Cauchy'sches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbeträge der Lösungen beziehenden Abschätzungen.

Autor(en): **Schauder, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10186

Cauchy'sches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbeträge der Lösungen beziehenden Abschätzungen [1]

Von J. Schauder, Lwów

§ 1. Man verdankt A. Haar[2]) eine wichtige Abschätzung, von der er in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung Gebrauch macht. Haar betrachtet einmal stetig differenzierbare Funktionen $u(x, y)$, welche eine Ungleichung der Form

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant A\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + B|u| + \delta \tag{1}$$

mit positiven Konstanten A, B, δ erfüllen. Das Bestehen von (1) wird in einem durch die Geraden

$$y = 0\,,\ y = \frac{1}{A}(x - x')\,,\ y = -\frac{1}{A}(x - x'')\ ;\ x' < x'' \tag{2}$$

begrenzten Dreieck $\varDelta$ vorausgesetzt. Ist

$$|u(x, 0)| \leqslant M, \tag{3}$$

so gilt nach ihm im ganzen $\varDelta$ die Abschätzung

$$|u(x,y)| \leqslant Me^{By} + \delta\frac{e^{By} - 1}{B}\,. \tag{4}$$

Ähnliches hat man für mehrere unabhängige Veränderliche.

Die Abschätzung (4) wird von Haar dazu benutzt, um den *Eindeutigkeitsbeweis* für das Cauchy'sche Problem einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung unter geringen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu liefern. Es soll nun hier gezeigt werden, daß auf solchen

---

[1]) Die Hauptergebnisse dieser Arbeit wurden in der Sitzung vom 18. I. 1936 der poln. math. Gesellschaft (Abteilung Lwów) mitgeteilt.

[2]) *A. Haar*, Über Eindeutigkeit und Analyzität der Lösungen partieller Differentialgleichungen, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 1928; Zur Charakteristikentheorie, Acta Lit. ac Scient. Univ. Szeged IV (1928), p. 103—114.

Abschätzungen der gesuchten Funktionen, die sich auf ihre *Absolutbeträge* beziehen (etwa auf den Abschätzungen von Haar), eine *Lösungsmethode* des Cauchy'schen Problems für nichtlineare partielle Differentialgleichungen gegründet werden kann. In der Darstellung dieser Methode liegt der eigentliche Zweck dieser Arbeit. Nur nebenbei sei also noch bemerkt, daß die Beweise sich bei Systemen von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung durchführen lassen, woraus sich Schlüsse für Differentialgleichungen höherer Ordnung ergeben. Das Verhalten dieser Differentialgleichungen ist durch gewisse Matrizen charakterisiert, die in manchen Fällen gleiche reelle Eigenwerte besitzen können, d. h., die Differentialgleichungen brauchen nicht streng hyperbolisch zu sein. Solche Abschätzungen der Absolutbeträge werden vermutlich auch bei komplizierteren Differentialgleichungen sich als nützlich erweisen. Ihr Vorteil beruht hauptsächlich darauf, daß bei ihrer Anwendung die Anzahl der auszuführenden Differentiationen nicht mit der Anzahl der unabhängigen Variablen ins Unendliche wächst.

§ 2. Aus dem Obigen ergibt sich für einmal stetig differenzierbare Funktionen u, die in einem durch (2) bestimmten Dreiecke Δ Lösungen einer linearen Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\, u + d(x, y) \tag{5}$$

sind, folgendes: ist

$$|a| \leqslant A, |b| \leqslant B, |d| \leqslant \delta \tag{6}$$

und besteht (3) auf $y = 0$, so hat man auch (4) in Δ.

Wollen wir das Ergebnis von Haar zur Abschätzung der ersten Ableitungen der Lösungen u von (5) benutzen, so müssen wir u als *zweimal* und a, b, d als *einmal* stetig differenzierbar annehmen. Für $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ bekommt man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = a\frac{\partial p}{\partial x} + (b + a_x)p + b_x u + d_x \tag{7}$$

und daraus folgt eine Abschätzung von $|p|$ und wegen (5) auch von $|q|$ insbesondere durch die oberen Grenzen von $|a|$, $|b|$, $|d|$, $|a_x|$, $|b_x|$, $|d_x|$. Es ist nun für das Folgende wichtig zu bemerken, daß in (7) als Koeffizient der ersten Ableitung nach x, d. h. von $\dfrac{\partial p}{\partial x}$, dieselbe Funktion $a(x, y)$, wie in (5) auftritt. Also gilt die verlangte Abschätzung von $|p|, |q|$ in demselben Dreiecke Δ, wie früher [vgl. (2)]. So fortfahrend erhalten wir in Δ Schranken auch für höhere Ableitungen. Die Ableitungen j-er Ordnung $D_j u$ werden durch Schranken für $D_h a$, $D_h b$, $D_h d$ mit $0 \leqslant h \leqslant j$ abgeschätzt. Dabei sollen aber die Ableitungen $D_{j+1} u$ der *nächstfolgenden Ordnung* $j+1$ *existieren und stetig sein*. Unsere weiteren Überlegungen (§§ 6, 7) werden zeigen, daß man sich von dieser Bedingung im gewissen Sinne befreien kann.

§ 3. Um $|p|$, $|q|$ abzuschätzen, braucht man nicht die Existenz aller Ableitungen $D_1 a$, $D_1 b$, $D_1 d$ vorauszusetzen. Wie aus (7) folgt, erhält man diese Abschätzung, sobald a_x, b_x, d_x vorhanden sind. Jetzt soll bewiesen werden, daß, falls $a \neq 0$ in Δ, genauer, falls

$$|a| \geqslant \mu > 0 \qquad \text{in } \Delta, \tag{8}$$

man zu *derselben Abschätzung gelangt, wenn an Stelle der Existenz von* a_x, b_x, d_x *die Existenz der* a_y, b_y, d_y *gefordert wird.*[3]) In der Tat, man hat dann

$$p = \frac{1}{a} q - \frac{b}{a} u - \frac{d}{a} \tag{9}$$

und die Differentiation von (5) nach y ergibt wegen (9) eine Differentialgleichung für q; die Haar'sche „a priori" Abschätzung ist wieder anwendbar.

§ 4. Für *polynomiale* a, b, d und Anfangswerte $\varphi(x) = u(x, 0)$ gilt der folgende Hilfssatz: Es gibt eine Zahl $\eta > 0$, *die nur von* a, b — nicht aber von d und φ — abhängt, so daß die Lösung u von (5) für $x' - \eta \leqslant x \leqslant x'' + \eta$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$ existiert und dort unendlich oft differenzierbar ist. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, für jedes x die Lösung nach der Majorantenmethode in der Umgebung $(x - \varrho, x + \varrho)$, $|y| \leqslant \varrho$ zu bestimmen. Man kann offensichtlich die Anfangswerte als Null annehmen. Es ergibt sich dann, daß der Konvergenzradius ϱ nur von der Majorante für a, b abhängt. Ich will die Einzelheiten der Rechnung nicht näher durchführen, weil ein ähnlicher Hilfssatz, sogar in einem komplizierteren Falle, schon früher von mir benutzt wurde[4]). Offensichtlich gilt unser Hilfssatz auch dann, wenn die Anfangs-

[3]) Diese andersgearteten Voraussetzungen werden für uns in § 8 von Nutzen sein.

[4]) *J. Schauder*, Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen, Fundamenta Math. 24 (1935), p. 213—246, insbesondere Hilfssatz III, p. 229.

werte auf einem Geradenstück $y = \text{const.}$ vorgegeben sind, sobald nur dieses Geradenstück innerhalb einer festen beschränkten Menge, z. B. innerhalb des Dreieckes Δ verbleibt.

§ 5. Auch jetzt sollen a, b, d Polynome sein. Von φ wollen wir aber nur annehmen, daß es *unendlich oft* differenzierbar ist. Sei auch

$$|a| \leqslant A.$$

Dann ist die Lösung u im *ganzen* durch die Zahl A bestimmten Δ [vgl. (2)] vorhanden und dort *unendlich oft* differenzierbar. Ist nämlich $\eta > 0$, die in § 4 bestimmte Zahl, so teilen wir Δ durch Schnitte $y = \text{const.}$ in etwa i Trapeze $T_s (s = 1, 2, \ldots, i)$ von der Höhe $\leqslant \eta$ ein[5]). Wir approximieren φ durch Polynome φ_n derart, daß gleichmäßig

$$\frac{d^j \varphi_n}{dx^j} \to \frac{d^j \varphi}{dx^j} \quad \text{für } 0 \leqslant j \leqslant j_0 \ (j_0 \text{ fest aber beliebig})\,.$$

Nach § 4 sind im ganzen T_1 unendlich oft differenzierbare Lösungen u_n von (5) mit den Anfangswerten φ_n vorhanden. Wegen der Abschätzungen des § 2 konvergieren diese Lösungen u_n in T_1 mitsamt ihren Ableitungen der Ordnungen $\leqslant j_0$ gleichmäßig nach einer Funktion u, die offensichtlich in T_1 eine Lösung von (5) mit den Anfangswerten φ darstellt. Wegen der erwähnten Konvergenz besitzt u in T_1 Ableitungen j_0-er Ordnung, weil aber j_0 beliebig war, so ist u in T_1 unendlich oft differenzierbar. Die unendlich oft differenzierbaren Werte von u auf $y = \eta$ betrachten wir als die Anfangswerte in T_2. Das Verfahren kann also in T_2 wiederholt werden und die Lösung läßt sich auf $T_1 + T_2$ erweitern. So fortfahrend erschöpfen wir in i Schritten das ganze Δ.

§ 6. Wir wollen nunmehr einen wesentlichen Schritt weiter gehen und nehmen $a, b, d, \varphi(x) = u(x, 0)$ als stetig an. Die Funktionen a, b, d sollen überdies in der *Veränderlichen* y eine Lipschitzbedingung und φ eine solche in x erfüllen. Es gilt also fast überall in Δ

$$|a_y| + |b_y| + |d_y| \leqslant L. \tag{10}$$

Wir setzen auch voraus, daß die Ungleichungen (6), (8)

$$0 < \mu \leqslant |a| \leqslant A, \quad |b| \leqslant B, \quad |d| \leqslant \delta \tag{11}$$

in Δ bestehen bleiben. Wir approximieren a, b, d, φ durch entsprechende Polynome a_n, b_n, d_n, φ_n derart, daß

[5]) Das letzte Trapez T_i artet in ein Dreieck aus.

$$\mu-\varepsilon \leqslant |a_n| \leqslant A+\varepsilon,\ |b_n| \leqslant B+\varepsilon,\ |d_n| \leqslant \delta+\varepsilon\ (\varepsilon>0,\ \text{sonst beliebig}) \tag{12}$$

und daß zugleich fast überall

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial a_n}{\partial y} = a_y\,,\ \lim_{n=\infty} \frac{\partial b_n}{\partial y} = b_y\,,\ \lim_{n=\infty} \frac{\partial d_n}{\partial y} = d_y\,,\ \lim_{n=\infty} \frac{d\varphi_n}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} \tag{13}$$

mit

$$\left|\frac{\partial a_n}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial b_n}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial d_n}{\partial y}\right| \leqslant L+\varepsilon \tag{14}$$

$$\left|\frac{d\varphi_n}{dx}\right| \leqslant \underset{x'\leq x\leq x''}{\mathrm{Max}} |\varphi'| + \varepsilon$$

besteht[6]). Wegen $|a_n| \leqslant A+\varepsilon$ sind nach § 5 die Lösungen u_n von

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = a_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + b_n u_n + d_n\ ;\ u_n(x,0) = \varphi_n(x) \tag{15}$$

in dem durch die Geraden

$$y=0\,,\ y=\frac{1}{A+\varepsilon}(x-x')\,,\ y=-\frac{1}{A+\varepsilon}(x-x'')\ ;\ x'<x''$$

begrenzten Dreieck Δ_ε vorhanden und genügen dort nach §§ 2, 3 in Beachtung von (12), (14) den gemeinsamen Abschätzungen

$$|u_n|+|p_n|+|q_n| \leqslant C, \tag{16}$$

wobei die Konstante C von A, B, δ, L, μ, max $|\varphi|$, max $|\varphi'|$ abhängt, was wir durch die Schreibweise

$$C = C(A, B, \delta, L, \mu, \max|\varphi|, \max|\varphi'|) \tag{17}$$

andeuten. Aus (16) folgt, daß die u_n nach *beiden* Variablen x, y *gemeinsame* Lipschitzbedingungen erfüllen. Somit gibt es eine Teilfolge, die wir wieder mit u_n bezeichnen, die nach einer Funktion u gleichmäßig konvergiert. Diese genügt in Δ einer Lipschitzbedingung mit der Konstante C [vgl. Formel (17)], genauer

$$|u|+|p|+|q| \leqslant C. \tag{18}$$

Da ε beliebig war, so existiert u im ganzen Δ, und es besteht dort (18).

---

[6]) Die Möglichkeit einer solchen Approximation folgt aus den bekannten Tonelli'schen Untersuchungen.

Zuletzt soll noch gezeigt werden, daß u fast überall in Δ (5) erfüllt. Um dies zu beweisen, schreiben wir (15) in der Form

$$\frac{1}{a_n} q_n = p_n + \frac{b_n}{a_n} u_n + \frac{d_n}{a_n} , \tag{19}$$

was wir wegen (12) tun können, und integrieren (19) nach x, y in dem Durchschnitte R_{xy} des Rechteckes $x' \leqslant s \leqslant x$, $0 \leqslant \lambda \leqslant y$ mit dem Dreieck Δ_ε. Wir erhalten dann aus (19), nach einer partiellen Integration links und rechts

$$-\int\limits_{R_{xy}}\int u_n \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{a_n}\right) dx\,dy + \int\limits_{\gamma} \frac{u_n}{a_n} dx = \int\limits_{\gamma} u_n\,dy + \int\limits_{R_{xy}}\int \left(\frac{b_n}{a_n} u_n + \frac{d_n}{a_n}\right) dx\,dy . \tag{20}$$

Hier bezeichnet γ den Rand des Gebietes R_{xy}. Nach dem Grenzübergang in (20) bekommt man in Berücksichtigung von (13), (14)

$$-\int\limits_{R_{xy}}\int u \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{a}\right) dx\,dy + \int\limits_{\gamma} \frac{u}{a}\, dx = \int\limits_{\gamma} u\,dy + \int\limits_{R_{xy}}\int \left(\frac{b}{a} u + \frac{d}{a}\right) dx\,dy$$

und, wenn wir wieder partiell umformen,

$$\int\limits_{R_{xy}}\int \frac{u_y}{a}\, dx\,dy = \int\limits_{R_{xy}}\int \left(u_x + \frac{b}{a} u + \frac{d}{a}\right) dx\,dy ,$$

woraus $q = ap + bu + d$ fast überall folgt.

Wir wollen das Ergebnis zusammenfassen: *wenn die stetigen Funktionen a, b, d in y, und die Funktion φ in x Lipschitzbedingungen genügen, dann gibt es — falls man noch das Bestehen der Abschätzungen* (10), (11) *voraussetzt — in Δ eine Funktion u, die nach beiden Variablen x, y eine Lipschitzbedingung erfüllt, auf $y = 0$ die Anfangswerte $\varphi(x)$ annimmt und in Δ fast überall* (5) *erfüllt. Überdies ist* $|u| + |p| + |q| \leqslant C$ [vgl. (17, (18)].

Bemerkung: Man kann dasselbe behaupten, wenn für a, b, d statt einer Lipschitzbedingung in y eine solche in x vorausgesetzt wird.

§ 7. Um die Existenz fast überall der *zweiten* Ableitungen zu beweisen, fügen wir den Voraussetzungen des § 6 noch folgende hinzu: 1. *a, b, c genügen auch in x Lipschitzbedingungen und die a_x, b_x, d_x erfüllen eine Lipschitzbedingung in y.* Neben (11) gelte also noch

$$|a_x| + |b_x| + |d_x| + |a_{xy}| + |b_{xy}| + |c_{xy}| \leqslant L , \tag{21}$$

2. $\varphi'(x)$ erfüllt eine Lipschitzbedingung.

Die Approximationspolynome des § 6 lassen sich dann derart bestimmen, daß neben (12), (13), (14) auch fast überall in Δ

$$\left|\frac{\partial a_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial b_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial d_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial^2 a_n}{\partial x\,\partial y}\right| \left|\frac{\partial^2 b_n}{\partial x\,\partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2 d_n}{\partial x\,\partial y}\right| \leqslant L + \varepsilon ,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial^2 a_n}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial y} \text{ etc.} \tag{22}$$

gilt. Wird die übliche Bezeichnung für die ersten und zweiten Ableitungen benutzt, so hat man also für p_n, q_n, s_n die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial x} &= \frac{1}{a_n}\frac{\partial p_n}{\partial y} - \left(b_n + \frac{\partial a_n}{\partial x}\right)\frac{p_n}{a_n} - \left(\frac{\partial d_n}{\partial x} + \frac{\partial b_n}{\partial x} u_n\right)\frac{1}{a_n} , \\ \frac{\partial q_n}{\partial y} &= a_n \frac{\partial q_n}{\partial x} + b_n q_n + \frac{\partial a_n}{\partial y} p_n + \frac{\partial d_n}{\partial y} + \frac{\partial b_n}{\partial y} u_n , \\ \frac{\partial s_n}{\partial y} &= a_n \frac{\partial s_n}{\partial x} + \bar{b}_n s_n + \bar{d}_n , \end{aligned} \tag{23}$$

wobei $\bar{b}_n, \bar{d}_n$ Polynome in $a_n, b_n, d_n, \frac{\partial a_n}{\partial x}, \frac{\partial a_n}{\partial y}, \frac{\partial^2 a_n}{\partial x \partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 d_n}{\partial x \partial y}, u_n, p_n, q_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten sind. Wegen (12), (14), (22) lassen die Koeffizienten von (23) in Δ eine gemeinsame Schranke zu. Daraus folgt zuerst nach § 1 die Existenz einer gemeinsamen Schranke für

$$|u_n| + |p_n| + |q_n| + |s_n|$$

und also in Beachtung von $(23)_1$, $(23)_2$ auch einer solchen für $|r_n| + |t_n|$. Durch Grenzübergang bekommt man die verlangte Abschätzung für $|u|, |p|, |q|, |s|, |r|, |t|$. *Setzt man für u, p, q, s, r, t nacheinander $\varrho_i(x, y)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, so lauten diese Abschätzungen in Δ*

$$\begin{aligned} |\varrho_i(x,y)| &\leqslant C_1 \;(\operatorname*{Max}_{y=0} |\varrho_i| + e^{C_1 y} - 1) ; \; i = 1,2,3,4 \\ |\varrho_i(x,y)| &\leqslant C_1 \left(\sum_{k=1}^{4} \operatorname*{Max}_{\Delta} |\varrho_k| + \operatorname*{Max}_{\Delta}\left|\frac{\partial d}{\partial x}\right| + \operatorname*{Max}_{\Delta}\left|\frac{\partial d}{\partial y}\right|\right) ; \; i = 5,6 . \end{aligned} \tag{24}$$

Die Konstante C_1 hängt von A, B, δ, μ, L usw. ab.

Bemerkung: Aus den Voraussetzungen dieses Paragraphen folgt die Stetigkeit der ersten Ableitungen $D_1 u$; (5) besteht also überall in Δ[7].

[7]) In den §§ 1—7 kann man überall das Dreieck Δ durch ein Trapez T ersetzen, dessen parallele Seiten den Gleichungen $y = \text{const.}$ genügen.

§ 8. Wir sind jetzt imstande für die *allgemeine* partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung das Cauchy'sche Problem zu lösen. Nehmen wir diese in der Form

$$q = f(x, y, u, p) \tag{25}$$

an, mit Anfangswerten $\varphi(x)$ auf $y = 0$, *so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit*

$$f_p(x, 0, \varphi, \varphi') \neq 0 \tag{26}$$

voraussetzen. In der Tat läßt sich das stets durch eine Koordinatentransformation $x' = x + \alpha y$, $y' = y$ erreichen. In den neuen Variablen hat man nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial y'} = f\left(x' - \alpha y', y', u', \frac{\partial u'}{\partial x'}\right) - \alpha \frac{\partial u'}{\partial x'} = f'(x', y', u', p'),$$

also $(f'_{p'})_{y'=0} = (f_p)_{y=0} - \alpha \neq 0$ für genügend großes α. Bezeichnen wir die neuen Variablen wieder mit x, y, so darf man auch immer

$$u(x, 0) = (D_1 u)_{y=0} = (D_2 u)_{y=0} = (D_3 u)_{y=0} = 0$$

oder — was auf dasselbe herauskommt —

$$\varphi(x) = f(x, 0, 0, 0) = f_y(x, 0, 0, 0) = f_{yy}(x, 0, 0, 0) \equiv 0 \tag{27}$$

voraussetzen. Dabei geht (26) nicht verloren. Differenzieren wir jetzt (25) nach y, so bekommt man für q die Integrodifferentialgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial y} = f_p \frac{\partial q}{\partial x} + f_u q + f_y, \tag{28}$$

wobei als Argumente in f_p, f_u, f_y die Größen

$$x, y, \int_0^y q\,dy, \int_0^y q_x\,dy \tag{29}$$

auftreten. Es soll nun (28) mit den Anfangswerten $q(x, 0) = 0$ gelöst werden, wobei noch nach dem Vorhergesagten [(27)]

$$q(x, 0) = q_x(x, 0) = q_y(x, 0) = q_{xx}(x, 0) = q_{xy}(x, 0) = 0 \tag{30}$$

gesetzt werden darf. Es sei [vgl. (26)]

$$0 < 2\mu \leqslant |f_p(x, 0, 0, 0)| \leqslant \frac{A}{2}. \tag{31}$$

In dem durch die Geraden $y=0$, $y=\varepsilon$, $y=\frac{1}{A}(x-x')$, $y=-\frac{1}{A}(x-x'')$ begrenzten Trapeze T betrachten wir die Gesamtheit $\mathfrak{S}$ der Funktionen $q(x, y)$, die dort folgenden Bedingungen genügen:

α) $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$ erfüllen in beiden Variablen Lipschitzbedingungen mit einer Konstante l

$$\sum_{i=1}^{2} |D_i q| \leqq l\,,$$

β) Formel (30)[8]),

γ) in T ist

$$0 < \mu \leqq |f_p(x, y, \int_0^y q\,dy, \int_0^y q_x dy)| \leqq A\,.$$

Ist $Q(x, y)$ mit $Q(x, 0) = 0$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = f_p \frac{\partial Q}{\partial x} + f_u Q + f_v$$

in T[9]), wobei als Argumente die einer Funktion q aus $\mathfrak{S}$ entsprechenden Größen (29) auftreten, so überzeugt man sich sofort, daß wegen (27) auch die Werte der Ableitungen $D_i Q\,(i = 0, 1, 2)$ auf $y = 0$ verschwinden, d. h.[10]) auch Q erfüllt β). Wir wollen aber allgemeiner zeigen, daß, falls die Höhe ε des Trapezes T *genügend klein* ist, daß dann auch α) und γ) erfüllt sind, also *Q wieder der Klasse $\mathfrak{S}$ angehört.* Zunächst folgt aus §§ 6, 7, daß Q und ihre Ableitungen erster Ordnung Lipschitzbedingungen erfüllen. $\sum_{i=0}^{2} |D_i Q|$ läßt sich in T abschätzen[11]), da die Funktionen $a = f_p$, $b = f_u$, $d = f_v$ wegen (29) und α) abschätzbare Ableitungen *erster* Ordnung und die *gemischten zweiter* Ordnung fast überall besitzen. Genauer

$$\sum_{i=0}^{1} (|D_i a| + |D_i b| + |D_i d|) + \left|\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2 d}{\partial x\partial y}\right| \leqq K(A, \mu, l).$$

---

8) Es ist zu beachten, daß über $t(x, 0)$ keine Voraussetzung gemacht wird. $t(x, 0)$ braucht überhaupt nicht zu existieren.

9) Vgl. Fußnote 7).

10) $\frac{\partial^2}{\partial y^2} Q(x, 0)$ wird nicht betrachtet. Vgl. Fußnote 8).

11) Diese Abschätzung läßt sich also auch für $\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$ im ganzen T gewinnen.

Da für Q bereits Eigenschaft β) nachgewiesen wurde, haben diese Abschätzungen die Form [(24)]

$$\sum_{i=0}^{1} | D_i Q | + | Q_{xy} | \leqslant C_2 (e^{C_2 y} - 1) , \quad C_2 = C_2 (l , \mu , A) , \tag{32}$$

$$| Q_{xx} | + | Q_{yy} | \leqslant C_2 \left(\sum_{i=0}^{1} \operatorname*{Max}_T |D_i Q| + \operatorname*{Max}_T \left| \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \right| + \operatorname*{Max}_T \left| \frac{d f_y}{dx} \right| + \operatorname*{Max}_T \left| \frac{d f_y}{dy} \right| \right) .$$

Ist ε genügend klein, so ist es für $0 \leqslant y \leqslant \varepsilon$ auch $e^{C_2 y} - 1$, man kann also wegen (32) $\sum_{i=0}^{1} | D_i Q | + | Q_{xy} |$ *unter eine beliebig kleine Größe herabdrücken.* Um dasselbe von $| Q_{xx} | + | Q_{yy} |$ behaupten zu können, müssen wir noch nach $(32)_2$ $\left| \frac{d f_y}{dx} \right| + \left| \frac{d f_y}{dy} \right|$ abschätzen. Nun verschwindet — wieder infolge von β) — $\left| \frac{d f_y}{dx} \right| + \left| \frac{d f_y}{dy} \right|$ für $y = 0$, also ist in T

$$\left| \frac{d f_y}{dx} \right| + \left| \frac{d f_y}{dy} \right| \leqslant C_3 (l , \mu , A , \varepsilon) , \tag{33}$$

wobei wegen Stetigkeit und α) für $\varepsilon \to 0$ auch $C_3 \to 0$. Aus allem diesem folgt: Q erfüllt α) für genügend kleines ε. Die Verifikation von γ) für Q ist nun leicht. Denn wegen β) ist für Q auf jeden Fall auf $y = 0$ (31) erfüllt. Für kleines ε gilt also im ganzen T — man beachte, daß α) für Q besteht —

$$0 < \mu \leqslant | f_p [x , y , \int_0^y Q dy , \int_0^y Q_x dy] | \leqslant A .$$

Die *Funktionaloperation* $Q = Q(q)$ bildet somit die *konvexe* Gesamtheit $\mathfrak{G}$ *auf sich selbst* ab. Wir fassen nun die Gesamtheit $\mathfrak{G}$ der Funktionen q als im Raume E der stetigen Funktionen gelegen auf mit der Normierung

$$||q|| = \operatorname*{Max}_T |q| .$$

Dann erweist sich wegen α) $\mathfrak{G}$ als eine konvexe, *kompakte* und abgeschlossene Menge aus E. Die Operation $Q = Q(q)$ ist dort *stetig* [wegen der *Eindeutigkeit*[12]) der Lösung für lineare Gleichungen und den Ab-

[12]) Der Eindeutigkeitsbeweis für die lineare Gleichung (5) gelingt nach Haar, falls die Lösungen u einmal stetig differenzierbar (allgemeiner, total differenzierbar) sind. Die Stetigkeit der Ableitungen $D_1 q$, $D_1 Q$ folgt aber aus der Bedingung α).

schätzungen (32), (33)]. Wenn aber eine konvexe und abgeschlossene (nicht notwendig kompakte) Menge $\mathfrak{S}$ eines linearen, normierten und vollständigen Raumes stetig auf eine kompakte Teilmenge $Q(\mathfrak{S})$ abgebildet wird, so gibt es bekanntlich einen Fixpunkt[13]). Also gilt für ein passendes q

$$q = Q(q) \ ,$$

d. h. (28) ist lösbar. Setzen wir $u = \int_0^y q\,dy$, so ist u eine Lösung von (25) mit den Anfangswerten 0 w. z. b. w.

§ 9. Unsere Überlegungen lassen sich auf *Systeme* von Differentialgleichungen ausdehnen. Betrachten wir zuerst das *lineare* System

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = \sum_{k=1}^{h} a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \sum_{j=1}^{h} b_{ij} u_j + d_i \ ; \quad i = 1, 2, \ldots, h \ . \tag{34}$$

Wenn die Matrix $\boldsymbol{A} = ||a_{ik}||$ lauter reelle, voneinander verschiedene Eigenwerte besitzt, so gibt es bekanntlich eine andere nichtsinguläre Matrix $\boldsymbol{T}$, so daß $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ eine Diagonalmatrix wird. Die Elemente t_{gs} der Matrix $\boldsymbol{T}$ sind analytische Funktionen der a_{ik}. Die $t_{gs}[a_{11}(x, y), \ldots, a_{hh}(x, y)]$ besitzen also als Funktionen der Variablen x, y Ableitungen derselben Art, wie die Funktionen $a_{ik}(x, y)$. Nach Haar kann man Abschätzungen für (34), die denen des § 1 analog sind, dann gewinnen, wenn

---

[13]) Vgl. *J. Schauder*, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math. 2 (1930), p. 171—180, insb. Satz II. Satz II bleibt auch in solchen linearen, metrischen und vollständigen Räumen bestehen, in welchen jeder Punkt beliebig kleine konvexe Umgebungen besitzt (sogenannte Räume vom Typus B_0). Satz I dieser Arbeit gilt übrigens auch nur für solche Räume. Man bezeichne mit $d(q_1, q_2)$ die Entfernung zweier Punkte q_1, q_2, mit $\mathfrak{a}$ konvexe Umgebungen, mit $\mathfrak{b}(q, \omega)$ metrische Umgebungen, d. i. die Gesamtheit von Punkten q', für welche $d(q', q) < \omega$, mit $Q(q)$ eine stetige Funktionaloperation in $\mathfrak{S}$. Bei gegebenem $\lambda > 0$ gibt es a) konvexe Umgebungen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ vom Durchmesser $\leq \lambda$ mit $Q(\mathfrak{S}) \subset \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ und weiter b) Punkte $q_1, q_2, \ldots, q_s$ und eine Zahl $\omega \leq \frac{\lambda}{4}$, so daß $\mathfrak{b}(q_i, \omega) \subset \mathfrak{a}_{r_i}$, $\sum_{i=1}^{s} \mathfrak{b}\left(q_i, \frac{\omega}{4}\right) \supset Q(\mathfrak{S})$. Wir spannen über $q_1, q_2, \ldots, q_s$ die kleinste konvexe Menge H_ϱ — ϱ ihre Dimension — bilden dann eine simpliziale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von H_ϱ so, daß das Bild $Q(V)$ jedes Teilsimplexes V von $\mathfrak{Z}$ einen Durchmesser $\leq \frac{\omega}{4}$ besitzt. Wir approximieren in H_ϱ die Funktionaloperation $Q(q)$ durch die simpliziale Abbildung Q_ϱ, wobei für jeden Eckpunkt e von $\mathfrak{Z}: Q_\varrho(e) = q_{i(e)}$ ist, wo $d[q_{i(e)}, Q(e)] \leq \frac{\omega}{4}$. Q_ϱ besitzt einen Fixpunkt: $Q_\varrho(\xi_\varrho) = \xi_\varrho$. Berücksichtigen wir nun die Art der Wahl von $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i(q_i, \omega)$ und die Konvexität der Simplexe, so bekommt man $d[Q(\xi_\varrho), \xi_\varrho] \leq \frac{5}{4}\lambda$ und daraus durch Grenzübergang $\xi = Q(\xi)$ für passendes ξ.

die a_{ik} einmal stetig differenzierbar sind. Dann sind es nach dem Vorhergesagten auch die Funktionen $t_{gs}(x, y)$. Führen wir mittels der Transformation

$$U_g = \sum_{s=1}^{h} t_{gs} u_s \qquad g = 1, 2, \ldots, h \tag{35}$$

neue abhängige Funktionen U_g ein, so bekommt man für U_g das Differentialsystem

$$\frac{\partial U_g}{\partial y} = \lambda_g \frac{\partial U_g}{\partial x} + \sum_{j=1}^{h} \bar{b}_{gj} U_j + \bar{d}_g \qquad g = 1, 2, \ldots, h \tag{36}$$

$\bar{b}_{gj}$, $\bar{d}_g$ setzt sich aus den b_{ij}, d_i, den $t_{gs}(x, y)$ und den ersten Ableitungen $D_1 t_{gs}(x, y)$ zusammen. Ist

$$\sum_{i,k=1}^{h} \sum_{m=0}^{1} | D_m a_{ik} | + \sum_{i,j=1}^{h} | b_{ij} | \leqslant L , \tag{37}$$

so gilt in einem Trapez T von kleiner Höhe (Haar: loco cit. [2a]) $p.$ 9) die Abschätzung

$$\sum_{g=1}^{h} | U_g | \leqslant C_4(L) \sum_{g=1}^{h} \operatorname*{Max}_{y=0} | U_g | + C_4 (\sum_{g=1}^{h} \operatorname*{Max}_{T} | \bar{d}_g |) \, (e^{C_4 y} - 1)$$

und daraus in Beachtung von (35) auch für u_i

$$\sum_{i=1}^{h} | u_i | \leqslant C_5(L) [\sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{y=0} | u_i | + (\sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{T} | d_i |) \, (e^{C_5 y} - 1)] . \tag{38}$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, daß es hier und im Folgenden ausreicht, die Voraussetzung der Verschiedenheit der Eigenwerte durch eine weniger fordernde zu ersetzen, daß es nämlich eine nichtsinguläre Matrix $\boldsymbol{T}$ gibt, deren Elemente $t_{gs}(x, y)$ stetig differenzierbar sind, derart, daß das transformierte System die Form (36) besitzt. Die Matrix besitzt dann h linear unabhängige reelle Eigenvektoren.

§ 10. Die obigen Abschätzungen für Systeme haben aber eine Unbequemlichkeit. Um nur die Funktionen u_i allein abzuschätzen, muß man die Existenz und Abschätzbarkeit auch der *ersten* Ableitungen der a_{ik} bezw. der t_{gs} postulieren. Man könnte glauben, daß wenn man zu den Ableitungen $D_j u_i$ mit $j > 1$ kommt, die Situation sich noch weiter verschlechtern wird. Nun soll gezeigt werden, daß dies keineswegs der Fall ist. Man differenziere nämlich — etwa nach y — das *ursprüngliche* System (34) und nicht das transformierte (36). Wir erhalten für $p_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}$, $q_i = \frac{\partial u_i}{\partial y}$

$$\frac{\partial q_i}{\partial y} = \sum_{k=1}^{h} a_{ik} \frac{\partial q_k}{\partial x} + \sum_{j=1}^{h} b_{ij} q_j + \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial a_{ik}}{\partial y} p_k + \frac{\partial d_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial b_{ij}}{\partial y} u_j \ . \tag{39}$$

Die Funktionen $\left|\frac{\partial a_{ik}}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial d_i}{\partial y}\right|$ sollen durch dieselbe Konstante L abschätzbar sein.

Wir setzen nun voraus, daß die Determinante D der a_{ik} von Null verschieden ist, genauer

$$|D| \geqslant \mu > 0, \tag{40}$$

eine Bedingung, die der Ungleichung (8) für eine Differentialgleichung entspricht. Aus (34) und (40) folgt, daß die p_k sich durch q_k ausdrücken lassen und diese Ausdrücke in (39) eingesetzt liefern Differentialgleichungen für die q_i, die nach der alten Methode abgeschätzt werden können. Wenn wir wieder (40) berücksichtigen, so lautet das Ergebnis dieser Abschätzung folgendermaßen

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{h} |q_i| \leqslant C_6(L,\mu) \left[\sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{y=0} |q_i| + \left(\sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{T} \left|\frac{\partial d_i}{\partial y}\right| + \sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{T} |u_i| \right) (e^{C_6 y} - 1) \right], \\ \sum_{i=1}^{h} |p_i| \leqslant C_6 \left(\sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{T} |q_i| + \sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{T} |u_i| + \sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{T} |d_i| \right) .\end{gathered} \tag{41}$$

Ist noch eine Abschätzung für alle ersten Ableitungen nach x, sowie eine Abschätzung aller *gemischten* Ableitungen der Koeffizienten und der d_i bekannt [die Abschätzungskonstante möge dieselbe, wie in (37) sein], so folgt daraus eine Abschätzung für *alle zweiten* Ableitungen r_i, s_i, t_i

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{h} |s_i| \leqslant C_7(L,\mu) \left[\sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{y=0} |s_i| + \left(1 + \sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{T} |u_i| + \sum_{i=1}^{h} \operatorname*{Max}_{T} |q_i| \right) (e^{C_7 y} - 1) \right], \\ \sum_{i=1}^{h} (|r_i| + |t_i|) \leqslant C_7 \left[\sum_{i=1}^{h} (\operatorname*{Max}_{T} |u_i| + \operatorname*{Max}_{T} |p_i| + \operatorname*{Max}_{T} |q_i| + \operatorname*{Max}_{T} |s_i|) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{h} \left(\operatorname*{Max}_{T} \left|\frac{\partial d_i}{\partial x}\right| + \operatorname*{Max}_{T} \left|\frac{\partial d_i}{\partial y}\right| \right) \right] .\end{gathered} \tag{42}$$

Ähnliche Abschätzungen gelten auch für die höheren Ableitungen[14]).

§ 11. Nach dem in den §§ 4, 5 entwickelten Verfahren beweist man zuerst die Lösbarkeit des Cauchy'schen Problems in T für das System (34), falls dort alle Daten Polynome sind. Die Lösungen sind in T unendlich oft differenzierbar. Für nichtanalytische Daten gehe man, wie in §§ 6,7 vor. *Die Bedingung* $|a| \geqslant \mu > 0$ *ist durch* $|D| \geqslant \mu > 0$ [vgl. Formel (40)] *zu ersetzen.* Benutzen wir jetzt durchwegs die Abschätzungen (38), (41), (42) der §§ 9, 10, so ergibt sich, daß, falls die Daten [15]) Lipschitzbedingungen in beiden Variablen x, y und die ersten (fast überall existierenden) Ableitungen dieser Daten nach x Lipschitzbedingungen nach y genügen, daß dann die Lösungen u_i von (34) in T existieren. Die ersten Ableitungen $D_1 u_i$ erfüllen Lipschitzbedingungen in beiden Variablen, woraus die Existenz (fast überall) aller zweiten Ableitungen $D_2 u_i$ folgt. Überdies bestehen die Ungleichungen (38), (41), (42).

Nunmehr können wir zu den *nichtlinearen* Systemen

$$q_i = f_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_h, p_1, \ldots, p_h), \; i = 1, 2, \ldots, h \tag{43}$$

übergehen[16]). Diese seien der Einfachheit halber vom hyperbolischen Typus, d. h. die Matrix A der $a_{ik} = \dfrac{\partial f_i}{\partial p_k}$ besitze für $y = 0$ voneinander verschiedene reelle Eigenwerte[17]). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir wieder annehmen, daß: 1. u_i mitsamt ihren Ableitungen

---

[14]) Im Falle gleicher Eigenwerte genügt es, falls man zur Abschätzung von $D_j u_i (j \geq 1)$ und zu den späteren Existenzbeweisen übergeht, nur die Existenz der ersten Ableitungen von $t_{gs}(x, y)$ vorauszusetzen. Denn es wird immer das ursprüngliche System (34) zuerst differenziert, und erst nachträglich transformiert. Wohl aber müssen die entsprechenden Ableitungen $D_j a_{ik}$ usw. vorhanden sein.

[15]) Die Koeffizienten und Anfangswerte bilden zusammen die Daten. Für zusammenfallende Eigenwerte soll auch $t_{gs}(x, y)$ Lipschitzbedingungen genügen.

[16]) Für Systeme der Gestalt

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = \sum_{k=1}^{h} a_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial x} + d_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_h)$$

hat schon Herr O. Perron das Cauchy'sche Problem gelöst. *O. Perron*, Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungensysteme im reellen Gebiete, Math. Zeitschr. 27 (1928), p. 549—564.

[17]) Sind die Eigenwerte gleich, so setze man etwa folgendes voraus: Es gibt eine nichtsinguläre Matrix T, die A auf die Diagonalform transformiert. Die Elemente $t_{gs}(x, y, \ldots, u_j, \ldots, p_h)$ von A sind nach allen $2h + 2$ unabhängigen Variablen stetig differenzierbar.

bis zur dritten Ordnung einschließlich auf $y = 0$ verschwinden; 2. auf $y = 0$ die Determinante D der a_{ik} nirgends Null ist, etwa

$$|D| \geqslant \mu > 0 .$$

Diese zweite Bedingung kann auch jetzt durch eine Variablentransformation der Form $x' = x + \alpha y$, $y' = y$ herbeigeführt werden. Die neue Matrix $\boldsymbol{A}' = ||a'_{ik}||$ hat die Gestalt $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \alpha \boldsymbol{J}$, wo $\boldsymbol{J}$ die Einheitsmatrix ist. Die Determinante $D' = |\boldsymbol{A}'|$ ist von Null verschieden, falls α *kein* Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ ist. Der Weg zur Gewinnung des Existenzbeweises für (43) (Cauchy'sches Problem für $y = 0$) ist nun derselbe, wie in § 8. Man differenziert (43) nach y

$$\frac{\partial q_i}{\partial y} = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_k}{\partial x} + \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial f_i}{\partial u_j} q_j + \frac{\partial f_i}{\partial y} ,$$

wobei als Argumente in $\frac{\partial f_i}{\partial p_k}$, $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ die Größen

$$x, y, \ldots, \int_0^y q_j dy, \ldots, \int_0^y \frac{\partial q_j}{\partial x} dy, \ldots ,$$

auftreten und weist wie in § 8 die Existenz eines Fixpunktes für die durch

$$\frac{\partial Q_i}{\partial y} = \frac{\partial f_i}{\partial y}(x, y, \ldots, \int_0^y q_j dy, \ldots, \int_0^y \frac{\partial q_j}{\partial x} dy, \ldots) + \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial f_i}{\partial u_j} Q_j + \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_k}{\partial x}$$

definierte Funktionaloperation $Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_h)$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ nach. Das h-Tupel $q_1, q_2, \ldots, q_h$ wird in einer passenden konvexen Funktionenmenge gewählt[18]). Daraus folgt, indem wir $u_i = \int_0^y q_i dy$ setzen, die Lösbarkeit des ursprünglichen Systems (43).

§ 12. Die Resultate des § 11 kann man dahin verallgemeinern, daß in (43) als Argumente rechts noch *gewisse Integrale (allgemeiner Funktionaloperationen) etwa der Form* $\int_{y_0}^{y} u_i dy$, $\int_{x_0}^{x} u_i dx$, $\int_{y_0}^{y} dy \int_{y_0}^{y} u_i dy$ usw. *auftreten können.* Diese Bemerkung kann dazu benutzt werden, um unsere Ergebnisse in ungezwungener Weise auch beim Cauchy'schen Problem für Differentialgleichungen *höherer* Ordnung anzuwenden. Nehmen wir etwa

[18]) Ich betone, daß man hier und im folgenden den Existenzbeweis auch mittels der sukzessiven Approximationen zu Ende führen kann.

die schon behandelte hyperbolische Differentialgleichung[19]) zweiter Ordnung in einer abhängigen Variablen

$$t = f(x, y, u, p, q, s, r) .$$

Man kann sie als ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial y} &= f\left(x, y, \int_0^y q\,dy, p, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial x}\right), \ ^{20)} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial q}{\partial x} \end{aligned} \tag{44}$$

und (44) besitzt die von uns behandelte Form (vgl. obige Bemerkung). Wir können aber jetzt auch *Systeme* von hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$t_i = f_i(x, y, u_1, \ldots, u_h, p_1, \ldots, p_h, \ldots, s_j, \ldots, r_j, \ldots)$$

in Betracht ziehen, wenn wir sie durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial y} &= f_i\left(x, y, \ldots, \int_0^y q_j\,dy, \ldots, p_j, \ldots, \frac{\partial q_j}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial p_j}{\partial x}, \ldots\right), \\ \frac{\partial p_s}{\partial y} &= \frac{\partial q_s}{\partial x} \ ; \ i, s = 1, 2, \ldots, h \end{aligned}$$

ersetzen. Differentialgleichungen von noch höherer Ordnung können auch auf die Form (43) gebracht werden. Sei etwa eine Differentialgleichung dritter Ordnung für eine Funktion u[21])

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = f\left(x, y, u, p, q, r, s, t, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial x}\right),$$

die wir durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial y} &= f\left(x, y, \int_0^y dy \int_0^y t\,dy, \int_0^y s\,dy, \int_0^y t\,dy, r, s, t, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial x}\right), \ ^{20)} \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} \end{aligned} \tag{45}$$

---

[19]) *H. Lewy*, Über das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, Math. Ann. 98 (1928), p. 179—191.

[20]) Die Anfangswerte, sowie die Werte der Ableitungen von u genügend hoher Ordnung sollen auf $y = 0$ verschwinden.

[21]) Für Differentialgleichungen höherer Ordnung in einer unbekannten Funktion siehe *K. Friedrichs* und *H. Lewy*, Math. Ann. 99 (1928), p. 200—221.

ersetzen. In der Tat definieren wir die Funktionen p, q durch

$$p = \int_0^y s\,dy, \quad q = \int_0^y t\,dy,$$

so ist wegen (45)

$$q_x = \int_0^y t_x dy = \int_0^y s_y dy = s = p_y \; .$$

Also sind p, q Ableitungen einer Funktion u, nämlich von $u = \int_0^y dy \int_0^y t\,dy$.
Man sieht nun sofort ein, daß beliebige normale[22]) Systeme für mehrere unbekannte Funktionen u_i

$$\frac{\partial^{l_i+1} u_i}{\partial y^{l_i+1}} = f_i \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, h$$

ohne weiteres als Spezialfall der Systeme (43) betrachtet werden können[23]) (vgl. obige Bemerkung).

§ 13. Nach Haar lassen sich ähnliche Abschätzungen[24]) auch für *eine* Differentialgleichung in *mehreren* unabhängigen Variablen ableiten. Ist u eine stetig differenzierbare Funktion, welche die Ungleichungen

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant A \sum_{s=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_s}\right| + B\,|u| + \delta \,,$$

$$|u(x_1, x_3, \ldots, x_m, 0)| \leqslant M \quad \text{für} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_m)\,\varepsilon\, g$$

erfüllt (g ein Gebiet des $x_1, x_2, \ldots, x_m$-Raumes), so gilt in einem Gebiete G des $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$-Raumes

$$|u| \leqslant M e^{By} + \frac{\delta}{B}(e^{By} - 1) \, .$$

Dabei entspricht das Gebiet G vermöge der Transformation $\boldsymbol{R}$

$$y' = By \; , \quad x_i' = \frac{B}{A} x_i$$

---

22) Zur Definition der normalen Systeme vgl. *E. Goursat*, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1921, insbes. p. 19. Man kann auch nichtnormale Systeme in der Weise behandeln.

23) Man stellt ein System von Differentialgleichungen für die Ableitungen $\dfrac{\partial^{l_i} u_i}{\partial x^r \partial y^{l_i - r}} = g_{ir}$ auf. Die Gleichungen $\dfrac{\partial g_{ir}}{\partial y} = \dfrac{\partial g_{i,r-1}}{\partial x}$ werden dem Systeme hinzugefügt.

24) Loc. cit. 2a), insbes. p. 8 .

einem Gebiete $G' = \boldsymbol{R}(G)$ des $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m, y'$-Raumes, das folgendermaßen definiert wird: Für jeden Punkt von G' ist $y' \geqslant 0$; das Gebiet $g' = \boldsymbol{R}(g)$ des x'-Raumes liegt auf dem Rande von G' und jeder Punkt $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m, y'$ von G', der nicht zu g' gehört, hat die Eigenschaft, daß mit ihm auch alle Punkte der Gestalt $x'_i \pm h$, $y' - h$ ($h > 0$ und klein) ebenfalls zu G' gehören.

Daraus folgt sofort die Abschätzung für stetig differenzierbare Lösungen einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{s=1}^{m} a_s \frac{\partial u}{\partial x_s} + b u + d \,,$$

sobald in G

$$\sum_{s=1}^{m} |a_s| \leqslant A \,, \quad |b| \leqslant B \,, \quad |d| \leqslant \delta \,.$$

Wir wollen nun gleich zu Systemen von linearen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = \sum_{k=1}^{h} \sum_{s=1}^{m} a_{iks} \frac{\partial u_k}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^{h} b_{ij} u_j + d_i \;;\; i = 1, 2, \ldots, h \tag{46}$$

übergehen. Eine Abschätzung von $\sum_{i=1}^{h} |u_i|$ wird gelingen, falls eine Transformation $\boldsymbol{T}$

$$U_g = \sum_{i=1}^{h} t_{gi} u_i \tag{47}$$

vorhanden ist, welche (46) in

$$\frac{\partial U_g}{\partial y} = \sum_{s=1}^{m} \lambda_{gs} \frac{\partial U_g}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^{h} b'_{gj} U_j + d'_g \tag{48}$$

überführt. Das heißt, man sucht eine Transformation $\boldsymbol{T}$, welche die Matrizen

$$\boldsymbol{A}_s = \| a_{iks} \| \;;\quad s = 1, 2, \ldots, m$$

gleichzeitig auf Diagonalmatrizen

$$\boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{A}_s \boldsymbol{T} = \begin{Vmatrix} \lambda_{1s} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{ms} \end{Vmatrix}$$

transformiert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer solchen Matrix $\boldsymbol{T}$ lauten nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Köthe, wie folgt:

α) Jede Matrix A_s besitzt m linear unabhängige reelle Eigenvektoren,
β) die Matrizen A_s sind vertauschbar: $A_s A_{s'} = A_{s'} A_s$.

Die Bedingung α) ist z. B. dann erfüllt, wenn α') für jedes A_s die Eigenwerte rell und voneinander verschieden sind.

§ 14. Nehmen wir die Existenz der Transformation T an, so muß weiter vorausgesetzt werden, daß die t_{gi} stetig differenzierbar sind (dann läßt sich $\Sigma |u_i|$ abschätzen). Das gilt z. B. dann, wenn — falls schon α') erfüllt ist — die a_{iks} stetige Ableitungen besitzen. Insgesamt haben wir also für die Abschätzbarkeit von $\Sigma |u_i|$ folgende *hinreichende* Bedingungen:

α') für jedes s besitzt die Matrix A_s lauter reelle, voneinander verschiedene Eigenwerte,

β) $A_s A_{s'} = A_{s'} A_s$.

γ) a_{iks} sind stetig differenzierbar.

Um die ersten Ableitungen $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ abzuschätzen, nehmen wir noch die Existenz der beschränkten Ableitungen $D_1 b_{ij}$, $D_1 d_i$ nach den x-Variablen, und der stetigen Ableitungen $D_2 u$ nach allen Variablen an. Durch Differentiation des ursprünglichen Systems (46) nach $x_1, x_2, \ldots, x_m$ entsteht ein Gleichungssystem für $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, welches durch dieselbe Transformation wieder in die Diagonalform ähnlich wie (48) übergeführt wird. Aus (46) folgt nachträglich auch eine Abschätzung für $\left|\frac{\partial u_i}{\partial y}\right|$. Sind weiter die ersten Ableitungen $D_1 a_{iks}$, $D_1 b_{ij}$, $D_1 d_i$ nach *allen* Variablen $x_1, \ldots, x_m, y$ diejenigen $D_2 a_{iks}$, $D_2 b_{ij}$, $D_2 d_i$, bei denen die Differentiation nach der Variablen y *höchstens einmal* vorkommt, vorhanden und abschätzbar, so lassen sich für *alle zweiten* Ableitungen $D_2 u_i$ Schranken bestimmen, vorausgesetzt, daß stetige $D_3 u_i$ existieren. Auf diese Weise kann man auch bei höheren Ableitungen vorgehen. Dem Existenzbeweise (des Cauchy'schen Problems) für lineare Systeme (46) steht jetzt nichts mehr im Wege. Es mögen die Daten [15] Lipschitzbedingungen erfüllen. Es gibt auch jetzt ein Lösungssystem des Cauchy'schen Problems, wobei die u_i Lipschitzbedingungen mit abschätzbaren Konstanten genügen. Die Gleichungen (46) bestehen fast überall (vgl. § 6). Sind noch Lipschitzbedingungen für $D_1 a_{iks}$, $D_1 b_{ij}$, $D_1 d_i$, $D_1 \varphi_i$ nach $x_1, x_3, \ldots, x_m$ erfüllt, so haben die ersten Ableitungen $D_1 u_i$ nach *allen* Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$ dieselben Eigenschaften. Die Abschätzungen für $D_2 u_i$ bleiben gültig.

§ 15. Zu den nichtlinearen Gleichungen

$$q_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y, u_1, \ldots, u_h, p_{11}, \ldots, p_{hm}),$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = q_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_s} = p_{is} \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, h \; ; \quad s = 1, 2, \ldots, m \tag{49}$$

übergehend, genügt es also die Matrizen A_s mit $a_{iks} = \dfrac{\partial f_i}{\partial p_{ks}}$ zu betrachten und irgendwelche Voraussetzungen zu machen, welche uns die Existenz der Transformation T (die alle A_s gleichzeitig in die Diagonalform überführt) sichert[25]. Die Elemente $t_{gi}(x_1, \ldots, x_m, \ldots, u_i, \ldots, p_{11}, \ldots, p_{hm})$ von T sollen in allen vorkommenden Variablen einmal, die Funktionen a_{iks} genügend oft stetig differenzierbar sein. Durch Differentiation von (49) nach $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$ stellen wir die Differentialgleichungen für q_i, p_{ij} auf. Diese lauten

$$\frac{\partial q_i}{\partial y} = \frac{\partial f_i}{\partial y} + \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} q_k + \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial f_i}{\partial p_{ks}} \frac{\partial q_k}{\partial x_s}, \quad i = 1, 2, \ldots, h$$
$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial y} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} p_{kj} + \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial f_i}{\partial p_{ks}} \frac{\partial p_{kj}}{\partial x_s}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{50}$$

Das Verschwinden der Anfangswerte (auf $y = 0$), der Ableitungen $(D_j u_i)_{y=0}$ für $1 \leqslant j \leqslant 3$[26] vorausgesetzt, können wir statt $u_1, u_2, \ldots, u_h$ in den Ableitungen $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial y}$ usw. überall $\int\limits_0^y q_r dy$, $(r = 1, 2, \ldots, h)$ setzen. Das quasilineare System (50) läßt sich nun nach der früheren Methode lösen. Dann muß noch bewiesen werden, daß bei konstantem i die Funktionen q_i, p_{is} Ableitungen einer Funktion u_i sind. Das läßt sich nach Petrowsky in der Weise durchführen, daß man für Funktionen

$$\Delta_j^i = \frac{\partial q_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_{ij}}{\partial y}, \quad \Delta_{jl}^i = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_l} - \frac{\partial p_{il}}{\partial x_j}$$

ein *lineares* Gleichungssystem der Gestalt (46) aufstellt und dessen Eindeutigkeit nachweist. Da die Anfangswerte der $\Delta_j^i, \Delta_{jl}^i$ auf $y = 0$ verschwinden, müssen also diese Funktionen überall verschwinden. Um

[25]) Dazu reichen die Bedingungen α'), β), γ) des § 14 aus; sie sind aber nicht notwendig.

[26]) Diese Bedingungen sind den Bedingungen
$f_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} = 0$ für $y = u_1 = u_2 = \cdots = u_n = p_{11} = \cdots = p_{hm} = 0$ äquivalent.

die Rechnungen durchzuführen, differenzieren wir (50) nach $x_1, \ldots, x_m, y$ und subtrahieren die somit erhaltenen Gleichungen paarweise derart, daß auf der linken Seite $\frac{\partial \Delta_j^i}{\partial y}$, $\frac{\partial \Delta_{jl}^i}{\partial y}$ auftrete. Indem wir bei der Subtraktion auch rechts entsprechende Glieder aneinanderreihen, bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_j^i}{\partial y} &= \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial f_i}{\partial p_{ks}} \cdot \frac{\partial \Delta_j^k}{\partial x_s} + \Phi_j^i , \\ \frac{\partial \Delta_{jl}^i}{\partial y} &= \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial f_i}{\partial p_{ks}} \frac{\partial \Delta_{jl}^k}{\partial x_s} + \Phi_{jl}^l . \end{aligned} \tag{51}$$

Φ_j^i, Φ_{jl}^i sind linear in den Ausdrücken von der Form

$$\left(\int_0^y \frac{\partial q_r}{\partial x_j} dy - p_{rj}\right) D_2 f_i , \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_s} - \frac{\partial p_{ks}}{\partial y}\right) D_2 f_i , \left(\frac{\partial p_{ks}}{\partial x_j} - \frac{\partial p_{kj}}{\partial x_s}\right) D_2 f_i , \text{ etc.}$$

Berücksichtigt man noch

$$\int_0^y \frac{\partial q_r}{\partial x_j} dy - p_{rj} = \int_0^y \left(\frac{\partial q_r}{\partial x_j} - \frac{\partial p_{rj}}{\partial y}\right) dy , \text{ etc.}$$

so sieht man, daß Φ_ϱ^t, $\Phi_{\varrho s}^t$ sich linear aus Δ_j^i, Δ_{jl}^i, $\int_0^y \Delta_j^i dy$, $\int_0^y \Delta_{jl}^i dy$ zusammensetzen. Der Eindeutigkeitsbeweis für Systeme (46) läßt sich aber (mittels Abschätzbarkeit) auch dann durchführen, wenn in (46) noch Integrale $\int_0^y u_i dy$ linear auftreten.

Anm. bei der Korrektur. Setzt man die Funktionen f_i in (50) und die Anfangswerte φ_i etwa als analytisch voraus, so besitzt das Lösungssystem q_i, p_{ij} von (50) offensichtlich Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Diese Ableitungen existieren nun in einem festen Gebiete G_0, dessen Größe und Gestalt nur von den Schranken der Ableitungen höchstens zweiter Ordnung von f_i und φ_i abhängen. Anderseits lassen sich nach § 6 die ersten Ableitungen von q_i, p_{ij} in demselben G_0 durch die Schranken der Ableitungen höchstens zweiter Ordnung von f_i und von φ_i abschätzen. Man schließt daraus: ein Lösungssystem u_i (des Cauchy'schen Problems) von (49) ist auch dann vorhanden, wenn die Funktionen f_i, φ_i Ableitungen erster Ordnung besitzen, die ihrerseits Lipschitzbedingungen erfüllen. Dieses Lösungssystem u_i besitzt dann stetige, sogar den Lipschitzbedingungen genügende, Ableitungen erster Ordnung. Zum Beweise brauchen nur die f_i, φ_i durch analytische Funktionen im Sinne des § 6 approximiert zu werden. Ähnliches gilt für Funktionen f_i, φ_i, die Ableitungen höherer Ordnung besitzen.

(Eingegangen den 14. März 1937.)