Über das Wachstum der Näherungsnenner halbregelmäßiger Kettenbrüche.

Über das Wachstum der Näherungsnenner halbregelmäßiger Kettenbrüche

(Untersuchungen zur Theorie der halbregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen III)

Von Fritz Blumer, Basel

Einleitung

Diese Arbeit ist der dritte und letzte Teil einer Untersuchung über halbregelmäßige Kettenbrüche[1]). Solche halbregelmäßige Kettenbrüche haben die Gestalt

$$a_0 \pm \cfrac{1}{a_1 \pm \cfrac{1}{a_2 \pm \cfrac{1}{a_3 \pm \cdots\cdots}}} \, .$$

Den Kettenbruch, den wir erhalten, wenn wir einen Kettenbruch mit a_n abbrechen, bezeichnet man als seinen n-ten Näherungsbruch $\frac{P_n}{Q_n}$.

Im ersten Kapitel leiten wir das schon von Tietze und später von Perron auf anderem Wege bewiesene Resultat her, daß in einem unendlichen Kettenbruch die Näherungsnenner Q_n ins Unendliche wachsen. Unser Beweis bezieht sich ebenso wie die Beweise von Tietze und von Perron auf den allgemeinen Fall der sog. T-Kettenbrüche, in denen die a_n beliebige Zahlen $\geqq 1$ sind.

Im zweiten Kapitel beschränken wir uns wieder auf halbregelmäßige Kettenbrüche und untersuchen die Art des Wachstums der Q_n. Die Ergebnisse hängen von der Einteilung der Indizes in zwei Klassen ab, nämlich in die Klasse der regulären und in die der singulären. Wir nennen solche Indizes $n > 1$ *singulär*, für die gleichzeitig $a_n < 2$ und das Vor-

---

[1]) Der erste Teil dieser Untersuchungen wurde unter dem Titel „Über die verschiedenen Kettenbruchentwicklungen beliebiger reeller Zahlen und die periodischen Kettenbruchentwicklungen quadratischer Irrationalitäten" in den Acta Arithmetica, der zweite Teil unter dem Titel „Über die Güte der Approximation einer reellen Zahl durch die Näherungsbrüche ihrer halbregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen" in einem frühern Heft der Commentarii veröffentlicht. Doch kann die vorliegende Arbeit ohne Kenntnis der beiden andern gelesen werden.

zeichen vor dem Teilbruch — 1 ist, alle andern *regulär* ($n = 1$ gilt immer als regulär). Wir bezeichnen die regulären, resp. singulären Indizes der Größe nach geordnet mit r_k, resp. mit s_k. Pipping hat dann bewiesen, daß die Folge der Q_{s_k}, sofern $s_k \to \infty$ gilt, monoton ins Unendliche wächst. Dieser Satz ergibt sich auch aus unsern Untersuchungen, und zwar sogar, was bisher nicht bekannt war, für den allgemeinen Fall der T-Kettenbrüche. Ferner zeigen wir, daß in einem unendlichen halbregelmäßigen Kettenbruch $\frac{Q_{r_k}}{r_k} \to \infty$ gilt. Vor allem aber gelingt es uns, die Frage nach dem genauesten allgemein gültigen Wachstumgesetz für die Q_{r_k} und die Q_{s_k} zu entscheiden. Wir beweisen, daß die beiden Relationen

$$\frac{Q_{r_k}}{r_k} \to \infty \quad \text{und} \quad Q_{s_k} \to \infty$$

gelten und zeigen, daß sie sich nicht mehr verschärfen lassen, d. h. wenn φ (x) eine beliebig schwach monoton ins Unendliche wachsende Funktion ist, so kann man solche Kettenbrüche angeben, für die $\frac{Q_{r_k}}{r_k \varphi(r_k)}$, resp. $\frac{Q_{s_k}}{\varphi(s_k)}$ nicht ins Unendliche wächst.

Ich möchte auch an dieser Stelle Herrn Ostrowski bestens danken, der mich auf dieses Problem hingewiesen und mir auch bei der Durchführung dieser Untersuchung hilfreich zur Seite gestanden hat.

LITERATUR

Cahen, E.: Théorie des nombres, 2. Bd., 1924.

Lagrange, J. L.: Additions aux éléments d'algèbre d'Euler, 1798, Oeuvres VII, auch deutsch in Leonhardi Euleri opera omnia I, sowie in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 103.

Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2. Auflage 1929.

Pipping, Nils: Die Konvergenz der halbregelmäßigen Kettenbrüche. Acta academiae Aboensis, Mathematica et Physica, 1922.

Tietze, H.: Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche. Mathematische Annalen 70, 1911.

Die angeführten Bücher und Arbeiten zitieren wir einfach mit der Angabe des Namens des Verfassers.

I. Allgemeines über das Wachstum der Näherungsnenner der T-Kettenbrüche

§ 1. Definitionen

Unter einem *T-Kettenbruch*[2]) versteht man einen Ausdruck von der Form

$$a_1 - \cfrac{\varepsilon_1}{a_1 - \cfrac{\varepsilon_2}{a_2 - \cfrac{\varepsilon_3}{a_3 - \cdots\cdots\cdots}}}\,, \tag{1,1}$$

der den folgenden Bedingungen genügt:

A. a_n ist eine *reelle* Zahl, $\varepsilon_n = \pm 1$;

B. für $n \geqq 1$ ist $a_n \geqq 1$ und $a_n - \varepsilon_{n+1} \geqq 1$;

C. falls der Kettenbruch endlich ist und außer a_0 noch mindestens einen Teilnenner a_n hat, so ist der letzte Teilnenner größer als 1; falls der Kettenbruch unendlich ist, ist unendlich oft $a_n - \varepsilon_{n+1} \geqq 2$[3]).

Sind in einem solchen T-Kettenbruch die a_n sogar *ganze* Zahlen, so bezeichnen wir ihn als einen *halbregelmäßigen Kettenbruch.*

Einen solchen Kettenbruch werden wir etwas bequemer schreiben, nämlich

$$a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \frac{\varepsilon_2 |}{| a_2} - \frac{\varepsilon_3 |}{| a_3} - \cdots.$$

Bricht man den Kettenbruch mit dem Teilnenner a_n ab, so erhält man den Ausdruck

$$a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \frac{\varepsilon_2 |}{| a_2} - \cdots - \frac{\varepsilon_n |}{| a_n}.$$

Wir bezeichnen den Wert dieses Ausdruckes mit N_n und nennen diesen Wert den *n-ten Näherungsbruch.* Diese Werte N_n lassen sich bekanntlich[4]) aus

---

[2]) Tietze hat als erster die Konvergenz solcher unendlicher „T-Kettenbrüche" bewiesen und hat dazu nachweisen müssen, daß unser Satz IV, das Hauptresultat dieses Kapitels, gilt. Da er aber seinen Beweis geometrisch führt, so fehlen in seiner Arbeit die andern Resultate dieses Kapitels, die wir z. T. in Kapitel II benötigen.

[3]) Die Forderung C benötigen weder Tietze zu seinem Konvergenzbeweis noch wir zu unsern allgemeinen Resultaten über T-Kettenbrüche.

[4]) Siehe z. B. Perron oder den ersten Teil unserer Untersuchungen.

$$P_{-1} = 1,\ P_0 = a_0,\ Q_{-1} = 0,\ Q_0 = 1 \tag{1,2}$$

nach den Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} P_n &= a_n P_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-2} \\ Q_n &= a_n Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2} \end{aligned} \tag{1,3}$$

berechnen, indem man $N_n = \frac{P_n}{Q_n}$ setzt. P_n nennt man den *n-ten Näherungszähler* und Q_n den *n-ten Näherungsnenner.* Für diese P_n und Q_n gilt bekanntlich[4])

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = \delta_n, \tag{1,4}$$

wo $\delta_n = \varepsilon_1\,\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n = \pm 1$ ist.

Über die Q_n haben wir in § 2 des ersten Teiles folgende einfache Aussage bewiesen, die wir auch in diesem Teil bald gebrauchen werden:

a) In einem T-Kettenbruch gilt für $n \geqq 0$ $Q_n \geqq 1$[5]).

Weiter wollen wir folgende Begriffe definieren: $n \geqq 2$ heiße *regulär*[6]), wenn $a_n - \varepsilon_n \geqq 1$ ist; $n = 1$ sei immer regulär. $n \geqq 2$ heiße *singulär*[6]), wenn $a_n - \varepsilon_n < 1$ ist, und zwar *eigentlich singulär*, wenn dazu noch $Q_n \leqq Q_{n-1}$ gilt, und *uneigentlich singulär,* wenn dazu noch $Q_n > Q_{n-1}$ gilt. Ordnet man die regulären, resp. die singulären Indizes n der Größe nach, so werde der k-te reguläre Index mit r_k, resp. der k-te singuläre Index mit s_k bezeichnet. Ferner bilden wir die Folge der regulären und der uneigentlich singulären Indizes, wiederum der Größe nach geordnet, und bezeichnen den k-ten Index dieser gemischten Folge mit u_k. Wenn alle Indizes ν von $n_0 \geqq 1$ bis n_1 (n_0 und n_1 *eingeschlossen*) regulär sind, so sprechen wir von einer *regulären Sequenz* $RS(n_0, n_1)$. Die Differenz $Q_n - Q_{n-1}$ werde mit Δ_n ($n \geqq 0$) bezeichnet.

§ 2. Die Größe der Δ_n

Aus den Relationen $a_n - \varepsilon_{n+1} \geqq 1$ und $a_{n-1} - \varepsilon_n \geqq 1$, die nach der Definition der T-Kettenbrüche für alle $n \geqq 1$ gelten müssen, ergeben sich sofort die folgenden beiden Tatsachen:

---

[5]) Wir haben zwar in § 2 des ersten Teiles diesen Satz nur für halbregelmäßige Kettenbrüche formuliert, aber wir haben in einer Fußnote darauf hingewiesen, daß wir beim Beweis des Satzes von der Ganzzahligkeit der a_n keinen Gebrauch gemacht haben, so daß der Satz auch für T-Kettenbrüche gilt.

[6]) Die beiden Bezeichnungen reguläre und singuläre Indizes stammen von *Tietze.*

a) Ist für $n \geqq 1$ $a_n < 2$, so ist $\varepsilon_{n+1} = -1$, also ist $n+1$ regulär.

b) Ist für $n \geqq 2$ $\varepsilon_n = +1$, so ist $a_{n-1} \geqq 2$, also ist $n-1$ regulär.

Aus a) und b) folgt:

c) $s_k \pm 1$ sind regulär und daher $r_{k+1} - r_k \leqq 2$.

Nun wollen wir folgenden Satz über die Größe der Δ_n beweisen:

Satz I: Für die T-Kettenbrüche gilt:

α) für alle regulären $n \geqq 2$ ist $\Delta_n \geqq 1$ und für $n = 1$ $\Delta_1 = a_1 - 1$;

β) wenn für $n \geqq 2$ $a_n - \varepsilon_n = 0$, d. h. $a_n = 1$ und $\varepsilon_n = +1$ ist, so ist dieses n immer eigentlich singulär und es gilt $Q_n = \Delta_{n-1}$ und $\Delta_n \leqq -1$.

Beweis: Wir weisen zunächst die Richtigkeit der folgenden Tatsache nach:

d) Wenn $n \geqq 2$ regulär ist, so gilt für $\varepsilon_n = -1$ $\Delta_n \geqq Q_{n-2}$ und für $\varepsilon_n = +1$ $\Delta_n \geqq \Delta_{n-1}$.

Denn es ist nach (1,3)

$$\Delta_n = (a_n - 1)Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2} (n \geqq 1). \tag{2,1}$$

Ist nun $\varepsilon_n = -1$, so ist $\Delta_n \geqq Q_{n-2}$; ist aber $\varepsilon_n = +1$, so ist, weil n nach Annahme regulär ist, $a_n \geqq 2$ und damit $\Delta_n \geqq Q_{n-1} - Q_{n-2} = \Delta_{n-1}$.

Nunmehr können wir mit dem eigentlichen Beweis des Satzes I beginnen. Nach (1,2) und (1,3) gilt für $n = 0$ und $n = 1$ $Q_{-1} = 0, Q_0 = 1$ und

$$Q_1 = a_1 Q_0 - \varepsilon_1 Q_{-1} = a_1 \geqq 1. \tag{2,2}$$

Daraus folgt sofort $\Delta_1 = a_1 - 1$, womit α) für $n = 1$ bewiesen ist.

Nun zeigen wir die Richtigkeit von α) und β) für $n = 2$. Nach d) ist für reguläres $n = 2$ und $\varepsilon_2 = -1$ $\Delta_2 \geqq Q_0 = 1$ und für reguläres $n = 2$ und $\varepsilon_2 = +1$ $\Delta_2 \geqq \Delta_1 = a_1 - 1$. Ist aber $\varepsilon_2 = +1$, so ist nach b) $a_1 \geqq 2$, also ist auch in diesem Fall $\Delta_2 \geqq 1$. Damit ist α) für $n = 2$ bewiesen. Im Fall $a_2 = 1$, $\varepsilon_2 = +1$ ist nach (2,1) $\Delta_2 = (a_2 - 1) Q_1 - \varepsilon_2 Q_0 = -Q_0 = -1$, also ist auch β) für $n = 2$ richtig.

Wir nehmen nun an, der Satz sei für alle $\nu \leqq n-1$ richtig, wo $n \geqq 3$ ist, und zeigen, daß dann der Satz auch für n gilt. Für reguläres n und $\varepsilon_n = -1$ folgt aus d) sofort $\Delta_n \geqq Q_{n-2} \geqq 1$ und für reguläres n und $\varepsilon_n = +1$ folgt $\Delta_n \geqq \Delta_{n-1}$. Da aber im letztern Fall $\varepsilon_n = +1$ ist, so gilt nach b), daß $n-1$ regulär ist. Da wir angenommen haben, daß der Satz für $n-1$ richtig sei, so ist $\Delta_{n-1} \geqq 1$. Also gilt in diesem Fall $\Delta_n \geqq 1$. Damit ist α) bewiesen. Um β) zu beweisen, müssen wir den Fall $a_n = 1$, $\varepsilon_n = +1$ untersuchen. Es ist nach (2,1) $\Delta_n = -Q_{n-2} \leqq -1$, weil nach § 1a) $Q_\nu \geqq 1$ ist für $\nu \geqq 0$. Damit ist also der Satz bewiesen.

Wir wollen den Satz I noch speziell für halbregelmäßige Kettenbrüche formulieren. Wir müssen dabei berücksichtigen, daß in einem halbregelmäßigen Kettenbruch n in einem einzigen Fall singulär ist, nämlich wenn $a_n - \varepsilon_n = 0$, d. h. wenn $a_n = 1$ und $\varepsilon_n = +1$ ist.

Satz Ia: In einem halbregelmäßigen Kettenbruch gilt

α) *für alle regulären* $n \geqq 2$ $\quad \Delta_n \geqq 1$, *für* $n = 1$ $\quad \Delta_1 = a_2 - 1$;

β) *für alle singulären* n $\quad \Delta_n \leqq -1$.

Bei den halbregelmäßigen Kettenbrüchen gibt es also keine uneigentlich singulären Indizes.

§ 3. Allgemeines über das Wachstum der Q_{r_k}

Zunächst zeigen wir, daß

a) $Q_{s_k+1} - Q_{s_k-1} \geqq 1$ für $k = 1, 2, \ldots$ gilt.

Denn nach § 2a) ist $\varepsilon_{s_k+1} = -1$, also

$$Q_{s_k+1} = a_{s_k+1} Q_{s_k} + Q_{s_k-1} \geqq Q_{s_k} + Q_{s_k-1} \geqq Q_{s_k-1} + 1. \tag{3,1}$$

Damit können wir nun die Monotonie der Q_{u_k} beweisen.

Satz II: In einem T-Kettenbruch gilt

$$Q_{u_{k+1}} > Q_{u_k},\ Q_{r_{k+1}} \geqq Q_{r_k} + 1 \ \textit{und}\ Q_{u_k} \uparrow \infty \ \textit{mit}\ k \to \infty^{7)}.$$

Beweis: Die Folge der Indizes u_k enthält nach Definition die regulären Indizes r_k und die uneigentlich singulären Indizes. Da nach § 2c) $r_{k+1} - r_k \leqq 2$ ist, so ist erst recht $u_{k+1} - u_k \leqq 2$. Ist nun $u_{k+1} - u_k = 1$, so folgt $Q_{u_{k+1}} > Q_{u_k}$ für den Fall, daß u_{k+1} regulär ist, aus Satz I und für den Fall, daß u_{k+1} uneigentlich singulär ist, aus der Definition der uneigentlich singulären Indizes. Ist dagegen $u_{k+1} - u_k = 2$, so ergibt sich $Q_{u_{k+1}} > Q_{u_k}$ aus a). Da nun in einem unendlichen T-Kettenbruch unend-

[7]) Diesen Satz für halbregelmäßige Kettenbrüche ausgesprochen findet man schon bei *Lagrange*. Die Zeichen $\uparrow$, bezw. $\downarrow$ bedeuten die mit monotonem Wachsen, bezw. monotonem Fallen verbundene Konvergenz.

lich viele reguläre Indizes vorkommen — sind doch nach § 2c) $s_k \pm 1$ regulär — und da nach Satz I und nach a) $Q_{r_{k+1}} - Q_{r_k} \geqq 1$ ist, so gilt wirklich $Q_{u_k} \uparrow \infty$ mit $k \to \infty$.

Auf Grund des monotonen Wachstums der Q_{r_k} läßt sich eine untere Schranke der Q_{r_k} angeben, und zwar sowohl in Abhängigkeit von dem „relativen Index" k wie auch in Abhängigkeit von dem „absoluten Index" r_k. Es gilt

$$\text{b)} \qquad Q_{r_k} \geqq k$$

$$\text{c)} \qquad Q_{r_k} \geqq \left[\frac{r_k}{2} + 1\right].$$ [8]

Beweis: Die Behauptung b) folgt sofort aus Satz II. Um c) zu beweisen, müssen wir überlegen, welches der kleinste relative Index k ist, der einem bestimmten regulären n entspricht. Wenn $n = 2\nu + 1$ ist, dann können maximal ν singuläre Indizes eingeschoben werden, so daß $k \geqq \nu + 1$ gilt; wenn $n = 2\nu$ ist, so sind höchstens $\nu - 1$ singuläre Indizes vor n möglich, d. h. in diesem Fall gilt $k \geqq \nu + 1$. Also gilt $Q_{2\nu+1} \geqq \nu + 1$ oder $Q_{r_k} \geqq \frac{r_k + 1}{2}$, wenn r_k ungerade ist, und $Q_{2\nu} \geqq \nu + 1$ oder $Q_{r_k} \geqq \frac{r_k}{2} + 1$, wenn r_k gerade ist. Diese beiden Fälle können wir nun mit der Formel $Q_{r_k} \geqq \left[\frac{r_k}{2} + 1\right]$ zusammenfassen, w. z. b. w.

§ 4. Weitere Bemerkungen über die Variation der Δ_{r_k}

Wir müssen zunächst noch einige speziellere Angaben über die Variation der Δ_{r_k} machen.

a) Es sei $n \geqq 2$ regulär.

α) Für $a_n \geqq 2$ gilt dann $\Delta_n \geqq \Delta_{n-1}$, und zwar gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $a_n = 2$ und $\varepsilon_n = +1$ ist;

β) für $1 \leqq a_n < 2$ gilt $\Delta_n \geqq Q_{n-2}$ und $\Delta_{n+1} \geqq \Delta_{n-1} + 1$, wobei $\Delta_n = Q_{n-2}$ nur für $a_n = 1$ und dann immer gilt.

α) und die erste Behauptung von β) folgen sofort aus der Formel (2,1). Die zweite Behauptung von β) erhält man aus der (2,1) entsprechenden

[8]) Diese Ungleichung, für halbregelmäßige Kettenbrüche ausgesprochen, findet man bei *Cahen* (S. 418), der sie allerdings irrtümlicherweise als für alle Indizes gültig hinstellt. Wir werden später sehen, daß sie für singuläre Indizes nicht zu gelten braucht.

Formel für Δ_{n+1} unter Berücksichtigung von § 1a), denn darnach ist $\Delta_{n+1} = (a_{n+1} - 1)Q_n + Q_{n-1} \geqq Q_{n-1} - Q_{n-2} + Q_{n-2} \geqq \Delta_{n-1} + 1$.

Weiter gilt:

b) Sind $n \geqq 2$ und $n+1$ regulär, so gilt immer $\Delta_{n+1} \geqq \Delta_{n-1}$, und zwar gilt $\Delta_{n+1} = \Delta_{n-1}$ nur für $a_n = a_{n+1} = 2$ und $\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = +1$ und es ist dann $\Delta_{n+1} = \Delta_n = \Delta_{n-1}$.

Beweis: Für $1 \leqq a_n < 2$, $\varepsilon_n = -1$ ist b) in a) enthalten. Wir dürfen also $a_n \geqq 2$ annehmen. Wenn nun auch noch $a_{n+1} \geqq 2$ ist, so folgt aus a) sofort $\Delta_{n+1} \geqq \Delta_n \geqq \Delta_{n-1}$, wo beide Gleichheitszeichen zugleich nur in dem Fall $a_n = a_{n+1} = 2$ und $\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = +1$ gelten. Wir müssen also b) nur noch für den Fall $a_n \geqq 2$, $a_{n+1} < 2$, $\varepsilon_{n+1} = -1$ beweisen. Dann gilt aber $\Delta_{n+1} = (a_{n+1} - 1)Q_n - \varepsilon_{n+1}Q_{n-1} \geqq Q_{n-1} > \Delta_{n-1}$.

Ferner gilt:

c) $\Delta_{s_k+1} \geqq \Delta_{s_k-1} + 1$.

Denn aus § 1a) folgt $\Delta_{s_k+1} = (a_{s_k+1} - 1)Q_{s_k} + Q_{s_k-1} \geqq Q_{s_k-1} = Q_{s_k-1} - Q_{s_k-2} + Q_{s_k-2} \geqq \Delta_{s_k-1} + 1$.

Aus b) und c) folgt nunmehr:

d) Wenn $n+1$ $(n \geqq 2)$ regulär ist, dann gilt entweder $\Delta_{n+1} > \Delta_{n-1}$ oder $\Delta_{n+1} = \Delta_n = \Delta_{n-1}$.

§ 5. Allgemeines über das Wachstum der Q_{s_k} und der Q_n

Wir zeigen zunächst:

a) Es gilt für alle ν aus $RS(s_{k-1}+1, s_k - 1)$ $\quad \Delta_\nu \leqq Q_{s_k}$.

Beweis: Es ist nach § 4b) für alle ν mit $s_{k-1}+1 \leqq \nu \leqq s_k - 3$ entweder $\Delta_\nu \leqq \Delta_{s_k-2}$, wenn nämlich $\nu \equiv s_k \pmod{2}$ ist, oder $\Delta_\nu \leqq \Delta_{s_k-1}$, wenn $\nu \equiv s_k + 1 \pmod{2}$ ist. Wir brauchen also bloß zu zeigen, daß unsere Ungleichung für $\nu = s_k - 2$ und $\nu = s_k - 1$ erfüllt ist. Nun ist

$$Q_{s_k} = a_{s_k}Q_{s_k-1} - Q_{s_k-2} \geqq Q_{s_k-1} - Q_{s_k-2} = \Delta_{s_k-1} \tag{5,1}$$

und nach 4a) $\Delta_{s_k-1} \geqq \Delta_{s_k-2}$, ausgenommen wenn $a_{s_k-1} < 2$ ist; in diesem letztern Fall könnte aber nach 2a) s_k nicht singulär sein. Also gilt immer $Q_{s_k} \geqq \Delta_{s_k-1} \geqq \Delta_{s_k-2}$. Dies ist aber gerade unsere Ungleichung für $\nu = s_k - 1$ und für $\nu = s_k - 2$.

Mit Hilfe dieser Tatsache ergibt sich nun sofort

Satz III: In einem T-Kettenbruch gilt

$$Q_{s_{k+1}} \geqq Q_{s_k} + 1, \text{ also } Q_{s_k} \uparrow \infty, \text{ wenn } k \to \infty \text{ [9]}.$$

Beweis: Nach a) ist $Q_{s_{k+1}} \geqq \Delta_\nu$ für alle ν aus $RS(s_k + 1, s_{k+1} - 1)$. Wir müssen also bloß zeigen, daß mindestens für eines der angegebenen ν $\Delta_\nu \geqq Q_{s_k} + 1$ gilt. Es ist nach § 2a) $\varepsilon_{s_k+1} = -1$ und daher $\Delta_{s_k+1} = (a_{s_k+1} - 1) Q_{s_k} + Q_{s_k-1}$. Ist $a_{s_k+1} \geqq 2$, so gilt nach § 1a) $\Delta_{s_k+1} \geqq Q_{s_k} + 1$; ist aber $a_{s_k+1} < 2$, dann braucht die angegebene Ungleichung nicht zu gelten. Da in diesem letztern Fall nach § 2a) $\varepsilon_{s_k+2} = -1$, so ist $s_k + 2$ nicht singulär und es gilt $\Delta_{s_k+2} = (a_{s_k+2} - 1) Q_{s_k+1} + Q_{s_k}$. Für $a_{s_k+2} \geqq 2$ ist $\Delta_{s_k+2} \geqq Q_{s_k+1} + Q_{s_k} > Q_{s_k} + 1$; ist $a_{s_k+2} < 2$, dann ist nach § 2a) $\varepsilon_{s_k+3} = -1$, $s_k + 3$ also nicht singulär, und wir finden nach Satz Iα) $\Delta_{s_k+3} = (a_{s_k+3} - 1) Q_{s_k+2} + Q_{s_k+1} \geqq Q_{s_k+1} \geqq Q_{s_k} + 1$, womit wir den Beweis unserer Behauptung erbracht haben.

Aus den Sätzen II und III folgt unmittelbar

Satz IV: In einem T-Kettenbruch gilt

$$Q_n \to \infty \text{ mit } n \to \infty \text{ [10]}.$$

II. Allgemeines über das Wachstum der Näherungsnenner der halbregelmäßigen Kettenbrüche

§ 6. Allgemeines über das Wachstum der Δ_{r_k}

Über das Wachstum der Δ_{r_k}, läßt sich die folgende Aussage einfach beweisen:

Satz V: In einem unendlichen halbregelmäßigen Kettenbruch gilt

$$\Delta_{r_k} \to \infty \text{ mit } k \to \infty$$

und

$$\Delta_{s_k} \to -\infty, \text{ sofern } k \to \infty \text{ gilt.}$$

Beweis: Es sei uns ein unendlicher halbregelmäßiger Kettenbruch vorgegeben. Wir greifen aus der Folge der Indizes n diejenige Teilfolge

---

[9]) Diesen Satz, für halbregelmäßige Kettenbrüche formuliert und bewiesen, findet man bei *Pipping*.

[10]) Dieser Satz wurde zuerst von *Tietze* bewiesen; einen weitern Beweis hat später *Perron* (S. 149) erbracht.

n_k heraus, für die $\Delta_{n_k} \geqq \Delta_{n_k-1}$ gilt. Daß solche n_k, und zwar sogar unendlich viele, existieren, ergibt sich aus Satz Ia und der Tatsache, daß in halbregelmäßigen Kettenbrüchen die Δ_n ganzzahlig sind. Aus Satz Ia) folgt, daß alle n_k regulär sind. Nun zeigen wir, daß $n_{k+1} - n_k \leqq 2$ gilt. Ist $n_k + 1 \neq n_{k+1}$, d. h. ist $\Delta_{n_k+1} < \Delta_{n_k}$, dann ist nach § 4a) und nach Satz Ia) $a_{n_k+1} = 1$, und zwar kann dabei $n_k + 1$ regulär ($\varepsilon_{n_k+1} = -1$) oder singulär ($\varepsilon_{n_k+1} = +1$) sein. In den beiden Fällen ist nach § 4aβ) und nach § 4c) $\Delta_{n_k+2} \geqq \Delta_{n_k} + 1$, also erst recht $\Delta_{n_k+2} > \Delta_{n_k+1}$, so daß also in diesen beiden Fällen $n_k + 2 = n_{k+1}$ ist. Weiter ergibt sich daraus, daß für unsere Teilfolge n_k auch $\Delta_{n_{k+1}} \geqq \Delta_{n_k}$ ist. Dabei gilt das Gleichheitszeichen für $k \geqq 3$ nach § 4a) nur für $a_{n_{k+1}} = 2$ und $\varepsilon_{n_{k+1}} = +1$, denn für $a_{n_{k+1}} = 1$ ist $\Delta_{n_{k+1}} = Q_{n_k-1}$ und $Q_{n_k-1} \neq Q_{n_k} - Q_{n_k-1}$, weil ja sonst wegen § 3b) $Q_{n_k} = 2\,Q_{n_k-1} \geqq 3$ wäre, was im Widerspruch steht zu (1,4). Nach der Eigenschaft C der halbregelmäßigen Kettenbrüche in § 1 ist aber in jedem unendlichen Kettenbruch unendlich oft $a_n - \varepsilon_{n+1} \geqq 2$, so daß also unendlich oft $\Delta_{n_{k+1}} \geqq \Delta_{n_k} + 1$ gilt, womit gezeigt ist, daß $\Delta_{n_k} \to \infty$ mit $k \to \infty$ gilt. Für die übersprungenen regulären Indizes, für die also $a_n = 1$ und $\varepsilon_n = -1$ ist, gilt nach § 4aβ) $\Delta_n = Q_{n-2}$, so daß auch diese Δ_n, sofern es unendlich viele dieser Art gibt, nach Satz IV ins Unendliche wachsen. Damit haben wir unsere erste Teilbehauptung bewiesen.

Die zweite Teilbehauptung folgt sofort aus der Tatsache, daß nach Satz Iβ) $Q_{s_k} = \Delta_{s_k-1} = Q_{s_k-1} - Q_{s_k-2}$ oder also $\Delta_{s_k} = -Q_{s_k-2}$ ist und daß nach Satz IV $Q_n \to \infty$ mit $n \to \infty$ gilt.

§ 7. Das Wachstum der Q_{r_k} verglichen mit dem Wachstum der r_k

Aus Satz V folgt

Satz VI: In einem unendlichen halbregelmäßigen Kettenbruch gilt

$$\frac{Q_{r_k}}{r_k} \to \infty \text{ mit } k \to \infty .$$

Beweis: Wir geben eine beliebige positive Zahl C vor und zeigen, daß für alle $k \geqq K(\mathrm{C})$ $\frac{Q_{r_k}}{r_k} > \mathrm{C}$ gilt. Da nach Satz V $\Delta_{r_k} \to \infty$ gilt, so existiert eine ganze positive Zahl K_0 derart, daß für $k \geqq K_0(C)$ $\Delta_{r_k} > 4\,C$ gilt. Nun kann $r_{k+1} - r_k$ nach § 2c) nur einen der beiden Werte 1 oder 2 annehmen. Gilt nun $r_{k+1} - r_k = 2$, dann ist $r_k + 1$ ein singulärer Index s_i und nach (1,3) gilt $Q_{s_i+1} \geqq Q_{s_i} + Q_{s_i-1}$. Also gilt nach Satz I$\beta$) $Q_{s_i+1} -$

$Q_{s_i-1} \geqq Q_{s_i} = \Delta_{s_i-1} > 4\,C$, wenn $s_i - 1 \geqq r_{K_0}$ ist. Damit haben wir gezeigt, daß für alle $k \geqq K_0$ $Q_{r_{k+1}} - Q_{r_k} > 4C$ gilt. Aus dieser Ungleichung folgt $Q_{r_{K_0+\varkappa}} > Q_{r_{K_0}} + 4C\varkappa$, wo $r_{K_0+\varkappa} \leqq r_{K_0} + 2\varkappa$ ist. Somit ist $\dfrac{Q_{r_{K_0+\varkappa}}}{r_{K_0+\varkappa}} > \dfrac{Q_{r_{K_0}} + 4C\varkappa}{r_{K_0} + 2\varkappa}$

Da $\dfrac{Q_{r_{K_0}} + 4C\varkappa}{r_{K_0} + 2\varkappa} \to 2C$ mit $\varkappa \to \infty$ gilt, so ist für $\varkappa \geqq \varkappa_0(K_0)$ $\dfrac{Q_{r_{K_0}} + 4C\varkappa}{r_{K_0} + 2\varkappa} > C$.

Also gilt wirklich für $\varkappa \geqq \varkappa_0(K_0)$ $\dfrac{Q_{r_{K_0+\varkappa}}}{r_{K_0+\varkappa}} > C$ oder also für

$k \geqq K_0(C)$ $\dfrac{Q_{r_k}}{r_k} > C$, w.z.b.w.

§ 8. Kettenbrüche mit Q_{r_k} von minimalem Wachstum

Satz VI sagt aus, daß die Q_{r_k} stärker ins Unendliche wachsen als die r_k. In diesem Paragraphen wollen wir nun zeigen, daß man in Satz VI r_k nicht durch eine stärker anwachsende Funktion von r_k ersetzen kann. Es gilt nämlich

Satz VII: Es sei $\varphi(x)$ eine stetige Funktion, für die $\varphi(x) \uparrow \infty$ mit $x \to \infty$ gilt. Dann existieren immer Kettenbrüche, die unendliche Teilfolgen m_k von r_k besitzen, derart, daß

$$\frac{Q_{mk}}{m_k \varphi(m_k)} \to 0 \text{ mit } k \to \infty$$

gilt.

Beweis: Wir wählen eine beliebige monoton fallende Nullfolge c_ν aus, bei der nur, um den Beweis zu vereinfachen, $c_1 > \dfrac{1}{\varphi(1)}$ gelten soll. Für jede Funktion der Folge $c_\nu \varphi(x)$ gilt für $x \geqq X_\nu = X_\nu(c_\nu, M_\nu, N_\nu)$ die Ungleichung $c_\nu x \varphi(x) > M_\nu x + N_\nu$, wie auch M_ν und N_ν als positive Zahlen gewählt werden.

Nun definieren wir einen Kettenbruch, der die im Satz VII angegebenen Eigenschaften besitzt. Es sei a eine beliebige positive ganze Zahl und $\varepsilon = \pm 1$, wobei $a - \varepsilon \geqq 2$ sei. a_0 wählen wir beliebig, $\varepsilon_1 = -1$ und $a_1 = 1$, so daß also nach (2,2) und nach der Definition von c_1 $Q_1 = 1 < c_1 \varphi(1)$ gilt. Wir wollen in dem zu definierenden Kettenbruch den ersten Index n, für den $Q_n \leqq c_k n \varphi(n)$ gilt, mit m_k bezeichnen. Nach dieser Definition ist also $n = 1 = m_1$.

Allgemein, sind wir beim Index m_{k-1} angelangt, so wollen wir unsern

Kettenbruch folgendermaßen fortsetzen. Wir wählen $a_{m_{k-1}+1} = a$ und $\varepsilon_{m_{k-1}+1} = \varepsilon$. Gilt dann $Q_{m_{k-1}+1} \leqq c_k(m_{k-1} + 1)\varphi(m_{k-1} + 1)$, so ist $m_{k-1} + 1 = m_k$. Gilt aber $c_{m_{k-1}+1} > c_k(m_{k-1} + 1)\, \varphi(m_{k-1} + 1)$, dann wählen wir $a_{m_{k-1}+\tau}=2$ und $\varepsilon_{m_{k-1}+\tau} =+1$ für $\tau=2,3, \ldots, \tau_0=X_k-m_{k-1}$, wo X_k die kleinste positive ganze Zahl ist derart, daß für alle $x \geqq X_k = X_k(c_k\,,\ \Delta_{m_{k-1}+1}\,,\ Q_{m_{k-1}})$ $c_k x\varphi(x) > \Delta_{m_{k-1}}\, x + Q_{m_{k-1}}$ ist. Daß ein solches X_k immer existiert, haben wir am Anfang unseres Beweises allgemein vermerkt. Der so ermittelte Index $m_{k-1} + \tau_0 = X_k$ ist der Index m_k. Denn nach § 4aα) ist $Q_{m_{k-1}+\tau_0}= Q_{m_{k-1}+1} + (\tau_0-1)$ $\Delta_{m_{k-1}+1} = Q_{m_{k-1}} + \Delta_{m_{k-1}+1} + (\tau_0 - 1)\ \Delta_{m_{k-1}+1} = Q_{m_{k-1}} + \tau_0\, \Delta_{m_{k-1}+1} <$ $Q_{m_{k-1}} + (m_{k-1}+\tau_0)\, \Delta_{m_{k-1}+1} < c_k(m_{k-1} + \tau_0)\ \varphi\ (m_{k-1} + \tau_0)$.

Für die so definierten m_k gilt nun $\dfrac{Q_{m_k}}{m_k\,\varphi(m_k)} \leqq c_k$, also $\dfrac{Q_{m_k}}{m_k\,\varphi(m_k)} \to 0$ mit $k \to \infty$, w. z. b. w.

§ 9. Kettenbrüche mit Q_{s_k} von minimalem Wachstum

Zunächst wollen wir bemerken, daß es Kettenbrüche gibt, in denen ein Q_{s_k} kleiner ist als eine beliebig vorgegebene Anzahl von unmittelbar vorangehenden Q_{r_k}. Um das zu zeigen, geben wir einen Kettenbruch an, in dem Q_{s_1} mit $s_1 = n + 1$ kleiner ist als die ersten n Q_{r_k}. Zu diesem Zweck wählen wir $a_\nu = 2$ und $\varepsilon_\nu = +1$ für $\nu = 0,1, \ldots, n$ und $a_{n+1} = 1$, $\varepsilon_{n+1} = +1$. In diesem Fall ist $Q_\nu = 2Q_{\nu-1} - Q_{\nu-2}$ oder also $\Delta_\nu = \Delta_{\nu-1}$ für $\nu = 1,2, \ldots, n$ und $Q_{n+1} = Q_n - Q_{n-1} = \Delta_n = \Delta_0$. Da nun nach (1,2) $\Delta_0=1$ und nach (2,2) $Q_1=2$ gilt, so ist wirklich $Q_\nu > Q_{s_1}$ für $\nu=1,2, \ldots, n$.

Analog dem Satz VII finden wir für die Q_{s_k} den

Satz VIII: Es sei $\varphi(x)$ eine stetige Funktion, für die $\varphi(x) \uparrow \infty$ gilt mit $x \to \infty$. Dann gibt es Kettenbrüche, für die $\dfrac{Q_{s_k}}{\varphi\,(s_k)} \to 0$ mit $s_k \to \infty$ gilt.

Beweis: Wir geben einen Kettenbruch an, der unserer Behauptung genügt. Es sei $a_0 = a_1 = 2$, $a_2 = 1$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$, so daß also $s_1 = 2$ ist. Vom Index $s_1 + 1$ oder allgemein vom Index $s_k + 1$ an setzen wir den Kettenbruch folgendermaßen fort: $a_{s_k+1} = 2$, $\varepsilon_{s_k+1} = -1$, $a_{s_k+\tau} = 2$, $\varepsilon_{s_k+\tau} = +1$ für $\tau = 2,3, \ldots, [x_{k+1}]$ und $a_{[x_{k+1}]+1} = 1$, $\varepsilon_{[x_{k+1}]+1} = +1$, wo x_{k+1} der Relation $\varphi(x_{k+1}) = (Q_{s_k} + Q_{s_k-1})^{1+\varepsilon}$ mit einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ genügt. Es ist also $[x_{k+1}] + 1 = s_{k+1}$.

Für den so definierten Kettenbruch gilt nun $Q_{s_{k+1}} = 2\,Q_{s_k} + Q_{s_k-1}$ oder also $\Delta_{s_k+1} = Q_{s_k} + Q_{s_k-1}$ und $Q_{s_k+\tau} = 2\,Q_{s_k+\tau-1} - Q_{s_k+\tau-2}$ oder also $\Delta_{s_k+\tau} = \Delta_{s_k+\tau-1}$. Hieraus folgt $Q_{s_{k+1}} = \Delta_{s_{k+1}-1} = \Delta_{s_k+1} = Q_{s_k} + Q_{s_k-1}$ und daraus

$$\frac{Q_{s_{k+1}}}{\varphi(s_{k+1})} = \frac{Q_{s_k} + Q_{s_k-1}}{\varphi(s_{k+1})} < \frac{Q_{s_k} + Q_{s_k-1}}{\varphi(x_{k+1})} = \frac{Q_{s_k} + Q_{s_k-1}}{(Q_{s_k} + Q_{s_k-1})^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{(Q_{s_k} + Q_{s_k-1})^{\varepsilon}}.$$

Da nach Satz IV $Q_n \to \infty$ mit $n \to \infty$ gilt, so gilt also $\dfrac{1}{(Q_{s_k} + Q_{s_k-1})^{\varepsilon}} \to 0$ mit $k \to \infty$ und damit auch $\dfrac{Q_{s_{k+1}}}{\varphi(s_{k+1})} \to 0$, w. z. b. w.

(Eingegangen den 27. März 1937.)