Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. I.

Autor(en): **Fueter, Rud.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10189

Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen I.

Von RUD. FUETER, Zürich

Einleitung

In verschiedenen Artikeln habe ich die Theorie der rechts- und linksregulären Funktionen einer Quaternionenvariablen entwickelt. Für sie gelten insbesondere die dem ersten und zweiten Cauchy'schen Satze entsprechenden Hauptsätze I und II. Die Funktionen enthalten als Spezialfall die analytischen Funktionen von einer oder zwei komplexen Variablen, sowie das durch zwei analytische Funktionen von zwei Variablen vermittelte Abbildungsproblem. Die entwickelte Theorie zeigt, daß alle wesentlichen Eigenschaften der Theorie der analytischen Funktionen auch für diese allgemeineren Funktionen gelten. Die Frage, warum gerade die Quaternionen als hyperkomplexes System gewählt wurden, wird durch einen bekannten Satz der Theorie der Algebren beantwortet[1]). Denn zur Aufstellung einer Funktionentheorie ist doch wohl die Annahme unumgänglich, daß die reellen Komponenten der Einheiten ein Kontinuum durchlaufen. Die Quaternionen sind aber für diesen Fall das letzte und allgemeinste Beispiel, falls eine *Divisionsalgebra* verlangt wird. Es ist wahrscheinlich, daß mit dem Auftreten von Nullteilern auch Methoden und Resultate der Funktionentheorie anders werden.

Im folgenden studiere ich die Singularitäten der rechtsregulären Funktionen (für linksreguläre gelten analoge Entwicklungen). Man wird isolierte *punktförmige*, *kurvenförmige* und *flächenförmige* Singularitäten unterscheiden müssen. In allen Fällen gelingt die analytische Darstellung für Punkte der Umgebung der Singularität. Damit ist die Einteilung in *wesentliche und unwesentliche*[2]) *singuläre Gebilde* je nach der Unendlichkeit oder Endlichkeit der Terme möglich. Bei unwesentlich singulären Gebilden ist außerdem zwischen solchen 0. (*Pole*), *2. und 3. Dimension* zu unterscheiden. Die zu diesen Resultaten führenden Methoden scheinen mir wesentlich zu sein. Wie weit meine Entwicklungen für die Theorie des Potentials oder der analytischen Funktionen von zwei Variablen zu verwenden sind, ist mir noch nicht klar. Jedenfalls zeigt sich deutlich die Überlegenheit der beiden Hauptsätze gegenüber den Methoden, die

[1]) *L. E. Dickson:* Algebren und ihre Zahlentheorie. Orell Füßli, Zürich, 1927. Seite 46.

[2]) Ich ziehe das kürzere „unwesentlich“ dem gebräuchlichen „außerwesentlich“ vor.

bisher in der letztern Theorie verwendet wurden, die die Integrale über dreidimensionale Gebilde nicht verwendete. Der allgemeinere Fall scheint hier wirklich auch die mannigfaltigen Verhältnisse, die möglich sind, zu entwirren.

Im folgenden setze ich die Kenntnis meiner bisherigen Publikationen voraus[3]).

1. Hilfsbetrachtungen

In meiner letzten Arbeit (Fueter 3) habe ich die Funktionen $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ und $q_{n_1 n_2 n_3}(z)$ eingeführt; sie sind links- und rechtsregulär. Ferner ist die Reihe:

$$\Delta\left((\zeta - z)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, p_{n_1 n_2 n_3}(z)\,, \quad |z| < |\zeta|\,, \tag{a}$$

aufgestellt worden, die für alle $|z| < |\zeta|$ bei der vorgeschriebenen Summation absolut und gleichmäßig konvergiert. Setzt man hier z^{-1} für z und ζ^{-1} für ζ, so erhält man durch eine einfache Umformung:

$$\Delta\left((\zeta - z)^{-1}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} \zeta^{-1} n(\zeta)^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta^{-1})\, p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1}, \; |z| > |\zeta|, \tag{b}$$

und diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig bei der vorgeschriebenen Summation in jedem Bereiche, in dem $|z| > |\zeta|$ ist. Nun gilt der Satz:

---

[3]) *Rud. Fueter:* Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen. Comm. Math. Helv. vol. 7, Seite 307. Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Monatshefte für Math. und Phys. 43 Bd., S. 69. Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Comm. Math. Helv., vol. 8, S. 371. Die Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Vortrag Int. Math. Kongreß, Oslo, 1936 (noch nicht erschienen).

Diese Arbeiten werden im folgenden als Fueter 1, 2, 3, 4 zitiert. Am Int. Math. Kongreß in Oslo hat mich Herr Hamel auf weitere Literatur aufmerksam gemacht, die mir entgangen war und die mit meinen Untersuchungen in Beziehung stehen:

G. C. Moisil: Sur l'équation $\Delta u = 0$. Com. Rend. acad. Sc. Paris, t. 191 (1930), p. 984.

Moisil et Théodorescu: Fonctions holomorphes dans l'espace. Mathematica, vol. V (1931), p. 142.

Iwanenko und Nikolsky: Über den Zusammenhang zwischen den Cauchy-Riemann'schen und Dirac'schen Differentialgleichungen. Ztschr. für Phys., Bd. 63 (1930), S. 129.

Besonders in der mittlern Arbeit werden ähnliche Methoden, nur ohne explizite Einführung der Quaternionen, wie von mir benutzt. Allein sie beziehen sich nur auf den Raum, d. h. auf den Fall von drei Variablen. Dementsprechend sind die Integrale nur solche über zweidimensionale Gebilde.

1. Satz: *Ist $w = f(z)$ in H rechtsregulär, so ist:*

$$w' = f(z^{-1})\,n(z)^{-1}z^{-1}$$

rechtsregulär in dem durch z^{-1} abgebildeten Hyperraume H'. Ist $w = f(z)$ in H linksregulär, so ist:

$$w' = z^{-1}n(z)^{-1}f(z^{-1})$$

linksregulär in H'.

Beweis: Wir beweisen nur den ersten Teil des Satzes. Man kann ihn durch ausrechnen beweisen, indem man zeigt:

$$\sum_{(K)} w'^{(k)} i_k = 0\,.$$

Einfacher wird der Beweis mit Hilfe des II. Hauptsatzes[4]). Es ist:

$$w' = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{(R)} f(\zeta)\,dZ\varDelta\left((\zeta - z^{-1})^{-1}\right) n(z)^{-1}z^{-1}\,,$$

wo R die Hypergrenzfläche von H ist und z in H' liegt. Man hat also nur zu zeigen, daß für beliebiges $\zeta \neq z^{-1}$:

$$V = \varDelta\left((\zeta - z^{-1})^{-1}\right) n(z)^{-1}z^{-1} = -\,4n(\zeta - z^{-1})^{-1}(\zeta - z^{-1})^{-1}n(z)^{-1}z^{-1}$$

rechtsregulär in z ist. Nun ist:

$$V = -\,4\,n(z\zeta - 1)^{-1}(z\zeta - 1)^{-1},$$

$$\sum_{(K)} V^{(k)} i_k = 4\left(4n(z\zeta - 1)^{-2}\bar{\zeta} - 4n(z\zeta - 1)^{-2}\bar{\zeta}\right) = 0\,.$$

Man sieht aus Satz 1, daß $p_{n_1n_2n_3}(z^{-1})n(z)^{-1}z^{-1}$ in (b) rechtsregulär ist in jedem Bereiche, der $z = 0$ nicht enthält. Entsprechend für den Ausdruck $\zeta^{-1}n(\zeta^{-1})q_{n_1n_2n_3}(\zeta^{-1})$, der linksregulär ist in jedem endlichen Bereiche.

Es sei jetzt $w = f(z)$ eine im abgeschlossenen Hyperraume H zwischen zwei Hyperkugeln K_ϱ und K_P, $\varrho < P$, eindeutige rechtsreguläre Funktion. Dann ist nach dem II. Hauptsatze, für jedes z in H:

$$w = f(z) = S_+ + S_-, \qquad \text{wo:}$$

$$S_+ = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{(K_P)} f(\zeta)\,dZ\varDelta\left((\zeta - z)^{-1}\right)\,,\quad S_- = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{(K_\varrho)} f(\zeta)\,dZ\varDelta\left((\zeta - z)^{-1}\right)$$

[4]) *Fueter* 1, S. 318.

ist. Im ersten Integral ist $|z| < |\zeta| = P$, im zweiten $|z| > |\zeta| = \varrho$. Somit darf man für $\Delta((\zeta - z)^{-1})$ im ersten Integral die Reihe (a), im zweiten die Reihe (b) einsetzen. Dann wird:

$$\begin{aligned}
w &= S_+ + S_- , \\
S_+ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z) , \\
S_- &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} d_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1} ,
\end{aligned} \tag{1}$$

wo:

$$\begin{aligned}
c_{n_1 n_2 n_3} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) , \\
d_{n_1 n_2 n_3} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, \zeta^{-1} n(\zeta)^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta^{-1}) .
\end{aligned} \tag{2}$$

Wegen Hauptsatz I[5]) ist hier K_P, resp. K_ϱ durch die Hyperfläche R um 0 ersetzt worden, die zwischen oder auf den beiden Hyperkugeln liegt und topologisch denselben homomorph ist, sonst aber beliebig gewählt werden kann. Die Richtung der Normalen ist in beiden Integralen (2) ins Innere von R genommen. Man sieht, daß S_+ auf und im ganzen Innern von K_P, S_- auf und im ganzen Äußern von K_ϱ eine rechtsreguläre Funktion darstellt.

Durch Translation kann man die Entwicklung statt um 0 um einen beliebigen endlichen Punkt $z = c$ vornehmen; sie lautet dann:

$$\begin{aligned}
w &= S_+ + S_- , \\
S_+ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z - c) , \\
S_- &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} d_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}((z - c)^{-1})\, n(z - c)^{-1} (z - c)^{-1} ,
\end{aligned} \tag{1a}$$

wo:

$$\begin{aligned}
c_{n_1 n_2 n_3} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c) , \\
d_{n_1 n_2 n_3} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, (\zeta - c)^{-1} n(\zeta - c)^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}((\zeta - c)^{-1}) .
\end{aligned} \tag{2a}$$

---

[5]) *Fueter* I, S. 312.

R ist eine geschlossene, der Hyperkugel homomorphe Hyperfläche, die c im Innern enthält, und auf der $f(z)$ rechtsregulär ist. Wir beschränken uns im weiteren auf den Fall $c = 0$.

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß *w im ganzen Innern von K_ϱ rechtsregulär ist.* Dann muß nach Hauptsatz I:

$$S_- = 0\,, \quad \text{und}$$

$$w = f(z) = S_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z)\,,$$

sein, wo $c_{n_1 n_2 n_3}$ den in (2) angegebenen Wert hat. Nun gilt der

2. Satz: *Ist $w = f(z)$ in K_P rechtsregulär, so ist w nur auf eine Weise in K_P in eine Reihe S_+ entwickelbar.*

Wäre w auf zwei Weisen entwickelbar, so müßte ein S_+ existieren, das in und auf einer Hyperkugel K_ϱ um 0 absolut und gleichmäßig konvergent ist, dessen Summe $= 0$ ist, und dessen $c_{n_1 n_2 n_3}$ nicht alle null sind. Man setze $x_0 = 0$; dann muß auch[6]):

$$0 = \sum_{n=0} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$$

sein für alle x_k, für die $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqq \varrho^2$. Dies ist nach bekannten Sätzen nur möglich, wenn bei allen Kombinationen der n_1, n_2, n_3 die $c_{n_1 n_2 n_3}$ null sind.

Wenden wir diesen Satz 2 auf die Funktion $p_{n_1 n_2 n_3}$ an, so muß nach (2):

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\zeta)\, dZ\, q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) \begin{cases} = 1\,, \text{ wenn } \nu_k = n_k\,, \quad k = 1, 2, 3\,. \\ = 0\,, \text{ wenn } \nu_k \neq n_k \text{ für wenigstens ein } k\,, \end{cases} \tag{c}$$

wo R topologisch der Hyperkugel äquivalent ist, und 0 im Innern enthält.

Umgekehrt gilt noch der

3. Satz: *Konvergiert die in* (1) *gegebene Reihe S_+ auf einer Hyperkugel um* 0 *absolut und gleichmäßig, so tut sie es auch im Innern der Hyperkugel und stellt dort eine rechtsreguläre Funktion dar.*

Denn setzt man $z = rz_1$, wo r der absolute Betrag $|z| = r$ ist, so liegt z_1 auf der Einheitshyperkugel $|z_1| = 1$. Es ist dann:

$$S_+ = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z_1)$$

---

[6]) siehe *Fueter* 3, S. 375.

für $r = \varrho$ und beliebiges z_1 absolut und gleichmäßig konvergent, falls ϱ der Radius der Hyperkugel ist. Also konvergiert sie auch absolut und gleichmäßig für jedes $r \leqq \varrho$, d. h. für jeden Punkt im Innern von K_ϱ. Da die $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ rechtsregulär sind, stellt S_+ eine rechtsreguläre Funktion dar.

Wir können aus (c) noch weitere Integralformeln erhalten. Nimmt man statt R die Hyperkugel K_ϱ mit dem Radius ϱ um 0, so ist:

$$dZ = -\frac{\zeta}{\varrho} \varrho^3 dr_1 ,$$

wo dr_1 das Hyperflächenelement der Einheitskugel ist. Also wird:

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K_\varrho)} p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\zeta)\, \zeta \varrho^2 dr_1 q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) = 0, 1 .$$

Man mache hier die Substitution $\zeta = \zeta_1^{-1}$. Dann geht K_ϱ in die Hyperkugel $K_{\varrho^{-1}}$ um 0 über, und es wird:

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K_{\varrho^{-1}})} p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\zeta_1^{-1})\, \zeta_1^{-1} \varrho^2 dr_1 q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta_1^{-1}) = 0, 1 .$$

Nun ist aber, wenn dZ_1 das dZ entsprechende Element von $K_{\varrho^{-1}}$ bedeutet:

$$dZ_1 = -\zeta_1 \varrho^{-2} dr_1 ,$$

also da $n(\zeta_1)^{-1} = \varrho^2$ ist:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K_{\varrho^{-1}})} p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\zeta_1^{-1})\, n(\zeta_1)^{-1} \zeta_1^{-1} dZ_1 \zeta_1^{-1} n(\zeta_1)^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta_1^{-1}) = 0, 1 .$$

Nach Satz 1 sind aber die erste und zweite Funktion rechts- resp. linksregulär in ζ_1. Also darf man statt $K_{\varrho^{-1}}$ wieder R setzen, und es wird:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(R)} p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\zeta^{-1})\, n(\zeta)^{-1} \zeta^{-1} dZ \zeta^{-1} n(\zeta)^{-1})\, q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta^{-1}) \begin{cases} = 1, \ \nu_k = n_k, \ k = 1, 2, 3, \\ = 0, \ \nu_k \neq n_k \text{ für wenigstens ein } k . \end{cases} \quad \text{(d)}$$

Weiter ist $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ in und auf R rechtsregulär, und $z^{-1} n(z)^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})$ als ganze rationale Funktion der x_k in und auf R linksregulär[7]); daher wird nach dem ersten Hauptsatze:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(R)} p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\zeta)\, dZ \zeta^{-1} n(\zeta)^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta^{-1}) = 0 . \quad \text{(e)}$$

[7]) *Fueter* 3, S. 373.

Macht man hier dieselbe Substitution wie oben, indem man R als Hyperkugel K_ϱ um 0 auffaßt und zu $K_{\varrho^{-1}}$ übergeht; so ergibt (e):

$$\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{(R)} p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta^{-1})\, n(\zeta)^{-1}\zeta^{-1}dZ q_{n_1n_2n_3}(\zeta) = 0 \,. \tag{f}$$

Nehmen wir jetzt an,

$$w = S_+ + S_-$$

sei eine beliebige Doppelreihe, von der Form, wie sie in (1) angegeben ist. Dieselbe konvergiere absolut und gleichmäßig im Raume H zwischen zwei Hyperkugeln K_P und K_ϱ, $P > \varrho$, die beiden Hyperkugeln mit eingeschlossen. w ist dann sicherlich in H eine rechtsreguläre Funktion. Wir multiplizieren w von rechts mit $dZq_{\nu_1\nu_2\nu_3}(z)$ und integrieren über K_P. Dabei ist dZ das Element von K_P. Dann wird wegen (c) und (f):

$$c_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{(K_P)} f(\zeta)\, dZ q_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta) \,.$$

Multiplizieren wir von rechts mit $dZz^{-1}n(z)^{-1}q_{\nu_1\nu_2\nu_3}(z^{-1})$ und integrieren über K_ϱ, wo dZ das Element von K_ϱ ist, so wird wegen (d) und (e):

$$d_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{(K_\varrho)} f(\zeta)\, dZ\zeta^{-1}n(\zeta)^{-1}q_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta^{-1}) \,.$$

Die Koeffizienten c und d sind daher *eindeutig* bestimmt. Daraus folgt der

4. Satz: *Ist $w = f(z)$ in dem abgeschlossenen Raume H, der zwischen den beiden Hyperkugeln K_P und K_ϱ, $P > \varrho$, liegt, rechtsregulär, so läßt sich w in H auf eine und nur auf eine Weise in die Reihe* (1) *entwickeln, wo die Koeffizienten die Werte* (2) *haben.*

Aus diesem Satze folgen sofort die beiden Sätze, die sich auf S_- beziehen, und den Sätzen 2. und 3. entsprechen:

5. Satz: *Konvergiert $w = S_-$ außerhalb und auf K_ϱ absolut und gleichmäßig, so ist w außerhalb K_ϱ nur auf eine Weise in die Reihe S_- entwickelbar.*

6. Satz: *Konvergiert S_- auf K_ϱ gleichmäßig und absolut, so tut sie es auch außerhalb der Hyperkugel und stellt dort eine rechtsreguläre Funktion dar.*

Ferner können wir von Satz 4 folgende Anwendung machen. Es sei $w = f(z)$ eine in K_P rechtsreguläre Funktion, mit Ausnahme von 0.

Dagegen soll $|f(z)|$ in der Umgebung von 0 beschränkt bleiben. Wir legen um 0 eine zweite Hyperkugel K_ϱ, wo ϱ beliebig klein sein kann, und sicherlich $\varrho < P$ ist, und entwickeln $w = f(z)$ in die Reihe (1) in H zwischen K_ϱ und K_P. Auf K_ϱ ist:

$$|f(z)| < M,$$

wo M nach Annahme von ϱ unabhängig ist. Somit wird in der Reihe wegen (2):

$$|d_{n_1 n_2 n_3}| < \frac{M}{8\pi^2} \int\limits_{(K_\varrho)} dr \varrho^{-3} \, |q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta^{-1})| \leqq \frac{(n+2)!\,M}{2} \varrho^{n+3}, \; n = n_1 + n_2 + n_3 \,,$$

wobei von der unten angegebenen Abschätzungsformel (l) Gebrauch gemacht wurde. Da ϱ beliebig klein ist, muß für jedes n_1, n_2, n_3:

$$d_{n_1 n_2 n_3} = 0$$

sein, das heißt, $w = f(z)$ ist auch in 0 rechtsregulär.

7. Satz: *Ist $w = f(z)$ in einer Hyperkugel rechtsregulär mit Ausnahme des Mittelpunktes der Hyperkugel, ist ferner $|f(z)|$ in der Hyperkugel beschränkt, so ist $w = f(z)$ auch im Mittelpunkt rechtsregulär.*

Wir wollen noch einige Formeln angeben, die man sofort aus den Definitionen der p- resp. q-Funktionen erhält[8]):

$$p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1} = \frac{p_{n_1 n_2 n_3}(\bar{z})}{n(z)^{n+1}} z^{-1} \,, \tag{g}$$

$$|p_{n_1 n_2 n_3}(z)| \leqq \frac{1}{n_1!\, n_2!\, n_3!} |x_1 - i_1 x_0|^{n_1} |x_2 - i_2 x_0|^{n_2} |x_3 - i_3 x_0|^{n_3} \leqq \frac{|z|^n}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \tag{h}$$

$$\begin{aligned} |p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1}| &\leqq \frac{1}{n_1!\, n_2!\, n_3!} |x_1 - i_1 x_0|^{n_1} |x_2 - i_2 x_0|^{n_2} |x_3 - i_3 x_0|^{n_3} |z|^{-2n-3} \\ &\leqq \frac{1}{n_1!\, n_2!\, n_3!} |z|^{-n-3} \end{aligned} \tag{i}$$

$$|q_{n_1 n_2 n_3}(z)| \leqq 2(n+2)!\, |z|^{-n-3} \tag{k}$$

$$|z^{-1} n(z)^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})| \leqq 2(n+2)!\, |z|^n \,, \tag{l}$$

wo überall $n = n_1 + n_2 + n_3$ ist.

---

[8]) *Fueter* 3, S. 372 und 373.

Statt die Reihen (a) und (b) im Diagonalverfahren zu summieren, kann man fragen, wann sie bei jeder Summation konvergieren? Nun ist nach (h) und (k):

$$\left| q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, p_{n_1 n_2 n_3}(z) \right| \leqq 2\,(n+2)\,(n+1)\,\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\left|\frac{z}{\zeta}\right|^n |\zeta|^{-3},$$

somit ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} (n+2)\,(n+1)\,\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\left|\frac{z}{\zeta}\right|^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\left|3\frac{z}{\zeta}\right|^n$$

eine Majorante für die Reihe (a). Erstere konvergiert aber für

$$|\zeta| > |3z|. \tag{m}$$

Daher konvergiert:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, p_{n_1 n_2 n_3}(z)$$

absolut und gleichmäßig für alle z, ζ, die der Bedingung (m) entsprechen. Entsprechend wird die Reihe (b) absolut und gleichmäßig konvergieren für alle z, ζ, die der Bedingung genügen:

$$|z| > |3\zeta| \tag{n}$$

Für die Bedingungen (m) *und* (n) *konvergieren daher auch die Reihen* (1) *bei beliebiger Summation, wobei* $|\zeta| = P$ *in* (m), $|\zeta| = \varrho$ *in* (n) *zu setzen ist.*

2. Die isolierte punktförmige Singularität

Ist $z = 0$ ein isolierter singulärer Punkt, so ist $w = f(z)$ in der Umgebung von $z = 0$ eindeutig und kann um $z = 0$ in eine Reihe (1) entwickelt werden, in der ϱ beliebig klein angenommen werden kann. Wir definieren:

Definition: *Ist* $z = 0$ *ein isolierter singulärer Punkt, so heißt derselbe unwesentlich, wenn in der zugehörigen Reihenentwicklung* (1) *um* 0 *alle* $d_{n_1 n_2 n_3}$, für die $n = n_1 + n_2 + n_3 > h \geqq 0$ *ist, null sind. Ist* h *die kleinste Zahl, für die dies eintritt, so heißt* $h+1$ *die Ordnung der unwesentlichen Singularität. Im andern Falle heißt die Singularität wesentlich.*

Über die unwesentliche Singularität besteht das Kriterium:

8. Satz: *Damit* $w = f(z)$ *in* $z = 0$ *eine unwesentliche isolierte Singularität besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine positive Zahl* ν *gibt, für die*

$$|z^\nu f(z)|, \qquad \nu > 0,$$

in der Umgebung von $z = 0$ *beschränkt ist.*

Beweis: Hat $w = f(z)$ in $z = 0$ eine unwesentliche Singularität $h+1$-ter Ordnung, so muß

$$f(z) = \sum_{n=0}^{h} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} d_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1} + \cdots ,$$

sein, wo rechts nur Glieder weggelassen sind, die in $z = 0$ rechtsregulär sind. Wegen (i) ist aber

$$| z^{n+3} p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1} |$$

in der Umgebung von $z = 0$ beschränkt, daher auch $|z^{h+3} f(z)|$. Die Bedingung ist somit notwendig. Um zu zeigen, daß sie hinreichend ist, setzen wir voraus, daß bei genügend kleinem ϱ für alle $|z| \leqq \varrho$:

$$|z^{\nu} f(z)| < M$$

ist. Dann muß aber nach (2) :

$$\left| d_{n_1 n_2 n_3} \right| \leqq \frac{M}{8\pi^2 \varrho^{\nu}} \int_{(K_\varrho)} \left| \zeta^{-1} n(\zeta)^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta^{-1}) \right| dr$$

sein. Nach (k) ist aber:

$$\left| \zeta^{-1} n(\zeta)^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta^{-1}) \right| \leqq 2(n+2)!\, \varrho^{n} ,$$

also wird

$$\left| d_{n_1 n_2 n_3} \right| \leqq (n+2)!\, \varrho^{n-\nu+3} M ,$$

und ist somit $= 0$ für alle $n > \nu - 3$. Die Bedingung ist auch hinreichend.

Es fragt sich jetzt, wie sich $w = f(z)$ in dem unwesentlich singulären Punkt $z = 0$ verhält? Dazu nehmen wir alle *analytischen* Kurven

$$(C) \quad x_k = \gamma_k t^{n_k} + \delta_k t^{n_k+1} + \cdots , \; k = 0, 1, 2, 3 ; \; \gamma_k \neq 0, \; n_k > 0 .$$

t ist eine reelle Variable, die γ_k, δ_k, ... reell. Wir untersuchen, welchen Grenzwert $f(z)$ annimmt, wenn wir auf einer der Kurven (C) gegen 0 gehen, d. h. den limes $t \to 0$ bilden.

Man sieht sofort, daß für *jede* Kurve (C)

$$\lim_{t \to 0} \left| p_{000}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1} \right| = \infty .$$

Man sagt, daß in diesem Falle der Grenzwert existiert und unendlich ist.

Definition: *Besitzt $w = f(z)$ im unwesentlich singulären Punkt 0 bei jeder Kurve (C) den Grenzwert unendlich, so heißt $z = 0$ ein Pol oder ein unwesentlich singulärer Punkt 0-ter Dimension.*

Es fragt sich, ob noch weitere Fälle eintreten können? Für die Kurven

$$x_0 = \gamma_0 t^{2n+3}, \; x_1 = \gamma_1 t^{2n+3}, \; x_2 = \gamma_2 t^n, \; x_3 = \gamma_3 t^n, \quad n > 0,$$

wo die γ_k ganz beliebige reelle Zahlen sind, ist:

$$\lim_{t \to 0} p_{n00}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1} = \frac{1}{n!} \frac{(-\gamma_1 - i_1\gamma_0)^n}{(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{n+1}} (\gamma_2 i_2 + \gamma_3 i_3)^{-1}, \; n > 0,$$

d. h. der Grenzwert nimmt Werte an, die, je nach der Wahl der γ_k eine *zweidimensionale* Mannigfaltigkeit bilden.

Definition: *Besitzt $w = f(z)$ im unwesentlich singulären Punkt $z = 0$ bei jeder Kurve (C) einen Grenzwert, und bilden alle Grenzwerte eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit, so heißt $z = 0$ ein unwesentlich singulärer Punkt k-ter Dimension*[9]).

Daß es dreidimensionale unwesentliche singuläre Punkte gibt, ersieht man sofort aus dem folgenden Beispiel: Es sei $n_1 \geqq n_2 \geqq n_3 \geqq 0$, sicherlich aber $n_2 > 0$. Man nehme bei beliebigen γ_k die Kurven:

$$x_0 = \gamma_0 t^{n+n_1+n_2+3}, \quad x_1 = \gamma_1 t^{n+n_1+n_2+3}, \quad x_2 = \gamma_2 t^{n+n_1+n_2+3}, \quad x_3 = \gamma_3 t^{n_1+n_2};$$

dann wird:

$$\lim_{t \to 0} p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1} = -\frac{1}{n_3!\, \gamma_3^{(n+n_1+n_2+3)}} p_{n_1 n_2 0}(\gamma_0 - \gamma_1 i_1 - \gamma_2 i_2)\, i_3,$$

was dreimdiensional ist, falls man den γ_k alle Werte gibt.

Setzt man allgemein den singulären Teil der Reihe (1) von $f(z)$ um 0 gleich S_-:

$$S_- = \sum_{n=0}^{h} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} d_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z)^{-1} n(z)^{-1} z^{-1},$$

so kommt es nur auf das Verhalten dieses Teiles bei $t \to 0$ an. Nimmt man eine Kurve (C) so wird

$$S_- = \Gamma t^\nu + \Delta t^{\nu+1} + \cdots, \; \Gamma \neq 0.$$

---

[9]) Diese Definition stimmt mit derjenigen für die analytischen Funktionen von zwei Variablen überein, wo nur $k = 0$ und 2 vorkommt und darum *außerwesentliche Stellen erster und zweiter Art* heißen. Siehe *Behnke-Thullen:* Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Berlin, 1934, S. 60/61. Nur sind dort die Punkte *nicht isoliert.* Siehe Abschnitt 6 dieser Arbeit.

Ist $\nu < 0$ für jedes (C), so hat $w = f(z)$ einen Pol. Gibt es jedoch Kurven (C), für die $\nu = 0$ ist, so fragt es sich, welche Dimension alle möglichen Γ annehmen können? Man kann beweisen, daß es keine unwesentlich singuläre Punkte erster Dimension gibt, d. h. alle Grenzwerte nicht auf einer Kurve liegen. Denn gäbe es eine feste Kurve $C: z = z(t)$, für die der Grenzwert existiert und endlich ist, so setze man $z = z(t) + \gamma t^{\mu}$, γ ein beliebiges Quaternion und bestimme μ als kleinste positive Zahl, für die der Grenzwert endlich ist. Dann ist

$$w = f(z(t) + \gamma t^{\mu}) = \delta_0(\gamma) + \delta_1(\gamma)t + \dots$$

Alle Funktionen $\delta_k(\gamma)$ müssen aber rechtsreguläre Funktionen von γ sein. Also ist

$$\lim_{t \to 0} w = \delta_0(\gamma)$$

rechtsregulär in γ. Nun gibt es aber keine rechtsregulären Funktionen vom Range eins. Also ist $\delta_0(c)$ vom Range 0,2 oder 3, d. h. von 0., 2. oder 3. Dimension.

9. Satz: *Eine rechtsreguläre Funktion kann keine isolierten singulären Punkte erster Dimension besitzen.*

Über das Verhalten einer Funktion in der Nachbarschaft eines wesentlich singulären Punktes kann ich noch nichts aussagen. Es ist zu vermuten, daß sie dort jedem Wert in R_4 beliebig nahe kommt.

3. Das Unendliche als Regularitätsstelle

Zunächst stellen wir die Frage, wann eine Funktion $w = f(z)$ im Unendlichen rechtsregulär heißen soll? Dazu muß doch wohl verlangt werden:

a) Es gibt ein $\varrho > 0$, so daß für alle endlichen z, für die $|z| \geqq \varrho$ ist, $w = f(z)$ rechtsregulär ist.

b) Für alle z, für die $|z| \geqq \varrho$ ist, ist $|f(z)|$ beschränkt.

Genügt $w = f(z)$ diesen Bedingungen, so nehmen wir eine Hyperkugel K_P, deren Radius $P > \varrho$ ist. Dann wird für beliebig großes P $f(z)$ nach Satz 4 in die Reihe entwickelbar sein ($\varrho \leqq |z| \leqq P$):

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} (c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z) +$$
$$+ d_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1}) \;,$$

wo c und d die Werte (2) haben. Nach Annahme b) ist für jedes z auf K_P

$$|f(z)| < M,$$

wo M von P unabhängig ist. Somit wird wegen (k)

$$|c_{n_1 n_2 n_3}| < \frac{M(n+2)!}{4\pi^2} \frac{1}{P^{3+n}} \int\limits_{(K_P)} dr, \quad \text{oder:}$$

$$|c_{n_1 n_2 n_3}| < \tfrac{1}{2} M(n+2)!\, P^{-n},\; n = n_1 + n_2 + n_3,$$

somit, da P beliebig groß genommen werden kann,

$$c_{n_1 n_2 n_3} = 0, \; n > 0,$$

und die Reihe lautet:

$$w = f(z) = c_{000} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} d_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1}, \tag{3}$$

wo:

$$c_{000} = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K_\varrho)} f(\zeta)\, dZ q_{000}(\zeta), \; d_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(K_\varrho)} f(\zeta)\, dZ \zeta^{-1} n(\zeta)^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta^{-1}). \tag{4}$$

Umgekehrt sieht man leicht, daß jede Reihe (3), die für alle $|z| \geqq \varrho$ absolut und gleichmäßig konvergiert, die Bedingungen a) und b) erfüllt. Wenn daher w im Unendlichen rechtsregulär ist, muß das Unendliche punktförmig sein und Spiegelbild von z^{-1}, $z \to 0$. (3) heißt die Reihenentwicklung um den Punkt $z = \infty$.

10. Satz: *Ist $w = f(z)$ im Punkte ∞ rechtsregulär, so läßt sie sich um ∞ auf eine und nur eine Weise in die Reihe* (3) *entwickeln, die für alle $|z| \geqq \varrho$ gleichmäßig und absolut konvergiert. Ihre Koeffizienten müssen die Werte* (4) *haben.*

4. Das Unendliche als isolierter singulärer Punkt

In diesem Falle muß w Bedingung b) oben *nicht* erfüllen, dagegen Bedingung a). $w = f(z)$ ist in die Reihe (1) entwickelbar, die für beliebig großes P gilt. Da S_- nach 3. eine in ∞ rechtsreguläre Funktion darstellt, kommt es nur auf S_+ an. Wir definieren:

Definition: *Ist das Unendliche eine isolierte punktförmige Singularität, so heißt es ein unwesentlicher singulärer Punkt, wenn in der Reihe* (1) *alle $c_{n_1 n_2 n_3}$, für die $n_1 + n_2 + n_3 = n > h > 0$ ist, null sind, d. h. S_+ abbricht.*

Ist h die kleinste Zahl, für die dies erfüllt ist, so heißt h die Ordnung der unwesentlich singulären Stelle. Bricht S_+ nicht ab, so heißt das Unendliche ein wesentlich singulärer Punkt und S_+ eine ganze transzendente Funktion.

Die Definition ist so gewählt, daß, wenn $f(z)$ in $z = \infty$ einen unwesentlich singulären Punkt h-ter Ordnung hat, $f(z^{-1})n(z)^{-1}z^{-1}$ in $z = 0$ einen unwesentlich singulären Punkt $h+1$-ter Ordnung besitzt; daß dagegen $f(z^{-1})n(z)^{-1}z^{-1}$ in $z = 0$ wesentlich singulär ist, falls es $f(z)$ in $z = \infty$ ist.

Es gilt das Kriterium:

11. Satz: *Damit $w = f(z)$ im Unendlichen einen isolierten unwesentlichen singulären Punkt besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß $f(z)$ für alle $|z| \geqq \varrho$ rechtsregulär ist, und daß es eine positive Zahl ν gibt, für die*

$$|z^{-\nu}f(z)|, \qquad \nu > 0,$$

für alle $|z| \geqq \varrho$ beschränkt ist.

Beweis: Die Notwendigkeit folgt sofort aus (h). Es muß sicherlich gemäß der Definition von h

$$|z^{-h}f(z)|$$

für alle $|z| \geqq \varrho$ beschränkt bleiben. Ist umgekehrt

$$|z^{-\nu}f(z)| < M,$$

für alle $|z| \geqq \varrho$, so folgt aus (2)

$$|c_{n_1 n_2 n_3}| < \frac{M\varrho^\nu}{8\pi^2}\int\limits_{(K_\varrho)} |q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)|\,dr \;,$$

oder wegen (k):

$$|c_{n_1 n_2 n_3}| < (n+2)!\,M\varrho^{\nu-n} \;;$$

nun kann aber ϱ beliebig groß sein; somit ist $c_{n_1 n_2 n_3}$ null für alle $n > \nu$, und die Annahme ist hinreichend.

Besitzt $w = f(z)$ in ∞ eine unwesentlich singuläre Stelle, so fragt sich, wie sich $f(z)$ in der Nähe von ∞ verhält? Dazu nehmen wir jetzt die analytischen Kurven

$$(C') \quad x_k = \gamma_k t^{\nu_k} + \delta_k t^{\nu_k+1} + \cdots, \; \gamma_k \neq 0, \; \gamma_k, \delta_k \cdots \text{ reell}, \; k = 0, 1, 2, 3,$$

wo wenigstens eine der ganzen Zahlen ν_k *negativ* ist. Wir untersuchen, welchem Werte $f(z)$ zustrebt, wenn wir auf einer solchen Kurve gegen das Unendliche gehen, d. h. $t \to 0$ wandert. Rechnen wir wieder den Wert ∞ als einen Grenzwert, so wird ein solcher in jedem Falle existieren müssen, da wir eine unwesentlich singuläre Stelle haben. Wir definieren:

Definition: *Bilden alle Grenzwerte von $f(z)$, die man erhält, wenn man längs einer Kurve C' gegen unendlich geht, eine Mannigfaltigkeit k-ter Dimension, so heißt der Punkt ∞ ein unwesentlich singulärer Punkt k-Dimension von $f(z)$. Ist $k=0$, so heißt er ein Pol*[10]).

Es kann wieder ∞ kein unwesentlich singulärer Punkt 1. Dimension sein. Dagegen gibt es solche 0., 2. und 3. Dimension, wie die Beispiele zeigen:

2. Dimension; $x_0 = \gamma_0, x_1 = \gamma_1, x_2 = x_3 = \frac{1}{t}$:

$$\lim_{t \to 0} p_{n00}(z) = \frac{1}{n!} (\gamma_1 - i_1 \gamma_0)^n \; ; \; n > 0 \; ;$$

3. Dimension; $x_k = \gamma_k, k = 0, 1, 2, x_3 = \frac{1}{t}$:

$$\lim_{t \to 0} p_{n_1 n_2 0} = p_{n_1 n_2 0}(\gamma_0 + i_1 \gamma_1 + i_2 \gamma_2) \; ; \; n_k > 0, k = 1, 2 \; ;$$

0. Dimension; für jedes C':

$$\lim_{t \to 0} \Delta(z^3) = \lim_{t \to 0} (3x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3) = \infty \, .$$

Wir wollen alle Funktionen:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{h} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z)$$

ganze rationale rechtsreguläre Funktionen nennen. Es gilt der

12. Satz: *Jede rechtsreguläre Funktion, die in R_4 überall rechtsregulär ist und in ∞ eine unwesentliche singuläre Stelle hat, ist ganz und rational; umgekehrt ist $g(z)$ in R_4 rechtsregulär und besitzt in ∞ einen unwesentlichen singulären Punkt.*

Der Beweis folgt sofort aus (1), da alle $d_{n_1 n_2 n_3}$ null sind, und S_+ abbricht.

[10]) Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß hier auch für die *ganzen* analytischen Funktionen zweier Variabler das Unendliche als isolierte unwesentliche oder wesentlich singulärer Punkt aufgefaßt wird, im Gegensatze zur üblichen Auffassung. Siehe *Behnke-Thullen:* Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Berlin, 1934, S. 61. Das Unendliche wird dort anders ins Endliche geholt als in meiner Theorie. Der Unterschied besteht aber nur in der Redensart. Während hier von einem singulären Punkt zweiter Dimension gesprochen wird, wird dort das Unendliche als zweidimensionale Mannigfaltigkeit angesehen.

(Eingegangen den 15. April 1937.)