Über die Sehnen ebener Kontinuen und die Schleifen geschlossener Wege.

Autor(en): **Hopf, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10188

Über die Sehnen ebener Kontinuen und die Schleifen geschlossener Wege

Von Heinz Hopf, Zürich

§ 1.

1. Eine „Sehne“ einer Punktmenge K ist eine Strecke, deren Endpunkte auf K liegen. K sei ein Kontinuum — d. h. eine beschränkte, abgeschlossene, zusammenhängende Punktmenge — in der Ebene. Eine Gerade g der Ebene sei ausgezeichnet; wir betrachten die Sehnen von K, welche zu g parallel sind. Die Menge der Zahlen, die als Längen dieser Sehnen auftreten, heiße $\mathfrak{S}(K)$; die Zahl 0 rechnen wir mit zu $\mathfrak{S}(K)$; alle anderen Zahlen aus $\mathfrak{S}(K)$ sind positiv.

Die Mengen $\mathfrak{S}(K)$ haben die folgende merkwürdige Eigenschaft, die von *P. Lévy* entdeckt worden ist[1]):

Ist K irgend ein ebenes Kontinuum, c eine Zahl aus $\mathfrak{S}(K)$ und n irgend eine positive ganze Zahl, so gehört auch $\frac{1}{n}c$ zu $\mathfrak{S}(K)$; ist dagegen s eine positive Zahl, die nicht von der Form $s = \frac{1}{n}$ mit ganzem n ist, so gibt es ein K, für welches die Menge $\mathfrak{S}(K)$ zwar die Zahl 1, *aber nicht die Zahl s enthält.*

Anders ausgedrückt: p und q seien zwei Punkte im Abstand 1 voneinander; unter allen positiven Zahlen s sind die Zahlen $s = \frac{1}{n}$ dadurch *ausgezeichnet,* daß *jedes* ebene Kontinuum, das p und q enthält, eine zu der Strecke $\overline{pq}$ parallele Sehne der Länge s besitzt.

2. Der Satz von *Lévy* wird sich unten als Folgerung aus einem schärferen Satz ergeben, der eine vollständige Charakterisierung der Mengen $\mathfrak{S}(K)$ liefert; es wird nämlich die folgende Frage beantwortet werden: „*Zu welchen Zahlenmengen $\mathfrak{M}$ gibt es ebene Kontinuen K mit $\mathfrak{S}(K) = \mathfrak{M}$?*“

Mit $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{S}^*(K)$ bezeichnen wir die Komplementärmengen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{S}(K)$ im Bereich der positiven Zahlen, also die Mengen derjenigen *positiven* Zahlen, die nicht zu $\mathfrak{M}$ bezw. $\mathfrak{S}(K)$ gehören. Aus der Abgeschlossenheit und Beschränktheit von K ergibt sich ohne weiteres, daß $\mathfrak{S}(K)$ abgeschlossen (und beschränkt), daß also $\mathfrak{S}^*(K)$ offen ist. Dafür aber, daß eine vorgelegte offene Menge $\mathfrak{M}^*$ positiver Zahlen als Menge $\mathfrak{S}^*(K)$ eines ebenen Kontinuums K auftritt, ist ausschlaggebend eine

[1]) *P. Lévy,* Sur une généralisation du théorème de Rolle, C. R. Acad. Sci., Paris, 198 (1934), p. 424—425. — Dort werden nicht beliebige Kontinuen, sondern nur Wege (s. u., Nr. 8) betrachtet; diese Einschränkung ist aber auch für den dortigen Beweis nicht wesentlich.

Eigenschaft algebraischer Natur. Nennen wir eine Zahlenmenge $\mathfrak{N}$ „*additiv*", wenn sie die folgende Eigenschaft hat:

$$\textit{aus } a \in \mathfrak{N} \textit{ und } b \in \mathfrak{N} \textit{ folgt } a + b \in \mathfrak{N}\,,$$

so lautet nämlich die Antwort auf die oben ausgesprochene Frage folgendermaßen:

Zu der offenen (nicht leeren) Menge $\mathfrak{M}^*$ positiver Zahlen gibt es dann und nur dann ein ebenes Kontinuum K mit $\mathfrak{S}^*(K) = \mathfrak{M}^*$, wenn $\mathfrak{M}^*$ eine additive Menge ist.

Es wird also zweierlei behauptet:

Satz I. Es sei K ein beliebiges ebenes Kontinuum; dann ist die Menge $\mathfrak{S}^*(K)$ additiv.

Satz II. Es sei $\mathfrak{M}^*$ eine offene (nicht leere) und additive Menge positiver Zahlen; dann gibt es ein ebenes Kontinuum K mit $\mathfrak{S}^*(K) = \mathfrak{M}^*$.

Die Gerade g ist dabei immer fest ausgezeichnet.

Zu dem Satz II gilt noch der folgende *Zusatz:* es gibt sogar eine *Kurve K*, welche die Behauptung des Satzes II erfüllt und in einem rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem durch $y = f(x)$, $0 \leqq x \leqq c$, dargestellt wird, wobei $f(x)$ in dem genannten Intervall *eindeutig und stetig* ist; hierbei ist die Gerade g die x-Achse.

3. Daß der Satz von Lévy eine Folge der Sätze I und II ist, ist leicht zu sehen. Es sei nämlich erstens K ein Kontinuum und c eine Zahl aus $\mathfrak{S}(K)$; wäre für eine gewisse natürliche Zahl n die Zahl $\frac{1}{n}c$ nicht in $\mathfrak{S}(K)$, sondern in $\mathfrak{S}^*(K)$, so wäre nach Satz I auch $\frac{1}{n}c + \cdots + \frac{1}{n}c = c \in \mathfrak{S}^*(K)$, im Widerspruch zu der Voraussetzung über c. Zweitens sei s eine positive Zahl, für die $\frac{1}{s}$ nicht ganz ist; um den zweiten Teil des Satzes von Lévy zu beweisen, braucht man nach Satz II nur eine offene und additive Menge $\mathfrak{M}^*$ positiver Zahlen anzugeben, die s, aber nicht 1 enthält. Eine solche Menge ist die folgende: $n = [\frac{1}{s}]$ ist die durch

$$n < \tfrac{1}{s} < n + 1$$

bestimmte ganze Zahl, und eine Zahl t gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{M}^*$, wenn sie eine der Ungleichungen

$$\frac{k}{n+1} < t < \frac{k}{n}\,,\quad k = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}$$

erfüllt. Das Kontinuum K, für welches dann $\mathfrak{S}^*(K) = \mathfrak{M}^*$ ist, kann man dabei gemäß dem Zusatz zu Satz II wählen.[2])

4. Für den Beweis des Satzes I machen wir die ausgezeichnete Gerade g zur x-Achse eines rechtwinkligen x-y-Koordinatensystems in der Ebene; dieses System habe die übliche Lage, d. h. die positive Richtung der x-Achse zeige horizontal nach rechts, die positive Richtung der y-Achse vertikal nach oben. Die Zahlenmengen $\mathfrak{S}(K)$ und $\mathfrak{S}^*(K)$ lassen sich in der nachstehenden Weise charakterisieren, die für den Beweis zweckmäßig ist.

Für jede positive Zahl s verstehen wir unter K_s die Punktmenge, die entsteht, wenn man K um die Strecke s horizontal nach rechts verschiebt. Gehört s zu $\mathfrak{S}(K)$, so gibt es einen solchen Punkt (x_0, y_0) von K, daß auch der Punkt (x_0+s, y_0) zu K gehört; dann hat K mit K_s den Punkt (x_0+s, y_0), gemeinsam. Umgekehrt: gehört s nicht zu $\mathfrak{S}(K)$, und ist (x_0, y_0) irgend ein Punkt von K, so gehört der Punkt $(x_0 + s, y_0)$ nicht zu K; folglich hat K mit K_s keinen gemeinsamen Punkt. Somit haben wir die folgende Charakterisierung der Mengen $\mathfrak{S}(K)$ und $\mathfrak{S}^*(K)$ gewonnen:

Ist $s \in \mathfrak{S}(K)$, *so ist* $K \cdot K_s \neq 0$; *ist* $s \in \mathfrak{S}^*(K)$, *so ist* $K \cdot K_s = 0$.

5. *Beweis des Satzes I.* Das Kontinuum K sei gegeben, und es seien a und b zwei Zahlen aus $\mathfrak{S}^*(K)$; dann ist nach Nr. 4: $K \cdot K_a = 0$ und, da $\mathfrak{S}^*(K_a) = \mathfrak{S}^*(K)$ ist: $K_a \cdot (K_a)_b = 0$; dies läßt sich aber, da $(K_a)_b = K_{a+b}$ ist, auch so schreiben: $K_a \cdot K_{a+b} = 0$. Somit ist

$$K_a \cdot K = 0, \qquad K_a \cdot K_{a+b} = 0. \tag{1}$$

Die Behauptung lautet: $a + b \in \mathfrak{S}^*(K)$, also nach Nr. 4:

$$K \cdot K_{a+b} = 0. \tag{2}$$

Es ist also zu zeigen, daß (2) aus (1) folgt.

Auf der Punktmenge $K + K_a + K_{a+b}$ wird das Minimum der Koordinate x in einem Punkt von K, das Maximum von x in einem Punkt von K_{a+b}, das Minimum der Koordinate y in einem Punkt von K_a, das

[2]) *P. Lévy* beweist den zweiten Teil seines Satzes durch die Angabe des folgenden einfachen Beispieles: die Kurve K sei durch

$$0 \leqq x \leqq 1\,, \quad y = f(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{s} - x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{s}$$

gegeben; dann ist $f(1) = f(0)$ und $f(x+s) = f(x) - s \,.\, \sin^2 \frac{\pi}{s} \neq f(x)$ für alle x. — Der Beweis von Lévy für den ersten Teil des Satzes stimmt im wesentlichen mit dem obigen Beweis des Satzes I (Nr. 4, 5) überein.

Maximum von y in einem Punkt von K_a erreicht[3]). Daher ist die Richtigkeit unserer Behauptung in dem folgenden, anschaulich plausiblen Hilfssatz enthalten:

Hilfssatz 1. Es seien C, C', C'' drei Kontinuen in der x-y-Ebene; auf der Menge $C' + C + C''$ werde das Minimum x' von x in einem Punkt p' von C', das Maximum von x in einem Punkt p'' von C'', das Minimum y_0 von y in einem Punkt q_0 von C und das Maximum y_1 von y in einem Punkt q_1 von C erreicht. Ferner sei

$$C \cdot C' = 0\,, \quad C \cdot C'' = 0\,; \tag{1'}$$

dann ist auch

$$C' \cdot C'' = 0\,. \tag{2'}$$

Beweis des Hilfssatzes: Infolge (1′) hat C von $C' + C''$ einen positiven Abstand r. Die Menge $U(C, r)$ der Punkte, die von C um weniger als r entfernt sind, ist offen und infolge des Zusammenhanges von C selbst zusammenhängend; man kann daher q_0 mit q_1 durch einen Weg $\mathfrak{w}_1$ — z. B. einen einfachen Streckenzug — verbinden, der in $U(C, r)$ verläuft und somit fremd zu $C' + C''$ ist. Wir konstruieren einen zweiten Weg $\mathfrak{w}_2$, der q_1 mit q_0 verbindet, indem wir nacheinander die folgenden fünf Strecken ziehen: 1) von q_1 vertikal nach oben bis zum Wert $y_1 + 1$ von y; 2) horizontal nach links bis zum Wert $x' - 1$ von x; 3) vertikal nach unten bis zum Wert $y_0 - 1$ von y; 4) horizontal nach rechts, bis man sich senkrecht unterhalb q_0 befindet; 5) vertikal nach oben bis q_0. Da auch dieser Weg $\mathfrak{w}_2$ fremd zu $C' + C''$ ist, gilt dasselbe für den geschlossenen Weg $\mathfrak{z} = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2$. Da jede der Mengen C' und C'' zusammenhängend ist, liegt jede von ihnen in einem der Gebiete, in welche die Ebene durch $\mathfrak{z}$ zerlegt wird; und folglich hat $\mathfrak{z}$ um alle Punkte von C' die gleiche Umlaufzahl[4]) u' und um alle Punkte von C'' die gleiche Umlaufzahl u''. Für den Beweis von (2′) genügt es daher, zu zeigen, daß $u' \neq u''$ ist.

Der Halbstrahl, der in p' beginnt und horizontal nach links zeigt, wird bei Durchlaufung von $\mathfrak{z}$ genau einmal geschnitten (durch die dritte Strecke von $\mathfrak{w}_2$), und zwar im Sinne des wachsenden Winkelargumentes;

[3]) Die Extrema von y werden außerdem auch auf K und K_{a+b} erreicht. Auch in dem Hilfssatz 1 ist es gleichgültig, ob die Extrema von x und y außer in den genannten Punkten noch in anderen Punkten erreicht werden.

[4]) Man vergl. z. B. *Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), S. 462; oder *E. Schmidt*, Über den Jordanschen Kurvensatz, Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wissensch. 28 (1923), S. 318; (die „Charakteristik" ist gleich der mit 2π multiplizierten Umlaufzahl).

folglich erleidet bei Durchlaufung von $\mathfrak{z}$ das Winkelargument des Vektors, der in p' beginnt und in dem laufenden Punkt endet, eine Zunahme von 2π; die Umlaufzahl u' von $\mathfrak{z}$ um p' ist also 1. Der Halbstrahl, der in p'' beginnt und horizontal nach rechts zeigt, wird von $\mathfrak{z}$ gar nicht getroffen; folglich ist die Umlaufzahl u'' von $\mathfrak{z}$ um p'' gleich 0.[5])

Damit sind der Hilfssatz 1 und der Satz I bewiesen.

6. Als Vorbereitung für den Beweis des Satzes II stellen wir jetzt einige Eigenschaften von Mengenpaaren $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$ fest, von denen wir voraussetzen: $\mathfrak{M}^*$ bestehe aus positiven Zahlen, sei nicht leer, enthalte aber nicht alle positiven Zahlen; $\mathfrak{M}^*$ sei offen und additiv; $\mathfrak{M}$ bestehe aus der 0 und den positiven Zahlen, die nicht zu $\mathfrak{M}^*$ gehören.

(a) $\mathfrak{M}$ *ist beschränkt.*

Beweis: Da $\mathfrak{M}^*$ offen und nicht leer ist, gibt es ein offenes Intervall $(a, b) \subset \mathfrak{M}^*$; da $\mathfrak{M}^*$ additiv ist, sind auch für alle positiven ganzen n die Intervalle $(na, nb) \subset \mathfrak{M}^*$. Sobald $n > \frac{a}{b-a}$ ist, ist $(n+1)a < nb$; daher gehören, wenn n_0 ganz und $n_0 > \frac{a}{b-a}$ ist, alle Zahlen x mit $x > n_0 a$ zu $\mathfrak{M}^*$.

(b) *Die untere Grenze u von $\mathfrak{M}^*$ ist positiv.*

Beweis: Es sei a irgendeine Zahl von $\mathfrak{M}$; gehören alle positiven Zahlen unterhalb a zu $\mathfrak{M}$, so ist $u \geqq a > 0$. Es gebe also unterhalb a eine Zahl von $\mathfrak{M}^*$; dann gibt es wegen der Offenheit von $\mathfrak{M}^*$ sogar ein ganzes Intervall J unterhalb a, das ganz zu $\mathfrak{M}^*$ gehört. Durchläuft die Veränderliche x das Intervall J, so durchläuft $x' = a - x$ ein Intervall J'; dieses gehört ganz zu $\mathfrak{M}$; denn aus $x' = a - x \in \mathfrak{M}^*$ würde infolge der Additivität von $\mathfrak{M}^*$ folgen: $a \in \mathfrak{M}^*$. Somit enthält $\mathfrak{M}$ jedenfalls ein Intervall.

Wäre nun $u = 0$, so würde $\mathfrak{M}^*$ beliebig kleine Zahlen enthalten; da mit jeder Zahl b alle ihre positiven ganzen Vielfachen nb zu $\mathfrak{M}^*$ gehören, wäre $\mathfrak{M}^*$ überall dicht im Bereich der positiven Zahlen — entgegen der Tatsache, daß $\mathfrak{M}$ ein Intervall enthält. Es ist also $u \neq 0$, d. h. $u > 0$.

(c) *Die Länge jedes Intervalls, das ganz zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist $\leqq u$.*

Beweis: Es sei J ein Intervall positiver Zahlen, dessen Länge $v > u$ ist. Da u die untere Grenze von $\mathfrak{M}^*$ ist, gibt es eine Zahl $w \in \mathfrak{M}^*$,

[5]) Nimmt man $\mathfrak{w}_1$ als einfachen Streckenzug an, so ist $\mathfrak{z}$ ein einfach geschlossenes Polygon, in dessen Innerem C' und in dessen Äußerem C'' liegt (der obige Beweis benutzt aber nicht einmal den Jordanschen Kurvensatz für Polygone).

die $< v$ ist. Jedes positive ganze Vielfache nw von w gehört ebenfalls zu $\mathfrak{M}^*$. Wenigstens eine Zahl nw liegt in J. Folglich gehört J nicht ganz zu $\mathfrak{M}$.

(d) *Ist* $s \in \mathfrak{M}^*$ *und* t *Häufungspunkt von* $\mathfrak{M}^*$, *so ist* $s + t \in \mathfrak{M}^*$.

Beweis: Da $\mathfrak{M}^*$ offen ist, gibt es ein solches $\varepsilon > 0$, daß das Intervall $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ zu $\mathfrak{M}^*$ gehört. Da t Häufungspunkt von $\mathfrak{M}^*$ ist, gibt es ein solches δ, $0 < \delta < \varepsilon$, daß von den Zahlen $t - \delta$ und $t + \delta$ wenigstens eine zu $\mathfrak{M}^*$ gehört. Die beiden Zahlen $s + \delta$ und $s - \delta$ liegen in $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ und gehören daher zu $\mathfrak{M}^*$. Aus der Additivität von $\mathfrak{M}^*$ folgt: falls $t - \delta \in \mathfrak{M}^*$ ist, so ist $(s + \delta) + (t - \delta) \in \mathfrak{M}^*$; falls $t + \delta \in \mathfrak{M}^*$ ist, so ist $(s - \delta) + (t + \delta) \in \mathfrak{M}^*$; also ist jedenfalls $s + t \in \mathfrak{M}^*$.

7. *Beweis des Satzes II und des Zusatzes zu ihm.* Die Menge $\mathfrak{M}^*$ erfülle die Voraussetzungen des Satzes II; $\mathfrak{M}$ bestehe aus der 0 und den nicht zu $\mathfrak{M}^*$ gehörigen positiven Zahlen. Da $\mathfrak{M}^*$ offen ist, ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen. Nach Nr. 6 (a) gibt es eine größte Zahl von $\mathfrak{M}$; sie heiße c.

Falls $\mathfrak{M}^*$ alle positiven Zahlen enthält (also $c = 0$ ist), ist der Satz trivial, da man dann als K einen einzigen Punkt wählen kann; es gebe also wenigstens eine positive Zahl in $\mathfrak{M}$, d. h. es sei $c > 0$.

Die Menge der Randpunkte von $\mathfrak{M}$ nennen wir $\dot{\mathfrak{M}}$; sie besteht aus der Zahl 0 und aus Häufungspunkten von $\mathfrak{M}^*$; sie ist abgeschlossen. Die Menge $\mathfrak{M} - \dot{\mathfrak{M}}$ ist offen; sie besteht aus den inneren Punkten von $\mathfrak{M}$.

Die Entfernung bezeichnen wir mit ϱ. Wir setzen

$$f(x) = 0 \qquad \text{für } x \in \dot{\mathfrak{M}}\,, \tag{3a}$$
$$f(x) = \varrho(x, \dot{\mathfrak{M}}) \qquad \text{für } x \in \mathfrak{M} - \dot{\mathfrak{M}}\,, \tag{3b}$$
$$f(x) = -\varrho(x, \dot{\mathfrak{M}}) \qquad \text{für } x \in \mathfrak{M}^*\,; \tag{3c}$$

man kann die drei Formeln übrigens folgendermaßen zusammenfassen:

$$f(x) = \varrho(x, \mathfrak{M}^* + \dot{\mathfrak{M}}) - \varrho(x, \mathfrak{M})\,.$$

$f(x)$ ist eine für $x \geqq 0$ eindeutige und stetige Funktion. Wir behaupten, daß die Kurve K, die in dem rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem durch $0 \leqq x \leqq c$, $y = f(x)$ dargestellt wird, die Behauptung des Zusatzes zum Satz II erfüllt. Wir zerlegen diese Behauptung in zwei Teile (und präzisieren den zweiten Teil ein wenig):

(A) *Zu jedem* $s \in \mathfrak{M}$ *gibt es ein* x, $0 \leqq x < x + s \leqq c$, *mit* $f(x + s) = f(x)$.

(B) *Für jedes* $s \in \mathfrak{M}^*$ *und jedes* $x \geqq 0$ *ist* $f(x + s) < f(x)$.

Beweis von (A). Es sei $s \in \dot{\mathfrak{M}}$. Die kleinste Zahl aus $\dot{\mathfrak{M}}$, welche $\geqq s$ ist, heiße s_1; da das ganze Intervall[6]) $[s, s_1]$ zu $\mathfrak{M}$ gehört, folgt aus Nr. 6 (c):

$$0 \leqq s_1 - s \leqq u \, ,$$

wobei u wieder die untere Grenze von $\mathfrak{M}^*$ bezeichnet; da das Intervall $[0, u]$ zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist $s_1 - s \in \mathfrak{M}$, also nach (3a) und (3b):

$$f(s_1 - s) \geqq 0 \, . \tag{4}$$

Ferner folgt aus (3a) und (3b):

$$f(s_1) = 0 \, , \quad f(0) = 0 \, , \quad f(s) \geqq 0 \, . \tag{4'}$$

Nach (4) und (4′) ist

$$\begin{aligned} f(x+s) &\leqq f(x) && \text{für } x = s_1 - s \, , \\ f(x+s) &\geqq f(x) && \text{für } x = 0 \, ; \end{aligned}$$

folglich gibt es ein x, $0 \leqq x \leqq s_1 - s$, mit

$$f(x+s) = f(x) \, .$$

Da s_1 zu $\dot{\mathfrak{M}}$, also zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist $s_1 \leqq c$, also auch $x + s \leqq c$. Damit ist (A) bewiesen.

Beweis von (B). Es sei $s \in \mathfrak{M}^*$; die Behauptung ist:

$$f(x+s) < f(x) \qquad \text{für } x \geqq 0 \, . \tag{5}$$

Wir unterscheiden die drei Fälle, denen die drei Bestimmungen (3a), (3b), (3c) von $f(x)$ entsprechen.

a) $x \in \dot{\mathfrak{M}}$; nach Nr. 6 (d) ist $x + s \in \mathfrak{M}^*$. Aus (3a) und (3c) folgt $f(x) = 0$, $f(x+s) < 0$; also gilt (5).

b) $x \in \mathfrak{M} - \dot{\mathfrak{M}}$; dann ist $f(x) > 0$. Ist $x + s \in \mathfrak{M}^* + \dot{\mathfrak{M}}$, so ist $f(x+s) \leqq 0$, also gilt (5). Es sei nicht $x + s \in \mathfrak{M}^* + \dot{\mathfrak{M}}$, es sei also $x + s \in \mathfrak{M} - \dot{\mathfrak{M}}$; dann ist $f(x+s) = \varrho(x+s, \dot{\mathfrak{M}})$, und da auch $f(x) = \varrho(x, \dot{\mathfrak{M}})$ ist, lautet die Behauptung (5):

$$\varrho(x+s, \dot{\mathfrak{M}}) < \varrho(x, \dot{\mathfrak{M}}) \, . \tag{5'}$$

---

[6]) Wie üblich deuten wir die Abgeschlossenheit eines Intervalls durch eckige, die Offenheit durch runde Klammern an.

Es sei p die größte Zahl von $\dot{\mathfrak{M}}$ unterhalb x und q die kleinste Zahl von $\dot{\mathfrak{M}}$ oberhalb x; dann ist

$$\varrho(x, \dot{\mathfrak{M}}) = \min \{ x - p, q - x \} ,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\varrho(x, \dot{\mathfrak{M}}) = \min \{ (x+s) - (p+s) , (q+s) - (x+s) \} . \tag{6}$$

Aus Nr. 6 (d) folgt, daß die Endpunkte des Intervalls $J = (p+s, q+s)$, das den Punkt $x+s$ im Inneren enthält, zu $\mathfrak{M}^*$ gehören; wegen der Offenheit von $\mathfrak{M}^*$ gibt es daher ein solches $\varepsilon > 0$, daß auch $p+s+\varepsilon$ und $q+s-\varepsilon$ zu $\mathfrak{M}^*$ gehören, und daß $x+s$ in dem Intervall $J' = (p+s+\varepsilon, q+s-\varepsilon)$ liegt; da $x+s$ nicht zu $\mathfrak{M}^*$ gehört, muß sowohl zwischen $p+s+\varepsilon$ und $x+s$ als auch zwischen $x+s$ und $q+s-\varepsilon$ ein Punkt von $\dot{\mathfrak{M}}$ liegen; die Entfernung des Punktes $x+s$ von wenigstens einem dieser Punkte ist kleiner als die rechte Seite von (6). Folglich gilt (5').

c) $x \in \mathfrak{M}^*$; dann ist auch $x+s \in \mathfrak{M}^*$, also $f(x) = -\varrho(x, \dot{\mathfrak{M}})$, $f(x+s) = -\varrho(x+s, \dot{\mathfrak{M}})$; die Behauptung (5) lautet daher:

$$\varrho(x+s, \dot{\mathfrak{M}}) > \varrho(x, \dot{\mathfrak{M}}) . \tag{5''}$$

p und q sollen dieselbe Bedeutung haben wie soeben[7]); es gilt also auch (6).

Da das offene Intervall (p, q) zu $\mathfrak{M}^*$ gehört, gehört auch das offene Intervall $J = (p+s, q+s)$ zu $\mathfrak{M}^*$; aus Nr. 6 (d) und der Offenheit von $\mathfrak{M}^*$ folgt wieder, daß die Endpunkte von J innere Punkte von $\mathfrak{M}^*$ sind; es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so daß auch das Intervall $J'' = (p+s-\varepsilon, q+s+\varepsilon)$ ganz zu $\mathfrak{M}^*$ gehört. Die Menge $\dot{\mathfrak{M}}$ liegt außerhalb J''; der Punkt $x+s$ liegt innerhalb J; daher ist $\varrho(x+s, \dot{\mathfrak{M}})$ größer als die rechte Seite von (6). Folglich gilt (5'').

Damit ist der Satz II samt seinem Zusatz bewiesen.

§ 2.

8. Der Satz I läßt sich folgendermaßen aussprechen: Es sei $a > 0$, $b > 0$; $a+b \in \mathfrak{S}(K)$; $a \in \mathfrak{S}^*(K)$; dann ist $b \in \mathfrak{S}(K)$. Mit anderen Worten: besitzt K eine Sehne S der Länge $a+b$, aber keine zu S parallele Sehne der Länge a, so besitzt K wenigstens eine zu S parallele Sehne der Länge b. Hiervon gilt nun die folgende Verschärfung: unter den ge-

[7]) Ist $x > c$, so hat man $q = \infty$ zu setzen. Übrigens sind für den Satz II nur die x mit $0 \leqq x \leqq c - s$ wichtig.

nannten Voraussetzungen besitzt K sogar *wenigstens zwei* zu S parallele Sehnen der Länge b.

Wir werden hier diese Verschärfung des Satzes I nicht in voller Allgemeinheit, sondern nur für den Fall beweisen, daß K eine *Kurve* ist; die Übertragung auf beliebige Kontinuen kann dann ohne große Schwierigkeit durch ein Approximationsverfahren vorgenommen werden; wir gehen darauf nicht ein, weil wir eine nochmalige Verschärfung des obigen Satzes im Auge haben, welche nur im Falle von Kurven K, die auf einen Parameter bezogen sind, einen Sinn hat.

Eine (endliche) *Kurve* (oder ein „Weg") in der x-y-Ebene ist durch zwei Funktionen $x(\tau)$, $y(\tau)$ definiert, die für das Parameterintervall $0 \leqq \tau \leqq 1$ erklärt, eindeutig und stetig sind. Anfangs- und Endpunkt der betrachteten Kurve K mögen den Abstand $c > 0$ voneinander haben; nach einer Drehung des Koordinatensystems dürfen wir annehmen, daß

$$y(1) = y(0)\,, \qquad x(1) = x(0) + c\,, \qquad c > 0\,, \tag{1}$$

ist. Wir interessieren uns für diejenigen Sehnen von K, die parallel zu der Verbindungsgeraden des Anfangs- und des Endpunktes, also parallel zur x-Achse sind; wir nennen sie kurz die „*x-Sehnen*". Zu dem Parameterpaar τ_1, τ_2 gehört also eine x-Sehne, wenn

$$y(\tau_2) = y(\tau_1) \tag{2y}$$

ist; wir nennen diese Sehne eine *positive* x-Sehne, wenn überdies

$$x(\tau_2) > x(\tau_1)\,, \qquad \tau_2 > \tau_1\,, \tag{2x}$$

ist.

Der Satz, dessen Beweis das Ziel dieses Paragraphen ist und der die oben ausgesprochene Verschärfung des Satzes I — bei Beschränkung auf Kurven K — noch einmal verschärft, lautet nun:

Satz III. Die Kurve K sei für $0 \leqq \tau \leqq 1$ erklärt und erfülle die Bedingungen (1)*; es sei $a > 0, b > 0, a + b = c$; K besitze keine positive x-Sehne der Länge a. Dann besitzt K wenigstens zwei positive x-Sehnen der Länge b.*

Bemerkung: Von den „zwei" positiven x-Sehnen der Länge b wird nicht nur behauptet, daß die Parameterwerte ihrer Anfangspunkte voneinander verschieden sind, sondern sogar, daß die Anfangspunkte selbst (und damit auch die Endpunkte) nicht zusammenfallen.

Der Beweis des Satzes III wird auf Grund von zwei Hilfssätzen (Nr. 9 und 10) in Nr. 11 geführt werden; er ist unabhängig von dem Inhalt des § 1 und enthält somit — wenn man noch den Übergang von Kurven zu beliebigen Kontinuen hinzufügt — einen zweiten Beweis des Satzes I.

9. *Hilfssatz* 2. Die Kurve K erfülle außer den Bedingungen (1) noch die folgende:

$$y(\tau) \geqq y(0) = y(1) \qquad \text{für } 0 < \tau < 1 \,. \tag{3}$$

Dann besitzt K zu jeder positiven Zahl $s < c$ wenigstens eine positive x-Sehne der Länge s.

Beweis[8]. Die Zahl s, $0 < s < c$, sei gegeben; die Behauptung lautet: es gibt zwei solche Zahlen τ_1, τ_2 mit

$$0 \leqq \tau_1 < \tau_2 \leqq 1 \,, \tag{4}$$

daß

$$x(\tau_2) = x(\tau_1) + s \,, \tag{5x}$$

$$y(\tau_2) = y(\tau_1) \tag{5y}$$

ist. Da (5x) für $\tau_1 = \tau_2$ niemals erfüllt ist, genügt es, die Existenz zweier Zahlen, für die (5x) und (5y) gelten, in dem größeren Bereich

$$0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq 1 \tag{4'}$$

nachzuweisen. Fassen wir τ_1 und τ_2 als cartesische Koordinaten einer Ebene auf, so wird in dieser durch (4') ein abgeschlossenes Dreieck D bestimmt. Durch die Funktionen

$$v_1(\tau_1, \tau_2) = x(\tau_2) - x(\tau_1) - s \,, \tag{6x}$$

$$v_2(\tau_1, \tau_2) = y(\tau_2) - y(\tau_1) \tag{6y}$$

wird eine stetige Abbildung v von D in eine Ebene erklärt, in welcher v_1 und v_2 cartesische Koordinaten sind; die Behauptung lautet dann: der Nullpunkt o der v_1-v_2-Ebene gehört zu dem Bilde $v(D)$.

Um dies zu beweisen, dürfen wir annehmen, daß o nicht zu dem Bilde $v(\dot{D})$ des Randes $\dot{D}$ von D gehört; dann ist die Behauptung bewiesen, sobald gezeigt ist: die Umlaufzahl des geschlossenen Weges $v(\dot{D})$ um o — oder die „Ordnung" von o in bezug auf $v(\dot{D})$ — ist von 0 verschieden[9].

Wir lassen einen Punkt p den geschlossenen Weg $\dot{D}$ einmal im positiven Sinne durchlaufen und beobachten die Änderung, die das Winkelargument φ des Bildpunktes $v(p)$ erleidet. Aus (1), (3), (6x), (6y) liest

[8]) Die Existenz einer x-Sehne der Länge s, ohne Rücksicht darauf, ob sie positiv ist oder nicht, ergibt sich leicht mit Hilfe von Nr. 4.

[9]) Man vergl. z. B. *Alexandroff-Hopf*, a.a.O.[4]), S. 468.

man ab, daß sich $v(p)$ folgendermaßen verhält: während p, beginnend im Punkt $\tau_1 = \tau_2 = 0$, die Kante $0 \leqq \tau_1 = \tau_2 \leqq 1$ durchläuft, bleibt $v(p)$ in einem festen Punkt der negativen v_1-Achse, nämlich in dem Punkt $v_1 = -s$, $v_2 = 0$; während p die Kante $1 = \tau_2 \geqq \tau_1 \geqq 0$ im Sinne des abnehmenden τ_1 durchläuft, bewegt sich $v(p)$ in der Halbebene $v_2 \leqq 0$ bis in einen Punkt der positiven v_1-Achse, nämlich den Punkt $v_1 = c - s, v_2 = 0$; während p die Kante $1 \geqq \tau_2 \geqq \tau_1 = 0$ im Sinne des abnehmenden τ_2 durchläuft, bewegt sich $v(p)$ in der Halbebene $v_2 \geqq 0$ wieder in den Ausgangspunkt $v_1 = -s$, $v_2 = 0$ zurück. Das Winkelargument φ von $v(p)$ ändert sich bei Durchlaufung der ersten Kante gar nicht; bei Durchlaufung sowohl der zweiten als auch der dritten Kante nimmt es jedesmal um $+\pi$ zu. Die Gesamtänderung von φ ist also 2π, d. h. die Umlaufzahl von $v(\dot{D})$ um o ist 1. — Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

10.[10]) Unter einer „periodischen" Kurve P soll eine unendliche Kurve in der x-y-Ebene verstanden werden, die durch zwei Funktionen $x(\tau)$, $y(\tau)$ gegeben ist, welche für $-\infty < \tau < +\infty$ eindeutig und stetig sind und die Funktionalgleichungen

$$x(\tau+1) = x(\tau) + c, \quad c > 0 ; \qquad y(\tau+1) = y(\tau) \tag{7}$$

erfüllen. Ebenso wie in Nr. 8 für endliche Kurven seien durch (2x) und (2y) die positiven x-Sehnen von P erklärt.

Die Sehne, deren Anfangspunkt zum Parameterwert τ_1 und deren Endpunkt zu τ_2 gehört, bezeichnen wir mit $S(\tau_1, \tau_2)$. Wir nennen $S(\tau_1, \tau_2)$ „primitiv", wenn $\tau_1 < \tau_2 < \tau_1 + 1$ ist. Zwei primitive Sehnen $S(\tau_1, \tau_2)$ und $S(\tau_1', \tau_2')$ heißen einander „kongruent", wenn $\tau_1 \equiv \tau_1'$ und $\tau_2 \equiv \tau_2'$ mod. 1 ist; die Eigenschaften, x-Sehne zu sein, positiv zu sein und eine bestimmte Länge a zu haben, bleiben beim Übergang von einer Sehne zu einer kongruenten erhalten. Ist $S = S(\tau_1, \tau_2)$ primitiv, so ist auch $\bar{S} = S(\tau_2, \tau_1 + 1)$ primitiv; ist S positiv und von der Länge $a < c$, so ist auch $\bar{S}$ positiv, und zwar von der Länge $c - a$; denn es ist

$$y(\tau_2) = y(\tau_1), \quad x(\tau_2) = x(\tau_1) + a,$$

also

$$y(\tau_1 + 1) = y(\tau_1) = y(\tau_2),$$

$$x(\tau_1 + 1) = x(\tau_1) + c = x(\tau_2) + c - a;$$

wir nennen $\bar{S}$, sowie die mit $\bar{S}$ kongruenten Sehnen, zu S „komplemen-

[10]) Dieser Abschnitt und § 3 stehen in naher Berührung mit den folgenden beiden Noten von *F. Levi*: Beiträge zu einer Analysis der stetigen periodischen Kurven . . ., sowie: Über stetige periodische Kurven . . ., Ber. Sächs. Akad. Wiss., Math.-Phys. Klasse, LXXV (1923), S. 62—67 und 127—131.

tär“; die zu zwei Sehnen S und S' komplementären Sehnen $\overline{S}$ und $\overline{S}'$ sind einander dann und nur dann kongruent, wenn S und S' einander kongruent sind.

Hilfssatz 3. P sei eine periodische Kurve, für welche (7) gilt; es sei $0<s<c$. Dann besitzt P wenigstens zwei primitive positive x-Sehnen der Länge s, welche einander nicht kongruent sind[11]).

Beweis. Die Funktion $y(\tau)$ nimmt ihren gesamten Wertevorrat bereits für $0 \leqq \tau \leqq 1$ an; sie besitzt daher ein Minimum und erreicht dieses für einen gewissen Parameterwert τ_0. Verstehen wir unter K denjenigen Teil von P, der zu $\tau_0 \leqq \tau \leqq \tau_0 + 1$ gehört, so ist K eine endliche Kurve, welche die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt (man hat nur den Parameter τ durch $\tau - \tau_0$ zu ersetzen); folglich besitzt K eine positive x-Sehne $S = S(\tau_1, \tau_2)$ der Länge s; sie ist eine primitive Sehne von P, denn es ist

$$\tau_0 \leqq \tau_1 < \tau_2 \leqq \tau_0 + 1 \leqq \tau_1 + 1 \,. \tag{8}$$

Ebenso besitzt K eine primitive positive x-Sehne $S^* = S(\tau_1^*, \tau_2^*)$ der Länge $c - s$; analog zu (8) ist

$$\tau_0 \leqq \tau_1^* < \tau_2^* \leqq \tau_0 + 1 \leqq \tau_1^* + 1 \,. \tag{9}$$

Die zu S^* komplementäre Sehne $S' = S(\tau_2^*, \tau_1^* + 1)$ ist eine primitive positive Sehne der Länge s von P.

Wenn S und S' einander nicht kongruent sind, ist der Beweis beendet; es bleibt noch der Fall zu behandeln, in dem diese beiden Sehnen einander kongruent sind, in dem also

$$\tau_2^* \equiv \tau_1 \,, \qquad \tau_1^* \equiv \tau_2 \qquad \text{mod. } 1$$

ist; dies ist nach (8) und (9) nur möglich, wenn einer der folgenden beiden Fälle vorliegt:

$$\tau_0 = \tau_1 \,, \qquad \tau_2 = \tau_1^* \,, \qquad \tau_2^* = \tau_0 + 1 \,; \tag{10a}$$

$$\tau_0 = \tau_1^* \,, \qquad \tau_2^* = \tau_1 \,, \qquad \tau_2 = \tau_0 + 1 \,. \tag{10b}$$

Bevor wir aus (10a) oder (10b) Folgerungen ziehen, bemerken wir: es brauchen nur diejenigen s betrachtet zu werden, die $< \frac{c}{2}$ sind. Denn erstens ist, wenn $s = \frac{c}{2}$ ist, die zu S komplementäre Sehne ebenfalls von

[11]) Die Existenz zweier, einander nicht kongruenter Sehnen der Länge s von P, ohne Rücksicht darauf, ob sie primitiv und positiv sind oder nicht, ist in einem Satz von *F. Levi*, a.a.O. S. 63, enthalten; diese Abschwächung des Hilfssatzes 3 ist gleichbedeutend mit der folgenden Aussage: P besitzt zwei, einander nicht kongruente, primitive positive Sehnen, deren Längen $\equiv s$ mod. c sind.

der Länge $\frac{c}{2}$ und nicht mit S kongruent; zweitens: wenn unser Hilfssatz schon für jedes $s<\frac{c}{2}$ bewiesen und wenn dann ein $s'>\frac{c}{2}$ vorgelegt ist, so nehme man zwei primitive positive Sehnen S_1, S_2 von der Länge $s=c-s'$, die einander nicht kongruent sind; sind dann $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ zu diesen Sehnen komplementär, so erfüllen sie die Behauptung des Hilfssatzes.

Wir dürfen somit in der Tat $s<\frac{c}{2}$, also $s<c-s$ voraussetzen; außerdem liege einer der Fälle (10a) oder (10b) vor. Unter K^* verstehen wir den Teil von K, der zu $\tau_1^* \leqq \tau \leqq \tau_2^*$ gehört; nach Definition von τ_1^* und τ_2^* ist $y(\tau_1^*)=y(\tau_2^*)$; dieser Wert ist nach (10a) bzw. (10b) gleich dem Minimum $y(\tau_0)=y(\tau_0+1)$ aller Werte $y(\tau)$; folglich kann man auf K^* den Hilfssatz 2 anwenden; mithin besitzt K^*, da

$$x(\tau_2^*)=x(\tau_1^*)+c-s\,, \qquad s<c-s$$

ist, eine positive x-Sehne der Länge s; diese ist eine primitive Sehne von P und, wie aus (10a) bzw. (10b) hervorgeht, nicht mit $S=S(\tau_1,\tau_2)$ kongruent. — Damit ist der Hilfssatz 3 bewiesen.

11. *Beweis des Satzes III* (Nr. 8). Die für $0 \leqq \tau \leqq 1$ erklärten Funktionen $x(\tau)$, $y(\tau)$, welche K darstellen, ergänzen wir mittels der Funktionalgleichungen (7) zu Funktionen, die für alle τ erklärt sind; diese stellen eine unendliche periodische Kurve P dar, welche K als Teil enthält. Nach Hilfssatz 3 besitzt P zwei primitive positive Sehnen $S=S(\tau_1,\tau_2)$, $S'=S(\tau_1',\tau_2')$ der Länge a, die einander nicht kongruent sind; indem wir allenfalls zu kongruenten Sehnen übergehen, dürfen wir annehmen, daß

$$0 \leqq \tau_2 < 1\,, \qquad 0 \leqq \tau_2' < 1$$

ist. Wäre $\tau_1 \geqq 0$ oder $\tau_1' \geqq 0$, so wäre S bzw. S' eine positive x-Sehne der Länge a von K — entgegen der Voraussetzung des Satzes III; es ist also $\tau_1<0$, $\tau_2<0$ und daher $\tau_1+1<1$, $\tau_2+1<1$. Folglich sind die zu S und S' komplementären Sehnen $\overline{S}=S(\tau_2,\tau_1+1)$ und $\overline{S}'=S(\tau_2',\tau_1'+1)$ Sehnen der Kurve K; sie sind positive Sehnen der Länge $b=c-a$; da S und S' einander nicht kongruent sind, sind auch $\overline{S}$ und $\overline{S}'$ einander nicht kongruent, d. h. es ist nicht zugleich $\tau_2=\tau_2'$ und $\tau_1+1=\tau_1'+1$.

Es muß noch gezeigt werden, daß K zwei positive x-Sehnen der Länge b besitzt, die wirklich voneinander *verschieden* sind — im Sinne der an die Formulierung des Satzes III geknüpften „Bemerkung“ (Nr. 8). $\overline{S}$ und $\overline{S}'$ sind gewiß voneinander verschieden, falls der Anfangspunkt p und der Endpunkt q von $\overline{S}$ die folgende Eigenschaft E haben: es gibt nur einen einzigen Wert von τ, nämlich τ_2, zu welchem p gehört, und für $\tau_2 < \tau < 1$ nur einen einzigen Wert von τ, zu welchem q gehört.

Wenn p und q diese Eigenschaft nicht besitzen, gehen wir folgendermaßen vor[12]). Es sei α_0 der kleinste, α_1 der größte Wert von τ, zu dem p gehört; gibt es für $\alpha_1 < \tau < 1$ noch mehrere Werte, zu denen q gehört, so sei β_0 der kleinste, β_1 der größte von ihnen; wir entfernen aus K diejenigen Teile, die zu $\alpha_0 < \tau \leqq \alpha_1$ und zu $\beta_0 < \tau \leqq \beta_1$ gehören; es bleibt eine Kurve K' übrig, die sich in naheliegender Weise stetig auf einen Parameter σ, $0 \leqq \sigma \leqq 1$, beziehen läßt, der eine monoton wachsende Funktion von τ — in den übrig gebliebenen Teilen des Intervalles $0 \leqq \tau \leqq 1$ — ist; K' hat dieselben Endpunkte wie K; jede positive x-Sehne von K' ist zugleich eine positive x-Sehne von K. Die Punkte p und q besitzen — falls sie überhaupt noch beide auf K' liegen[13]) — in bezug auf die Kurve K' und ihren Parameter σ die Eigenschaft E; folglich gibt es, wie oben bewiesen worden ist, eine positive x-Sehne S^* der Länge b von K', welche von $\overline{S}$ verschieden ist; da S^* zugleich positive x-Sehne von K ist, ist damit der Satz III vollständig bewiesen.

§ 3.

12. Unter einem „geschlossenen Weg“ $\mathfrak{z}$ verstehen wir wie üblich das durch eine eindeutige und stetige Abbildung f gelieferte Bild einer Kreislinie Z, auf der ein Durchlaufungssinn als „positiv“ ausgezeichnet ist. Je zwei, voneinander verschiedene, Punkte p_1, p_2 von Z bestimmen genau einen *echten* Teilbogen von Z, der bei positiver Durchlaufung den Anfangspunkt p_1 und den Endpunkt p_2 hat; diesen gerichteten Bogen bezeichnen wir mit $\overrightarrow{p_1 p_2}$. Ist $f(p_1) = f(p_2)$, entspricht also den Endpunkten des Bogens ein Doppelpunkt von $\mathfrak{z}$, so nennen wir das Bild $f(\overrightarrow{p_1 p_2})$ eine „Schleife“ von $\mathfrak{z}$; jede Schleife $f(\overrightarrow{p_1 p_2})$ kann selbst als geschlossener Weg aufgefaßt werden, indem man p_2 mit p_1 identifiziert.

Liegt $\mathfrak{z}$ in einer Ebene, und ist o ein Punkt der Ebene, der nicht auf $\mathfrak{z}$ liegt, so ist in bekannter Weise die Umlaufzahl von $\mathfrak{z}$ um o erklärt[4]); jede Schleife von $\mathfrak{z}$ besitzt, da sie selbst ein geschlossener Weg ist, ebenfalls eine Umlaufzahl um o.

---

[12]) Wir könnten uns hier auch auf den folgenden Satz berufen: Anfangs- und Endpunkt der stetigen Kurve K lassen sich durch einen Jordanschen (doppelpunktfreien) Bogen K' verbinden, der in K enthalten ist und auf dem die Punkte in derselben Reihenfolge durchlaufen werden wie auf K; cf. *H. Tietze*, Über stetige Kurven, Jordansche Kurvenbögen und geschlossene Jordansche Kurven, Math. Zeitschr. 5 (1919), 284.

[13]) Wenn q zu keinem τ mit $\alpha_1 < \tau < 1$ gehört, liegt q nicht auf K'.

Satz IV. $\mathfrak{z}$ sei ein geschlossener Weg in der Ebene und o ein nicht auf $\mathfrak{z}$ gelegener Punkt der Ebene; die Umlaufzahl von $\mathfrak{z}$ um o sei $n \geqq 2$; dann gibt es zu jeder Zahl k aus der Reihe $1, 2, \ldots, n-1$ *wenigstens zwei Schleifen von $\mathfrak{z}$, deren Umlaufzahlen um o gleich k sind*[14]).

Beweis. Wir führen auf Z einen Parameter τ, $-\infty < \tau < +\infty$, so ein, daß τ bei einmaliger positiver Durchlaufung von Z um $+1$ zunimmt. Bezeichnen r, φ in der üblichen Weise Polarkoordinaten in der Ebene mit dem Nullpunkt o, so sind r und φ stetige Funktionen von τ, die die Funktionalgleichungen

$$r(\tau+1) = r(\tau)\,, \qquad \varphi(\tau+1) = \varphi(\tau) + n \cdot 2\pi$$

erfüllen. Nach dem Hilfssatz 3 (Nr. 10), in dem man x durch φ, y durch r zu ersetzen hat, gibt es zu jedem k, $0 < k < n$, zwei Wertepaare τ_1, τ_2 und τ_1', τ_2' mit folgenden Eigenschaften:

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_1 + 1\,, \qquad \tau_1' < \tau_2' < \tau_1' + 1\,; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} r(\tau_2) &= r(\tau_1)\,, \quad & \varphi(\tau_2) &= \varphi(\tau_1) + k \cdot 2\pi\,, \\ r(\tau_2') &= r(\tau_1')\,, \quad & \varphi(\tau_2') &= \varphi(\tau_1') + k \cdot 2\pi\,; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\text{es ist nicht zugleich } \tau_1 \equiv \tau_1' \text{ und } \tau_2 \equiv \tau_2' \text{ mod. } 1. \tag{3}$$

Wir verstehen unter p_1, p_2, p_1', p_2' die Punkte von Z, die zu den Werten $\tau_1, \tau_2, \tau_1', \tau_2'$ gehören. Dann besagt (1), daß den Intervallen $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$ und $\tau_1' \leqq \tau \leqq \tau_2'$ die Bögen $\overrightarrow{p_1 p_2}$ und $\overrightarrow{p_1' p_2'}$ entsprechen; ist k ganz, so besagen die Gleichungen (2): es ist $f(p_1) = f(p_2)$ und $f(p_1') = f(p_2')$, d. h. $f(\overrightarrow{p_1 p_2})$ und $f(\overrightarrow{p_1' p_2'})$ sind Schleifen, und zwar haben sie um o die Umlaufzahlen k; (3) bedeutet, daß diese beiden Schleifen voneinander verschieden sind. Der Satz IV ist also richtig[15]).

---

[14]) Zwei Schleifen $f(\overrightarrow{p_1 p_2})$ und $f(\overrightarrow{q_1 q_2})$ betrachten wir als verschieden voneinander, wenn nicht zugleich $p_1 = q_1$ und $p_2 = q_2$ ist — auch dann, falls die durch f gelieferten Bilder der beiden Bögen zusammenfallen.

[15]) Benutzt man den Hilfssatz 3 nur in der abgeschwächten Form, die in Fußnote [11]) genannt wurde, so erhält man einen Beweis für die folgende abgeschwächte Behauptung des Satzes IV: „zu jedem k, das $\not\equiv 0$ mod. n ist, gibt es wenigstens zwei Schleifen von $\mathfrak{z}$, deren Umlaufzahlen $\equiv k$ mod. n sind."

Korollar[16]). *Ein geschlossener Weg in der Ebene, der um einen Punkt eine Umlaufzahl $n \geqq 2$ hat, besitzt wenigstens $n - 1$ Doppelpunkte*[17]).

Denn jeder Doppelpunkt zerlegt den Weg in genau zwei Schleifen, und die Anzahl der Schleifen ist nach Satz IV wenigstens gleich $2n-2$.

In dem Korollar ist die bekannte Tatsache enthalten, daß ein *einfach* geschlossener Weg, d. h. ein geschlossener Weg ohne Doppelpunkt, um irgend einen Punkt der Ebene nur die Umlaufzahl $+1$ oder -1 oder 0 haben kann.

13. Der Satz IV läßt sich in einer Richtung verallgemeinern, die durch die erwähnten[10]) Arbeiten von *F. Levi* nahegelegt wird; er ist nämlich ein Spezialfall des folgenden Satzes:

Satz V. Auf einer orientierbaren (geschlossenen oder offenen) Fläche F sei $\mathfrak{z}_0$ ein geschlossener Weg, der nicht homotop 0, *und $\mathfrak{z}$ ein geschlossener Weg, der der Potenz $\mathfrak{z}_0^n$, $n \geqq 2$, homotop ist. Dann gibt es zu jeder Zahl k aus der Reihe* $1, 2, \ldots, n-1$ *wenigstens zwei Schleifen von $\mathfrak{z}$, die der Potenz $\mathfrak{z}_0^k$ homotop sind.*[18])

Beweis. Wenn F vom topologischen Typus des unendlichen Kreiszylinders und $\mathfrak{z}_0$ ein Weg ist, der den Zylinder einmal umläuft, der also einem erzeugenden Element der (unendlich zyklischen) Fundamentalgruppe von F entspricht, so kann man F derart auf eine Ebene, aus der ein Punkt o entfernt ist, topologisch abbilden, daß $\mathfrak{z}_0$ in einen geschlossenen Weg übergeht, der um o die Umlaufzahl 1 hat; man erkennt dann ohne Mühe, daß in diesem Spezialfall die Behauptung des Satzes V mit der Behauptung des Satzes IV identisch ist. Wir werden die allgemeine Behauptung des Satzes V durch Zurückführung auf den somit schon erledigten Spezialfall des Zylinders beweisen.

F sei also beliebig. Wir zeichnen auf $\mathfrak{z}$ einen Punkt p aus und repräsentieren die Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von F in bekannter Weise durch

---

[16]) Das Korollar folgt bereits aus der in Fußnote [15]) genannten abgeschwächten Form des Satzes IV.

[17]) Unter einem Doppelpunkt von $\mathfrak{z} = f(Z)$ verstehen wir ein Punktepaar (p_1, p_2) von Z mit $p_1 \neq p_2$, $f(p_1) = f(p_2)$; zwischen (p_1, p_2) und (p_2, p_1) wird nicht unterschieden; zwei Doppelpunkte (p_1, p_2) und (q_1, q_2) gelten als verschieden, wenn die beiden (ungeordneten) Punktepaare nicht miteinander zusammenfallen, auch wenn $f(p_1) = f(q_1)$ ist.

[18]) Für den Begriff der Homotopie sowie für den ganzen Beweis des Satzes V vergl. man *Seifert-Threlfall*, Lehrbuch der Topologie (Berlin und Leipzig 1934), S. 14, § 42, § 49, § 55; oder auch: *H. Hopf*, Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, 2. Teil, § 1, Math. Ann. 102 (1929), S. 562. — Das Wort „homotop" ist wie bei *Seifert-Threlfall* S. 14 („frei" homotop), nicht wie S. 150 zu verstehen.

diejenigen Klassen der geschlossenen Wege durch p, welche bei stetiger Deformation dieser Wege unter Festhaltung von p entstehen. z sei das Element von $\mathfrak{F}$, das dem Wege $\mathfrak{z}$ entspricht; aus der Voraussetzung über $\mathfrak{z}$ ergibt sich: es gibt ein Element z_0 von $\mathfrak{F}$, das nicht die Gruppeneins ist, so daß $z = z_0^n$ ist[19]); in leichter Abänderung der Bezeichnung verstehen wir unter $\mathfrak{z}_0$ einen geschlossenen Weg durch p aus der Wegeklasse z_0. Es sei $\mathfrak{U}$ die von z_0 erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{F}$; zu $\mathfrak{U}$ konstruieren wir in bekannter Weise die zugehörige Überlagerungsfläche $\bar{F}$ von F: man betrachte einen von p ausgehenden und nach p zurückkehrenden Weg dann und nur dann als geschlossen, wenn seine Wegeklasse zu $\mathfrak{U}$ gehört. Φ sei die Abbildung, die jedem Punkt von $\bar{F}$ den „unter" ihm gelegenen Punkt von F zuordnet; dann gibt es auf $\bar{F}$ Wege $\bar{\mathfrak{z}}_0$ und $\bar{\mathfrak{z}}$, die durch Φ topologisch auf $\mathfrak{z}_0$ bzw. $\mathfrak{z}$ abgebildet werden; $\bar{\mathfrak{z}}$ ist auf $\bar{F}$ homotop zu $\bar{\mathfrak{z}}_0^n$; ist $\bar{\mathfrak{s}}$ eine Schleife von $\bar{\mathfrak{z}}$, die der Potenz $\bar{\mathfrak{z}}_0^k$ homotop ist, so ist $\Phi(\bar{\mathfrak{s}}) = \mathfrak{s}$ eine Schleife von $\mathfrak{z}$, die homotop zu $\mathfrak{z}_0^k$ ist. Daher ist unser Satz bewiesen, sobald der entsprechende Satz für die Wege $\bar{\mathfrak{z}}_0$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ auf $\bar{F}$ bewiesen ist.

Da F nicht die projektive Ebene ist, enthält $\mathfrak{F}$ bekanntlich[20]) kein Element einer endlichen Ordnung > 1; z_0 ist nicht die Gruppeneins; folglich ist z_0 ein Element unendlicher Ordnung und $\mathfrak{U}$ daher eine freie zyklische Gruppe. Da $\mathfrak{U}$ die Fundamentalgruppe von $\bar{F}$, und $\bar{F}$ infolge der Orientierbarkeit von F selbst orientierbar ist, ist $\bar{F}$ daher bekanntlich[20]) dem Kreiszylinder homöomorph; da $\mathfrak{U}$ von z_0 erzeugt wird, erzeugt die Wegeklasse von $\bar{\mathfrak{z}}_0$ die Fundamentalgruppe von $\bar{F}$. Auf $\bar{F}$ liegt also der Spezialfall vor, der bereits durch den Satz IV erledigt ist. Damit ist der Satz V bewiesen.

Korollar. Unter den Voraussetzungen des Satzes V besitzt $\mathfrak{z}$ wenigstens $n - 1$ Doppelpunkte.

Dies ist ein Satz von *F. Levi*[21]); er ergibt sich hier analog wie das Korollar in Nr. 12, das er als Spezialfall enthält.

(Eingegangen den 13. April 1937.)

[19]) Zunächst kann man, nach einer etwaigen Deformation von $\mathfrak{z}_0$, annehmen, daß auch $\mathfrak{z}_0$ durch p geht; bezeichnen wir dann die Wegeklasse von $\mathfrak{z}_0$ mit z_{00}, so bedeutet die vorausgesetzte Homotopie von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_0^n$, daß z und z_{00}^n konjugierte Gruppenelemente sind, daß es also ein $y \in \mathfrak{F}$ mit $z = y z_{00}^n y^{-1}$ gibt; dann setze man $z_0 = y z_{00} y^{-1}$.

[20]) Dies ergibt sich aus der bekannten Deutung der Fundamentalgruppe als Gruppe fixpunktfreier Bewegungen der euklidischen oder hyperbolischen Ebene.

[21]) A.a.O. [10]), S. 67.