

Une remarque sur les équations fonctionnelles.

Autor(en): **Kac, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-10179>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Une remarque sur les équations fonctionnelles

Par M. KAC, Lwów

Dans cette note nous donnons une méthode qui permet de démontrer que les solutions de certaines équations fonctionnelles, supposées mesurables, sont continues. Notre méthode est différente de toutes les méthodes antérieures, et il nous semble qu'elle est plus simple, car elle n'emploie de la théorie des fonctions d'une variable réelle que le fait, qu'une fonction mesurable et bornée est intégrable.

Considérons l'équation bien connue

$$f(x+y) = f(x) + f(y)^{1)} \quad (1)$$

et supposons qu'il existe une solution mesurable; nous allons démontrer que cette solution est continue, ce qui avec l'égalité évidente

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x) \quad (p, q = \text{entiers}) \quad (2)$$

conduit à $f(x) = \alpha x$ [$\alpha = f(1)$].

En effet, soit a un nombre tel, que

$$\int_0^a e^{if(y)} dy \neq 0 \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (3)$$

(cette intégrale existe, car $e^{if(y)}$ est mesurable et bornée); nous avons évidemment d'après (1)

$$e^{if(x)} \int_0^a e^{if(y)} dy = \int_0^a e^{if(x+y)} dy = \int_x^{a+x} e^{if(y)} dy,$$

donc

$$e^{if(x)} = \frac{\int_x^{a+x} e^{if(y)} dy}{\int_0^a e^{if(y)} dy}. \quad (4)$$

¹⁾ *W. Sierpiński*, Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Fund. Math.* (1920), p. 116—122.

S. Banach, Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *ibid.* p. 123—124.

Nous voyons donc que $e^{if(x)}$ est continue et d'après (2)

$$e^{if(x)} = e^{i\alpha x} \quad (\alpha = f(1)) \quad , \quad (5)$$

donc

$$f(x) = \alpha x + 2\pi K(x),$$

$K(x)$ étant une fonction qui prend seulement les valeurs entières, et qui remplit évidemment (d'après (2)) l'équation

$$K\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}K(x)$$

pour tous les p, q entiers. On voit sans peine que $K(x) \equiv 0$; ainsi notre proposition est démontrée.

La même méthode permet aussi de résoudre les équations

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (f(x) = \alpha \lg |x|)$$

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) + f(y) \quad (f(x) = \alpha x^2)$$

et beaucoup d'autres.

(Reçu le 3 décembre 1936.)