma}{dn} - \gamma \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) dS.$$

Maintenant, soit S' une surface ouverte voisine de la première et située tout entière dans V , soient g', f' puis γ' les éléments correspondant à g, f, γ et supposons que l'on ait

$$\int (\gamma) dS = \int (\gamma') dS'$$

au voisinage d'un point P . Je prétends que les surfaces devraient avoir même frontière. Sans quoi il serait possible de suivre un chemin joignant le point P considéré à un point de la frontière F' de S' sans rencontrer la frontière F . Mais alors F' serait une singularité pour le second de ces potentiels et pas pour le premier, ce qui ne peut pas être.

Donc deux couches étalées sur des surfaces ouvertes, voisines, ne peuvent être équipotentiantes que si les frontières des deux surfaces coïncident.

Cette coïncidence étant prouvée, la fonction période serait la même pour un circuit autour de la frontière commune. L'on aurait donc $\gamma \equiv \gamma'$. Dès lors, s'il s'agit d'un potentiel mixte, l'on aura, en vertu de l'identité de Green

$$\int (\gamma) dS = \int (\gamma) dS'$$

à l'extérieur de la surface fermée $\Sigma = S + S'$ tant qu'aucune singularité de γ ne pénètre par S' dans l'intérieur de Σ et en particulier tant que S' reste dans V . Ainsi *il existe une infinité de couches mixtes ouvertes équipotentiantes voisines d'une couche ouverte donnée.*

Mais, si l'on exige que les deux couches soient simples, ou toutes les deux doubles, il en va autrement.

En effet, si elles sont toutes les deux simples l'on doit avoir $\gamma = 0$ sur S et sur S' , d'où, puisque γ est harmonique à l'intérieur de $S + S'$: $\gamma \equiv 0$; et les densités, données par $g = \frac{d\gamma}{dn}$, seraient toutes les deux nulles.

Donc: *Deux simples couches ouvertes équipotentialantes ne sauraient être voisines et en particulier infiniment voisines.*

Si les couches sont toutes les deux doubles l'on devrait avoir $\frac{d\gamma}{dn} = 0$ sur $S + S'$, d'où $\gamma = C = \text{constante}$, à l'intérieur de la surface fermée $S + S'$. Alors le potentiel à l'extérieur se réduirait à l'angle solide, sous lequel apparaissent les deux surfaces vues de P , multiplié par C . Il y aurait réduction à une intégrale de Gauss.

Donc: *Deux doubles couches ouvertes équipotentialantes ne sauraient être voisines et en particulier infiniment voisines que si la densité est constante et la même pour les deux couches.* (à suivre)

(Reçu le 18 février 1934)