

# Über eine bemerkenswerte Klasse von Hyperflächen.

Autor(en): **Emch, Arnold**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **9 (1936-1937)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-10168>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über eine bemerkenswerte Klasse von Hyperflächen

Von ARNOLD EMCH, Urbana (Illinois, U. S. A.)

**1. Einleitung.** Die bekannte Römerfläche von Steiner ergibt sich als die dualistische Form der Cayley'schen kubischen Fläche, welche kollinear reduziert als

$$x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 = 0$$

geschrieben werden kann. Daraus kann man dualistisch leicht die Steiner'sche Fläche

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0$$

ableiten. Die interessantesten Eigenschaften dieser beiden Flächen spiegeln sich nun in höhern Räumen wieder, und es ist der Zweck der folgenden Zeilen, dies darzutun. Die beiden Flächen sollen bezüglich mit  $\Gamma$  (Cayley) und  $S$  (Steiner) bezeichnet werden.

**2. Die  $\Gamma$ -Hyperfläche in einem  $S_{2n-1}$ .** In einem Überräume von  $2n-1$  Dimensionen hat die  $\Gamma$ -Hyperfläche die Form

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{x_i} = 0, \quad (1)$$

oder

$$x_2 x_3 x_4 \cdots x_{2n} + x_1 x_3 x_4 \cdots x_{2n} + \cdots + x_1 x_2 x_3 \cdots x_{2n-1} = 0 \quad (2)$$

und kann aus der Hypereinheitsebene

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 0 \quad (3)$$

durch die involutarische Transformation  $\rho x'_i = \frac{1}{x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 2n$ , erhalten werden. Die Eigenschaften von  $\Gamma$  lassen sich durch diese Transformation ableiten, können jedoch direkt aus der Gleichung (2) oder (1) erhalten werden. Aus der Form (2) folgt z. B. sofort, daß die Ecken  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}$  des Koordinaten Hyperpolyeders ( $A$ )  $2(n-1)$ -fache Punkte sind. Ferner sind die Unterüberräume  $S_{2n-3} (x_i = 0, x_k = 0)$  auf der  $\Gamma$ . Diese  $S_{2n-3}$  haben eine besondere Eigenschaft. Man nehme z. B.

den als Schnitt von  $x_1 = 0, x_2 = 0$ . Dann ist  $(a) \equiv (0 \ 0 \ a_3 \ a_4 \ \dots \ a_{2n})$  irgend ein Punkt dieses  $S_{2n-3}$ , der auch auf  $\Gamma$  liegt. Nun kann man  $\Gamma$  oder (2) auch so schreiben

$$\Gamma = (x_1 + x_2) (x_3 x_4 \dots x_{2n-1} \cdot x_{2n}) + x_1 x_2 (\dots).$$

Dann ist für  $(a)$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} = a_3 \cdot a_4 \dots a_{2n-1} \cdot a_{2n}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_2} = a_3 \cdot a_4 \dots a_{2n-1} \cdot a_{2n}$$

.....

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = 0, \quad i \neq 1, 2$$

Daraus folgt, daß  $\Gamma$  in jedem Punkte dieses  $S_{2n-3}$  dieselbe Hypertangentialebene  $x_1 + x_2 = 0$  hat. Ähnliches gilt natürlich für jeden  $S_{2n-3}^{ik} \equiv (x_i = 0, x_k = 0)$ .

Nimmt man für  $ik$  irgend eine Reihe wie 12, 34, 56,  $\dots$ ,  $2n-1, 2n$ , in welcher keine zwei  $(ik)$  eine Ziffer gemein haben, so ist klar, daß die Unterhyperräume

$$S_{2n-3}^{12}, \quad S_{2n-3}^{34}, \quad S_{2n-3}^{56}, \quad \dots, \quad S_{2n-3}^{(2n-1)(2n)},$$

mit den Gleichungen  $x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0, x_5 + x_6 = 0, \dots, x_{2n-1} + x_{2n} = 0$ , sich alle in einem Unterraum  $S_{n-1}$  schneiden, der auf  $\Gamma$  sowohl als auf der Einheitsebene  $\Sigma x_i = 0$  liegt. Zusammenfassend hat man den

**Satz 1.** *In einem Hyperraum  $S_{2n-1}$  hat die Cayley'sche Hyperfläche  $\Sigma 1/x_i = 0$  einen  $(2n-2)$ -fachen Punkt in jeder Koordinatenecke. Alle Unterhyperräume  $S_{2n-3}^{ik} (x_i = 0, x_k = 0)$  haben in allen demselben angehörenden Punkten dieselbe Hypertangentialebene  $x_i + x_k = 0$ .*

Die Tangentialhyperebenen von  $\Gamma$  in den Punkten von  $S_{2n-3}^{12}, S_{2n-3}^{34}, \dots, S_{2n-3}^{2n-1 \cdot 2n}$  sind beziehungsweise  $y_1 + y_2 = 0, y_3 + y_4 = 0, \dots, y_{2n-1} + y_{2n} = 0$ . Sie schneiden sich in einem  $S_{n-1}$ , welcher auf  $\Gamma$  sowohl als auch auf der Einheitshyperebene liegt. Man lege jetzt eine beliebige Hyperebene durch  $S_{n-1}$ :

$$p(\lambda) = \lambda_1 (y_1 + y_2) + \lambda_2 (y_3 + y_4) + \dots + \lambda_n (y_{2n-1} + y_{2n}) = 0. \quad (4)$$



der  $(2n)!$  Permutationen ohne die Gruppe zu beeinträchtigen. Demnach gibt es

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1$$

solche Gruppen oder  $S_{n-1}$  in  $E$ .

Nimmt man irgend eine Kombination der  $2n$  Variablen  $x$  zur  $n$ ten Klasse, so gehen mit ihr  $n!$  Permutationen der  $n$  übrigen Variablen. Gibt man den  $n$  ersten Variablen den Wert  $+1$ , den übrigen den Wert  $-1$ , so sind das die Koordinaten eines Punktes in  $E$ . Solcher Punkte  $P$  gibt es

$$\frac{1}{2} C_n^{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} .$$

Sei

$$(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) (x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \dots x_{2n})$$

eine solche Kombination und  $x_i x_j x \dots x_z$  irgend eine der  $n!$  Permutationen der Reihe  $x_{n+1} \dots x_{2n}$  und  $S_{n-1}$  der durch

$$x_1 + x_i = 0, x_2 + x_j = 0, x_3 + x = 0, \dots, x_n + x_z = 0$$

gebildete Überraum. Dann liegt offenbar der Punkt  $P$  ( $111 \dots 1, -1, -1, -1, \dots -1$ ) auf  $S_{n-1}$  und  $E$ . Somit gibt es  $n!$   $S_{n-1}$ -Überräume, welche je einen Punkt  $P$  gemein haben.

Die Hypertangentialebene in einem Punkte  $(x)$  von  $\Gamma$  hat in laufenden Koordinaten  $y$  die Form

$$\frac{y_1}{x_1^2} + \frac{y_2}{x_2^2} + \frac{y_3}{x_3^2} + \dots + \frac{y_{2n}}{x_{2n}^2} = 0 , \quad (5)$$

so daß sie in jedem Punkte  $P$  mit  $E$  zusammenfällt. Als Resultat hat man

**Satz 3.** Die Hyperfläche  $\Gamma$  hat die Hypereinheitsebene  $E$  als

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{-fache}$$

*Hypertangentialebene.* Die  $(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1$  in  $E$  gelegenen Hyperräume  $S_{n-1}$  haben zu je  $n!$  die Punkte  $P$  gemein.

Um die Klasse von  $\Gamma$  von der Ordnung  $2n-1$  zu bestimmen, kann man in  $S_{2n-1}$   $2n-2$  Punkte  $(y^i)$  in allgemeiner Lage annehmen. Sie be-

stimmen den Axialraum  $S_{2n-3}$  eines Hyperebenenbüschels, unter welchem sich die Tangentialhyperebenen an  $\Gamma$  befinden, deren Anzahl die gesuchte Klasse ist und die gleich ist der Anzahl ihrer Berührungspunkte. Diese erhält man als die Schnittpunkte der  $2n - 3$  ersten Polaren der Punkte  $(y^i)$  mit der  $\Gamma$ . Nun genügen die Punkte dieser Polaren auf  $\Gamma$  den Gleichungen

$$\frac{y_1^i}{x_1^2} + \frac{y_2^i}{x_2^2} + \frac{y_3^i}{x_3^2} + \dots + \frac{y_{2n}^i}{x_{2n}^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2n - 2;$$

sowie auch der Gleichung von  $\Gamma$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_{2n}} = 0.$$

Das sind  $2n - 2$  quadratische und eine lineare Gleichung in den Unbekannten  $\frac{1}{x_i}$ , welche, da die Determinante der Koeffizienten nicht verschwindet,  $2^{2n-2}$  Lösungen haben. Also gibt es so viele Berührungspunkte, oder Tangentialhyperebenen. Daher

**Satz 4.** *Die Cayley'sche  $\Gamma$  von der Ordnung  $2n - 1$  hat die Klasse  $2^{2n-2}$ .*

Für  $n = 2$  hat man die in der Einleitung erwähnte kubische Fläche. Die oben aufgestellten Sätze lauten dann bekannterweise wie folgt: Die Fläche  $\Gamma$  in  $S_3$  hat in jeder Ecke des Koordinatentetraeders einen Doppelpunkt. Sie hat in allen Punkten jeder Kante dieselbe Tangentialebene. Diese sechs Tangentialebenen schneiden sich zu je zweien (durch gegenüberliegende Kanten) in drei in der Einheitsebene gelegenen Geraden ( $S_{n-1} = S_1$ ), die auch auf  $\Gamma$  liegen. Jede Ebene  $p(\lambda)$  durch eine dieser Geraden berührt  $\Gamma$  in zwei Punkten. Die Einheitsebene ist eine Tritangentialebene von  $\Gamma$ . Die drei Geraden schneiden sich zu zweien in den drei Berührungspunkten der Tritangentialebene. Die Cayley'sche Fläche ist von der 4. Klasse.

### 3. Die $S$ -Hyperfläche in einem $S_{2n-1}$ .

Dieselbe ergibt sich sofort durch Dualisierung der  $\Gamma$ -Hyperfläche, indem man Punkten  $(x)$  und Hyperebenen  $(ax)$ , Hyperebenen  $(u)$  und Punkte  $(au)$  entsprechen läßt. Die Klasse von  $S$  ist natürlich gleich der Ordnung von  $\Gamma$ , d. h.  $2n - 1$ . Doch soll die  $S$  als Ordnungsfläche studiert werden. In diesem Sinne entspricht einem  $S_k$  in  $S_{2n-1}$ , der durch  $k + 1$

Punkte bestimmt ist, im dualen Raume  $\Sigma_{2n-1}$  als Punktgebilde ein  $S_{2n-2-k}$ . Zum Beispiel entspricht einer Geraden ein  $S_{2n-3}$ . Die Dimensionen von  $S_k$  und  $S_{2n-2-k}$  werden gleich wenn  $k = n - 1$ . Folglich sind die  $S_{n-1}$  selbst duale Hyperräume. Dem durch  $x_i = 0, x_k = 0$  Hyperraume  $S_{2n-3}$  entspricht also in  $\Sigma_{2n-1}$  die Gerade  $A_i A_k$  und der Hypertangentialebene  $x_i + x_k = 0$  ein Punkt  $P_{ik}$  derselben  $A_i A_k$ . Den Punkten von  $S_{2n-3}$  entsprechen die durch  $A_i A_k$  gehenden Tangentialhyperebenen, die alle denselben Berührungspunkt  $P_{ik}$  haben. Die  $P_{ik}$  sind somit Klemmpunkte (pinch-points) von  $S$ . Fährt man in ähnlicher Weise mit Dualisieren fort, so können die Eigenschaften von  $S$  zusammengefaßt werden in

**Satz 5.** *Die Steiner'sche Hyperfläche  $S$  in  $\Sigma_{2n-1}$  von der Klasse  $2n - 1$  und der Ordnung  $2^{2n-2}$  hat jede Hyperebene  $\alpha_i$  ( $x_i = 0$  und  $A_i$  entsprechend) als doppelt berührende Deckhyperebene (trope).  $S$  hat auf jeder Kante  $A_i A_k$  von  $\Sigma_{2n-1}$  einen Klemmpunkt  $P_{ik}$ . Den  $(2n - 1)(2n - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  in  $E$  gelegenen  $S_{n-1}$  entsprechen auf  $S$  selbst dual eben so viele durch den Einheitspunkt gehende  $\Sigma_{n-1}$  deren Punkte alle  $2^{n-1}$ -fach sind.  $S$  hat den Einheitspunkt  $E$  in  $\Sigma_{2n-1}$  als  $\frac{1}{2} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ -fachen Punkt. Die  $\Sigma_{n-1}$  liegen zu je  $n!$  in den Tangentialhyperebenen in  $E$ .*

Für  $n = 2$  hat man die berühmte Römerfläche von Steiner, welche bekanntlich von der 4. Ordnung ist, einen dreifachen Punkt hat, durch welchen drei Doppellinien gehen. Sie ist einem Tetraeder eingeschrieben, dessen Seitenflächen die Fläche nach Kegelschnitten berühren (Tropes) und dessen Kanten je einen Klemmpunkt der Fläche enthalten.

Die in Satz 5 gegebenen Eigenschaften von  $S$  können aber auch leicht analytisch bewahrheitet werden.

Bezeichnet man die Hyperebenenkoordinaten von  $\Sigma_{2n-1}$  mit  $(u) \equiv (u_1, u_2, \dots, u_{2n-1})$ , so hat  $S$  in diesen die Form ( $\rho x_i = u_i$ ):

$$\Phi = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_{2n-1}} = 0. \quad (6)$$

Um diese in Punktkoordinaten zu erhalten, müssen die  $\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$  gebildet werden. Dann sind die  $x_i$  diesen proportional, so daß man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = -\frac{1}{u_i^2} = -\rho x_i, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{u_i} = \pm \sqrt{\rho} \cdot \sqrt{x_i} \quad (7)$$

zu setzen hat. (7) in (6) gibt so ohne weiteres für die Steiner'sche Hyperfläche die Gleichung:

$$\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2} \pm \sqrt{x_3} \pm \cdots \pm \sqrt{x_{2n}}. \quad (8)$$

Eine auf diese Gleichung basierte synthetische Untersuchung für den allgemeinen Fall findet man im American Journal of Mathematics, Band 54 (1932), pp. 293—298, von *B. C. Wong*.

Mit Ausnahme des ersten Gliedes kann in (8) jede mögliche Anordnung der Vorzeichen genommen werden. Jeder entspricht so eine Reihe von  $2n$  Quadratwurzeln, also  $2^{2n-1}$  solcher verschiedener Reihen gibt es, deren Produkt sich bei den  $n!$  der  $2n$  Variabeln nicht ändert. Die Rationalisierung von (8) gibt auf diese Weise eine symmetrische Funktion der Ordnung  $2^{2n-2}$  und damit diejenige der Hyperfläche  $S$ , wie oben auf geometrischem Wege gefunden wurde. Der Punkt  $E(11 \cdots 1)$  befriedigt (8) jedesmal bei einer Anordnung von Vorzeichen mit  $n$  positiven und  $n$  negativen. Wird beachtet, daß die Anordnungen

$$\begin{aligned} & (+ 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 - 1 \cdots - 1) \\ & (- 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 \cdots + 1) \end{aligned}$$

equivalent sind, so gibt es so viele solche Anordnungen, als Kombinationen von  $2n$  Elementen zur  $n$ ten Klasse geteilt durch zwei, also

$$\frac{1(2n)!}{2(n!)^2}.$$

Der Einheitspunkt ist somit Vielfach von dieser Ordnung (siehe Satz 5).

In ähnlicher Weise können die übrigen Eigenschaften der Hyperfläche  $S$  direkt aus ihrer irrationalen Gleichung abgeleitet werden.

Da die  $\Gamma$ -Hyperfläche rational ist, so ergibt sich auch  $S$  als rational; d. h., ihre Koordinaten müssen sich durch  $2n - 1$  homogene Parameter als rationale homogene Funktionen darstellen lassen. Man erhält für dieselben

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \cdots - \lambda_n + \lambda_{n+1} + \cdots + \lambda_{2n-1})^2, \\ \rho x_2 &= (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \cdots - \lambda_n - \lambda_{n+1} + \cdots + \lambda_{2n-1})^2, \\ \rho x_3 &= (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \cdots - \lambda_n - \lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} + \cdots + \lambda_{2n-1})^2, \\ &\dots\dots\dots \\ \rho x_n &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots - \lambda_n - \lambda_{n+1} - \cdots - \lambda_{2n-1})^2, \\ \rho x_{n+1} &= (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n - \lambda_{n+1} - \cdots - \lambda_{2n-1})^2, \\ \rho x_{n+2} &= (-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} - \cdots - \lambda_{2n-1})^2, \\ &\dots\dots\dots \\ \rho x_{2n-1} &= (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \cdots - \lambda_{n-1} + \lambda_n + \cdots + \lambda_{2n-2} - \lambda_{2n-1})^2, \\ \rho x_{2n} &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots \dots\dots + \lambda_{2n-1})^2; \end{aligned} \tag{9}$$





Daraus geht hervor, daß

$$V_r = (V_{r-1})^2 - F_{2^{r-2}-r} \cdot \Phi_r = 0 \quad (11)$$

die rationale Form von  $\sum_{i=1}^r \sqrt{x_i} = 0$  ist, welche für  $r = 2n$  eine Steiner'sche Hyperfläche darstellt. Man hat demnach für irgend eine Dimension  $r$  den

**Satz 7.** *Setzt man in einer Hyperfläche  $V_r$   $x_i = 0$ , so reduziert sich  $V_r$  auf  $(V_{r-1})^2$ , das Quadrat der  $V_{r-1}$  des vorhergehenden Raumes. Wird in (11)  $x_i = 0$  gesetzt, so bleibt  $(V_{r-1})^2 = 0$ , so daß  $V_{r-1} = 0$ ,  $x_1 = 0$  in einer Varietät schneidet, in deren Punkten  $V_r = 0$ ,  $x_1 = 0$  berührt.  $x_1 = 0$  ist somit für jede  $V_r$  eine Deckhyperfläche.*

Während dieser Satz für alle Dimensionen gilt,  $r \geq 4$ , bestehen die übrigen in Satz 5 aufgestellten Eigenschaften nur für die Steiner'schen Hyperflächen, einschließlich die Römerfläche ( $r = 2n \geq 4$ ).

(Eingegangen den 26. Oktober 1935.)