Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 10 (1937-1938)

Artikel: Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionen-Variablen.

Autor: Schuler, Bernhard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11007

Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionen-Variabeln

Von Bernhard Schuler, Zürich

Einleitung

Die Arbeit handelt von den durch Herrn Fueter[1]) untersuchten regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln $z = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3$. Sie zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil beschäftige ich mich mit Fragen, die sich auf die Reihenentwicklung der rechts-regulären Funktionen beziehen. Eine Funktion $w = f(z) = \sum_{k=0}^{3} u_k(x_0, x_1, x_2, x_3) i_k$ heißt rechts-regulär in einem endlichen, nicht degenerierten Hyperraum H, falls sie in jedem Punkt von H endliche und stetige partielle Ableitungen $w^{(k)} = \sum_{h=0}^{3} \frac{\partial u_h}{\partial x_k} i_h$ besitzt, die der Gleichung $\sum_{k=0}^{3} w^{(k)} i_k = 0$ genügen[2]). (Die Funktion heißt links-regulär, wenn unter denselben Voraussetzungen die Ableitungen die Gleichung $\sum_{k=0}^{3} i_k w^{(k)} = 0$ erfüllen.) Ein Punkt im Innern von H heißt regulärer Punkt. In einem regulären Punkt c läßt sich jede rechts-reguläre Funktion $f(z)$ in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n_1+n_2+n_3=n)} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z - c) \tag{1}$$

entwickeln. Dabei gibt es immer eine Hyperkugel um c mit nicht verschwindendem Radius, in deren Innern diese Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert[3]). Der Einfachheit halber werde ich stets die Entwicklung um den Nullpunkt betrachten. Dies bedeutet keine Einschränkung, weil durch eine Translation jede reguläre Funktion wieder in eine solche übergeht. Die Funktionen $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ sind folgendermaßen definiert. Es ist:

$$p_{n_1 n_2 n_3}(z) = \sum_{(k_r)} (x_{k_1} - i_{k_1} x_0)(x_{k_2} - i_{k_2} x_0) \ldots (x_{k_n} - i_{k_n} x_0) \; . \tag{2}$$

---

[1]) *Rud. Fueter:* Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variabeln. Comm. Math. Helv., Vol. 7, pag. 307. — Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln. Monatshefte für Math. u. Phys., Band 43, pag. 69. — Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln. Comm. Math. Helv., Vol. 8, pag. 471. — Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln. Comm. Math. Helv. Vol. 9, pag. 320.— Diese Arbeiten werden im folgenden als Fueter 1, 2, 3, 4 zitiert.

[2]) Siehe Fueter 1, pag. 310.

[3]) Siehe Fueter 3, pag. 374.

Hierin ist $n = n_1 + n_2 + n_3$, und die Summation erstreckt sich über alle *voneinander verschiedenen* Anordnungen der n Faktoren $(x_l - i_l x_0)$, von denen jeweils n_k gleich $(x_k - i_k x_0)$ sind $(k = 1, 2, 3)$. Zuerst gebe ich eine explizite Darstellung der Funktionen $p_{n_2 n_2 n_3}(z)$. Dann untersuche ich die Frage, wann die Reihe (1) in ihrem Konvergenzbereich eine analytische Funktion von zwei komplexen Variabeln darstellt. Herr Fueter hat nämlich gezeigt[4]), daß diese Funktionen als rechts-reguläre Quaternionenfunktionen aufgefaßt werden können, falls man setzt: $z_1 = x_0 + i_1 x_1$ und $z_2 = x_2 + i_1 x_3$. Es ist dann $z = z_1 + z_2 i_2$.

Im zweiten Teil befasse ich mich mit der Übertragung einiger Sätze aus der gewöhnlichen Funktionentheorie. Dort wird bekanntlich gezeigt, daß man von der Ableitung $F'(z)$ einer analytischen Funktion $F(z)$ nicht vorauszusetzen braucht, daß sie in einem Gebiet G stetig sei, damit $F(z)$ in G regulär ist. Vielmehr genügt hierzu die Existenz von $F'(z)$ in jedem Punkt von G. Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß man, wie Goursat gezeigt hat[5]), den Cauchy'schen Integralsatz beweisen kann, ohne die Stetigkeit von $F'(z)$ vorauszusetzen. Wenn aber das Integral $\int F(z)dz$ über jede ganz in G liegende, einfache, geschlossene Kurve verschwindet, und $F(z)$ in G stetig ist, dann folgt aus dem Satz von Morera, daß $F(z)$ in G regulär ist. In der Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln treten an Stelle der Cauchy'schen Integralsätze die beiden Hauptsätze von Herrn Fueter. Ist die Funktion $w = f(z)$ rechts-regulär im Hyperraum H und die Funktion $v = g(z)$ links-regulär in H, dann sagt der erste Hauptsatz aus, daß das Integral

$$\int_R w\,dZ\,v = 0 \tag{3}$$

ist, falls die geschlossene, einfach zusammenhängende Hyperfläche R ganz im Innern von H liegt[6]). Der zweite Hauptsatz liefert die Integraldarstellung der Funktion $f(z)$ im Innern von R mit Hilfe der Funktionswerte auf R. In Formeln[7])

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_R f(\zeta)\,dZ\,\Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) \ . \tag{4}$$

---

[4]) Fueter 3, pag. 375.

[5]) *Goursat:* Acta Mathematica, Band 4 (1884), pag. 197. Transactions Amer. Math. Soc., Band 1 (1900) pag. 14.

[6]) Fueter 1, pag. 312.

[7]) Fueter 1, pag. 318.

Das Differential dZ hat folgende Bedeutung. Es ist das Produkt des skalaren Hyperflächenelements $d\tau$ mit der innern Normalen von R (diese als Quaternionen geschrieben). Also

$$dZ = (\sum_{k=0}^{3} \xi_k i_k)\, d\tau = \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial x_0}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_0}{\partial t_3} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{vmatrix} dt_1\, dt_2\, dt_3$$

$x_k = x_k(t_1, t_2, t_3)$, $(k = 0, 1, 2, 3)$ ist die Parameterdarstellung von R. Von R muß man verlangen, daß die Normale in jedem Punkt existiert, und eindeutig festgelegt werden kann. R darf also nicht einseitig sein. Die Funktion $\Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) = -4n\,((\zeta - z)^{-1})\,(\zeta - z)^{-1}$ ist links- und rechts-regulär im ganzen R_4 mit Ausnahme des Punktes $\zeta = z$[8]). Es wird sich darum handeln, den ganzen oben angeführten Fragenkomplex aus der gewöhnlichen Funktionentheorie in dem vorliegenden allgemeinern Falle zu studieren. Im wesentlichen geht es also darum, die Voraussetzungen für reguläres Verhalten einzuschränken.

I.

A. Explizite Darstellung der Funktionen $\mathfrak{p}_{n_1 n_2 n_3}(z)$.

Man setze $p_{n_1 n_2 n_3}(z) = \sum_{k=0}^{3} U_k^{n_1 n_2 n_3} i_k$. Die reellen Funktionen $U_k^{n_1 n_2 n_3}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ sind nach (2) Formen vom Grade $n = n_1 + n_2 + n_3$. Gesucht ist eine explizite Darstellung dieser Formen. Dabei stößt man auf Ausdrücke von der Form $\sum_{(a_r)}^{l_1 l_2 l_3} i_{a_1} i_{a_2} \dots i_{a_k}$. Die drei Indizes über dem Summenzeichen geben in der angeschriebenen Reihenfolge die Anzahl der Faktoren i_1 bzw. i_2 und i_3 an. Es ist natürlich $l_1 + l_2 + l_3 = k$. Die Summation ist dieselbe wie in (2). Es gilt der

Hilfssatz: Der Ausdruck $\sum_{(a_r)}^{l_1 l_2 l_3} i_{a_1} \dots i_{a_k}$ verschwindet immer, ausgenommen in den folgenden vier Fällen. (Die Indizes sind so angeschrieben, daß deren Paarität, auf die es wesentlich ankommt, deutlich in Erscheinung tritt.)

---

8) Fueter 1, pag. 317.

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad \sum_{(a_r)}^{2l_1\,2l_2\,2l_3} i_{a_1}\dots i_{a_{2k}} = (-1)^k \frac{k!}{l_1!\,l_2!\,l_3!}\\
&2.\quad \sum_{(a_r)}^{2l_1+1\,2l_2\,2l_3} i_{a_1}\dots i_{a_{2k+1}} = (-1)^k \frac{k!}{l_1!\,l_2!\,l_3!}\, i_1\\
&3.\quad \sum_{(a_r)}^{2l_1\,2l_2+1\,2l_3} i_{a_1}\dots i_{a_{2k+1}} = (-1)^k \frac{k!}{l_1!\,l_2!\,l_3!}\, i_2\\
&4.\quad \sum_{(a_r)}^{2l_1\,2l_2\,2l_3+1} i_{a_1}\dots i_{a_{2k+1}} = (-1)^k \frac{k!}{l_1!\,l_2!\,l_3!}\, i_3.
\end{aligned}\right|\quad (k = l_1 + l_2 + l_3) \quad (5)$$

Diesen Satz beweist man mittels vollständiger Induktion. Der Induktionsschluß ergibt sich jeweils aus der leicht zu beweisenden Beziehung

$$\sum_{(a_r)}^{l_1 l_2 l_3} i_{a_1} i_{a_2}\dots i_{a_k} = i_1^2 \sum_{(a_r)}^{l_1-2,\,l_2\,l_3} i_{a_1}\dots i_{a_{k-2}} + i_2^2 \sum_{(a_r)}^{l_1\,l_2-2,\,l_3} i_{a_1}\dots i_{a_{k-2}} + i_3^2 \sum_{(a_r)}^{l_1\,l_2\,l_3-2} i_{a_1}\dots i_{a_{k-2}}$$

$$= -\left[\sum_{(a_r)}^{l_1-2,\,l_2\,l_3} i_{a_1}\dots i_{a_{k-2}} + \sum_{(a_r)}^{l_1\,l_2-2\,l_3} i_{a_1}\dots i_{a_{k-2}} + \sum_{(a_r)}^{l_1\,l_2\,l_3-2} i_{a_1}\dots i_{a_{k-2}}\right].$$

Man wird zunächst die vier Formeln (5) verifizieren, und dann mit Hilfe der Rechengesetze der Quaternionen zeigen, daß in allen übrigen Fällen der Ausdruck verschwindet.

Die Verwendungsmöglichkeit des obigen Satzes beruht auf dem folgenden Umstande. Multipliziert man das Produkt

$$(x_{k_1} - i_{k_1} x_0)\dots(x_{k_n} - i_{k_n} x_0)$$

aus und summiert dann über alle voneinander verschiedenen Anordnungen der Faktoren, so bekommt man

$$n!\, p_{n_1 n_2 n_3}(z) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{(l_1+l_2+l_3=k)} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{(n_1-l_1)!\,(n_2-l_2)!\, n_3-l_3)!}\, x_1^{n_1-l_1} x_2^{n_2-l_2} x_3^{n_3-l_3} x_0^k \Bigl(\sum_{(a_r)}^{l_1 l_2 l_3} i_{a_1}\dots i_{a_k}\Bigr)$$

wobei stets $n_k - l_k \geqq 0$, und $k = l_1 + l_2 + l_3$ ist. Der Ausdruck $\sum_{(a_3)}^{l_1 l_2 l_3} i_{a_1}\dots i_{a_k}$ ist nach unserem Hilfssatz nur dann reell und von Null verschieden, falls l_1, l_2, l_3 alle drei gerade sind. Substituiert man für l_1, l_2, l_3, k beziehungsweise die Werte $2l_1, 2l_2, 2l_3, 2k$, so kann man schreiben

$$U_0^{n_1 n_2 n_3} =$$

$$\sum_k \sum_{(l_1+l_2+l_3=k)} \frac{1}{(n_1-2l_1)!\,(n_2-2l_2)!\,(n_3-2l_3)!}\,\frac{1}{(2k)!}\,\frac{(-1)^k}{l_1!\,l_2!\,l_3!}\, k!\, x_1^{n_1-2l_1} x_2^{n_2-2l_2} x_3^{n_3-2l_3} x_0^{2k}.$$

Die Summation erstreckt sich von $k = 0$ bis $(n - 1)/2$, falls n ungerade, und von $k = 0$ bis $n/2$, falls n gerade ist.

Ganz analog gelangt man zu Formeln für $U_k^{n_1 n_2 n_3}$ $(k = 1, 2, 3)$. Zur Abkürzung setze man:

$$\begin{bmatrix} n_1 n_2 n_3 \\ l_1 \, l_2 \, l_3 \end{bmatrix} = (-1)^k \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{1}{(n_1 - 2l_1)! \, (n_2 - 2l_2)! \, (n_3 - 2l_3)!} \frac{1}{l_1! \, l_2! \, l_3!}$$

$$(k = l_1 + l_2 + l_3).$$

Es ist ferner zu beachten, daß in den nachstehenden Summen keine Terme auftreten, in denen eine oder mehrere der Differenzen $n_k - l_k$ negativ sind. Man könnte daher auch in diesen Fällen das Symbol $\begin{bmatrix} n_1 n_2 n_3 \\ l_1 \, l_2 \, l_3 \end{bmatrix}$ per definitionem gleich Null setzen. Es ist:

$$U_0^{n_1 n_2 n_3} = \sum_k (2k+1) \left\{ \sum_{(l_1+l_2+l_3=k)} \begin{bmatrix} n_1 n_2 n_3 \\ l_1 \, l_2 \, l_3 \end{bmatrix} x_1^{n_1-2l_1} x_2^{n_2-2l_2} x_3^{n_3-2l_3} \right\} x_0^{2k}.$$

Summation über k von $k = 0, \ldots, \frac{n}{2}$ falls n gerade

$k = 0, \ldots, \frac{n-1}{2}$ falls n ungerade.

$$U_1^{n_1 n_2 n_3} = \sum_k \left\{ \sum_{(l_1+l_2+l_3=k)} \begin{bmatrix} n_1 - 1 & n_2 & n_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} x_1^{n_1-1-2l_1} x_2^{n_2-2l_2} x_3^{n_3-2l_3} \right\} x_0^{2k+1}$$

$$U_2^{n_1 n_2 n_3} = \sum_k \left\{ \sum_{(l_1+l_2+l_3=k)} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 - 1 & n_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} x_1^{n_1-2l_1} x_2^{n_2-1-2l_2} x_3^{n_3-2l_3} \right\} x_0^{2k+1} \qquad (6)$$

$$U_3^{n_1 n_2 n_3} = \sum_k \left\{ \sum_{(l_1+l_2+l_3=k)} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 - 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} x_1^{n_1-2l_1} x_2^{n_2-2l_2} x_3^{n_3-1-2l_3} \right\} x_0^{2k+1}$$

Summation über k von $k = 0, \ldots, \frac{n-1}{2}$ falls n ungerade

$k = 0, \ldots, \frac{n-2}{2}$ falls n gerade.

$(n = n_1 + n_2 + n_3)$.

Aus diesen Formeln läßt sich leicht entnehmen, daß $U_0^{n_1 n_2 n_3}$ niemals identisch verschwindet, wie man auch die Indizes n_1, n_2, n_3 wählt. $U_k^{n_1 n_2 n_3}$ $(k = 1, 2, 3)$ aber verschwindet nur dann nicht identisch, falls $n_k \geqq 1$.

B. Über die Reihenentwicklung analytischer Funktionen von zwei komplexen Variabeln.

Da, wie in der Einleitung bemerkt, die analytischen Funktionen von zwei komplexen Variabeln $z_1 = x_0 + i_1 x_1$ und $z_2 = x_2 + i_1 x_3$ in ihrem Regularitätsgebiet auch aufgefaßt werden können als rechts-reguläre Funktionen einer Quaternionenvariabeln $z = z_1 + z_2 i_2$, so wird man eine solche Funktion in jedem regulären Punkt nach den Funktionen $p_{n_1 n_2 n_3}(z - c)$ entwickeln können. Wir betrachten die Entwicklung um den Nullpunkt. Die Beziehung[9])

$$c_{n_1 n_2 n_3} = \left[\frac{\partial^{n_1+n_2+n_3} f(z)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}}\right]_{z=0} \tag{7}$$

lehrt, daß die Entwicklungskoeffizienten $c_{n_1 n_2 n_3}$ im Falle einer analytischen Funktion von zwei komplexen Variabeln stets komplexe Zahlen sein müssen. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die regulären Funktionen von zwei komplexen Variabeln lauten in komplexer Schreibweise

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad w^{(0)} = -\, i_1 w^{(1)} \\ &\text{b)} \quad w^{(2)} = -\, i_1 w^{(3)} \end{aligned} \tag{8}$$

Da die hier in Betracht kommenden Funktionen in einem regulären Punkt beliebig oft differentiierbar sind, so sind die beiden Operatoren

$$\frac{\partial^{n_1+n_2+n_3+1}}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3+1}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{n_1+n_2+n_3+1}}{\partial x_2^{n_1}\, \partial x_2^{n_2+1}\, \partial x_3^{n_3}}$$

in ihrer Wirkung beziehungsweise gleich den Operatoren

$$\frac{\partial^{n_1+n_2+n_3}}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{n_1+n_2+n_3}}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$$

((8)b) sagt aber nichts anderes aus, als daß der Operator $\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, angewendet auf irgend eine reguläre Funktion von zwei komplexen Variabeln, identisch den Wert Null ergibt im ganzen Regularitätsgebiet. Dann gilt also:

$$-\, i_1 \left[\frac{\partial^{n_1+n_2+n_3+1} f(z)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3+1}}\right]_{z=0} = \left[\frac{\partial^{n_1+n_2+n_3+1} f(z)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2+1}\, \partial x_3^{n_3}}\right]_{z=0}$$

oder:
$$c_{n_1 n_2 n_3 + 1} = i_1 c_{n_1\, n_2 + 1 n_3} \,.$$

---

[9]) Fueter 3, pag. 375.

Diese Relationen sind stets erfüllt, wenn $f(z)$ eine im Null-Punkt reguläre Funktion der zwei Variabeln z_1 und z_2 ist. Umgekehrt kann man zeigen, daß das Bestehen dieser Relationen zusammen mit der Forderung, daß die $c_{n_1 n_2 n_3}$ komplexe Zahlen sind, hinreichend ist dafür, daß die betreffende Reihenentwicklung in ihrem Konvergenzbereich eine reguläre Funktion von zwei Variabeln z_1 und z_2 darstellt. Der Beweis ergibt sich aus der Gegenüberstellung der Entwicklung nach den Funktionen $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ einerseits, und nach den Potenzprodukten von z_1 und z_2 andererseits.

Vorerst muß gezeigt werden, wie ein solches Produkt $z_1^{m_1} z_2^{m_2}$ nach den Funktionen $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ zu entwickeln ist. Es ist $\frac{\partial}{\partial x_1} = i_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial z_2}$, $\frac{\partial}{\partial x_3} = i_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$ und daher

$$c_{n_1 n_2 n_3} = \left[\frac{\partial^{n_1}}{\partial z_1^{n_1}} \frac{\partial^{n_2+n_3}}{\partial z_2^{n_2+n_3}} (i_1^{n_1+n_3}) (z_1^{m_1} z_2^{m_2}) \right]_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0}} .$$

Die einzigen von Null verschiedenen Koeffizienten sind jene, wo $n_1 = m_1$ und $n_2 + n_3 = m_2$ ist. Daraus ergibt sich:

$$z_1^{m_1} z_2^{m_2} = m_1 ! \; m_2 ! \; i_1^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} i_1^{m_2-j} p_{m_1 j\, m_2-j}(z) . \tag{9}$$

Man beachte, daß für zwei verschiedene Potenzprodukte von z_1 und z_2 auf der rechten Seite von (9) niemals dieselbe Funktion $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ gleichzeitig auftreten kann. Ferner treten in

$$\sum_{j=0}^{m_2} i_1^{m_2-j} p_{m_1 j\, m_2-j}(z)$$

nur Funktionen gleichen Grades auf. (Die Funktionen $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ sind in ihren reellen komponenten Formen vom Grade $n = n_1 + n_2 + n_3$ in x_0, x_1, x_2, x_3.) Damit ist man beinahe am Ziel. Der Ausdruck

$$\sum_{(n_1+n_2+n_3=n)} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z)$$

läßt sich in eindeutiger Weise überführen in eine Form vom Grade n in z_1 und z_2 mit komplexen Koeffizienten, falls die $c_{n_1 n_2 n_3}$ komplexe Zahlen sind, und den Relationen $c_{n_1 n_2 n_3+1} = i_1 c_{n_1 n_2+1 n_3}$ genügen. Denn aus

$$c_{m_1 j-1\, m_2-j+1} = i_1 c_{m_1 j\, m_2-j} \qquad (n = m_1 + m_2)$$

folgt:

$$c_{m_1 j\, m_2-j} = i_1^{m_2-j} c_{m_1 m_2 0}$$

und daraus

$$\sum_{j=0}^{m_2} c_{m_1 j\, m_2-j}\, p_{m_1 j\, m_2-j}(z) = c_{m_1 m_2 0} \sum_{l=0}^{m_2} i_1^{m_2-j}\, p_{m_1 j\, m_2-j}(z)$$

$$= i_1^{-m_1} \frac{c_{m_1 m_2 0}}{m_1!\, m_2!} z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

Der ganze Vorgang bedeutet nur eine wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe erlaubte Umordnung der Summanden.

1. Satz: *Damit die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+n_3=n} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ *in ihrem Konvergenzgebiet eine analytische Funktion von zwei komplexen Variabeln darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die* $c_{n_1 n_2 n_3}$ *komplexe Zahlen sind, die den Relationen* $c_{n_1\, n_2+1\, n_3} = i_1 c_{n_1\, n_2\, n_3+1}$ *genügen.*

$$(n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \ldots)$$

Man bemerkt, daß die Koeffizienten $c_{n_1 0 0}$ in den angegebenen Relationen nicht auftreten. Das muß auch so sein, denn die Funktionen $p_{n_1 0 0}$ sind Potenzen von z_1.

II.

A. Vorbereitende Bemerkungen.

Ist $F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ eine in dem endlichen Gebiet G der komplexen Ebene definierte Funktion des komplexen Argumentes $z = x + iy$, dann besitzt $F(z)$ in jedem Punkt von G eine Ableitung $F'(z)$, falls in jedem Punkt von G

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - \alpha(z) \right| < \varepsilon$$

ist, sofern $|h| = |h_0 + i h_1| \leqq \delta(\varepsilon)$ ist. $\alpha(z)$ ist eine dem Punkte z zugeordnete endliche komplexe Zahl. Es wird verlangt, daß zu jedem positiven ε eine positive Zahl $\delta(\varepsilon)$ angegeben werden kann, und es ist $\alpha(z) = F'(z)$.

Da man bei den regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln mit einer einzigen Ableitung nicht mehr auskommt, erhebt sich die Frage, mit welchen Voraussetzungen man in diesem allgemeinern Fall arbeiten soll? Beim Studium der Lehre von den reellen Funktionen von mehreren Variabeln stößt man gelegentlich auf den Begriff der *Differentiierbarkeit nach Stolz*[10]). Eine Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ heißt nach Stolz differentiierbar in einem Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$, wenn es n endliche Zahlen $\alpha_k (k = 1, \ldots, n)$ gibt, so daß

[10]) Siehe *Carathéodory*, Reelle Funktionen, pag. 644.

$$\varphi(x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n)-\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k + r \cdot R(h_1, \ldots, h_n) \quad (10)$$

ist. Hierin ist $r^2 = \sum_{k=1}^{n} h_k^2$, und die Funktion $R(h_1, \ldots, h_n)$ muß folgende Eigenschaft besitzen. Es soll eine Funktion $S(r)$ existieren, für die $\lim_{r \to 0} [S(r)] = 0$ ist, und zugleich $|R(h_1, \ldots, h_n)| \leqq S(r)$. Es ist klar, daß die Funktionen $R(h_1, \ldots, h_n)$ und $S(r)$ noch Funktionen des Punktes $(x_1, \ldots, x_n)$ sind. In jedem Punkt, in dem eine Funktion nach Stolz differentiierbar ist, ist sie *stetig*, und besitzt endliche *erste partielle Ableitungen nach jeder Variabeln.* Dies läßt sich unmittelbar aus der Definition herauslesen.

Besitzt die komplexe Funktion $F(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ in jedem Punkt von G eine Ableitung $F'(z)$, dann läßt sich leicht zeigen, daß die Funktionen $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ in jedem Punkt von G nach Stolz differentiierbar sind. Andererseits läßt sich aus der Differentiierbarkeit nach Stolz dieser Funktionen und aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen wieder auf die Existenz von $F'(z)$ zurückschließen. Faßt man $F(z)$ auf als Funktion einer Quaternionenvariabeln, und schreibt man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in der Form $\sum_{k=0}^{3} w^{(k)} i_k = 0$, dann folgt aus dem oben gesagten, daß die Differentiierbarkeit nach Stolz der reellen Komponenten einer Quaternionenfunktion zusammen mit der Gleichung $\sum_{k=0}^{3} w^{(k)} i_k = 0$ im Falle der analytischen Funktionen einer komplexen Variabeln nicht mehr voraussetzt, als es die Existenz von $F'(z)$ bei den analytischen Funktionen tut.

B. Beweis des ersten Hauptsatzes für Intervalle.

Unter einem Intervall des n-dimensionalen Raumes verstehe ich stets den offenen Bereich

$$a_k < x_k < b_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Intervalle bezeichne ich immer mit dem Buchstaben I. Deren Rand, der sich im Falle $n = 4$ aus acht dreidimensionalen Intervallen zusammensetzt, bezeichne ich mit $R(I)$. Wir betrachten eine Funktion $w = f(z) = \sum_{k=0}^{3} u_k(x_0, x_1, x_2, x_3) i_k$, die in einem endlichen, nicht degenerierten Hyperraum H definiert ist, und in jedem Punkt von H den beiden Bedingungen

a) die Funktionen $u_k(x_0, x_1, x_2, x_3)$ sind differentiierbar nach Stolz, (11)

b) die partiellen Ableitungen dieser Funktionen erfüllen die Gleichung $\sum_{k=0}^{3} w^{(k)} i_k = 0$

genügt. Es ist zu beweisen, daß für jedes ganz in H liegende Intervall I das Integral $J = \int_{R(I)} w dZ$ verschwindet. Die Existenz von J ist zufolge der Stetigkeit von $f(z)$ in H gesichert. Unterteilt man das Intervall I in sechzehn kongruente Teilintervalle, dann gibt es unter diesen mindestens eines, es möge I_1 heißen, für welches gilt:

$$| J(R_1) | \geqq \frac{1}{16} | J(R) | \ .$$

Das folgt einfach aus der Beziehung

$$\int_{R(I)} f(\zeta)\, dZ = \sum_{k=1}^{16} \int_{R(I^{(k)})} f(\zeta)\, dZ \ ,$$

wo $I^{(k)} (k = 1, \ldots, 16)$ die Teilintervalle von I bedeuten. Die Fortsetzung des Verfahrens führt zu einer Intervallschachtelung, die in einem Punkt $c = \sum_{k=0}^{3} c_k i_k$ in I oder auf dessen Rand konvergiert. Nach der n-ten Unterteilung gibt es mindestens ein Teilintervall, für welches gilt:

$$| J(R_n) | \geqq \frac{1}{16^n} | J(R) | \ . \tag{12}$$

Da die Funktionen $u_k(x_0, x_1, x_2, x_3)$ nach Voraussetzung in c differentiierbar sind nach Stolz, hat man in leichtverständlicher Schreibweise

$$f(c+h) = f(c) + \sum_{k=0}^{3} f(c)^{(k)} h_k + r . p(c, h) \tag{13}$$

mit $h = \sum_{k=0}^{3} h_k i_k$ und $| p(c,h) | = \sqrt{\sum_{k=0}^{3} R_k^2(h_0, \ldots, h_3)}$.

Da die $u_k(x_0, x_1, x_2, x_3)$ stetig sind in c, folgt aus (10), daß auch die Funktionen $R_k(h_0, \ldots, h_3)$ stetig sind. Aus $R_k(0, \ldots 0) = 0$ schließt man weiter, daß zu jedem positiven ε eine positive Zahl $r_0(\varepsilon)$ existiert, so daß

$$|p(c,h)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |h| \leqq r_0(\varepsilon) \ .$$

Wegen $\sum_{k=0}^{3} f(c)^{(k)} i_k = 0$ kann man (13) noch etwas umformen und bekommt

$$f(c+h) = f(c) + \sum_{k=1}^{3} f(c)^{(k)} (h_k - i_k h_0) + r \cdot p(c, h) \,. \tag{14}$$

Man denke sich jetzt die Intervallschachtelung bis zu einem solchen Grade durchgeführt, daß das Intervall I ganz im Innern der Hyperkugel um c mit dem Radius $r_0(\varepsilon)$ enthalten ist. Dann ist:

$$\int f(c+h)\,dZ = f(c) \int dZ + \sum_{k=1}^{3} f(c)^{(k)} \int (h_k - i_k h_0)\,dZ + \int r \cdot p(c,h)\,dZ,$$

wobei überall über $R(I_n)$ zu integrieren ist. Die Integrale

$$\int dZ \,, \qquad \int (h_k - i_k h_0)\,dZ \,, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

verschwinden, da die Integranden rechts-reguläre Funktionen sind[11]). Es bleibt also für die Abschätzung nur das Integral

$$\int_{R(I_n)} f(c+h)\,dZ = \int_{R(I_n)} r \cdot p(c,h)\,dZ$$

übrig. Bezeichnet man mit l die Länge der Diagonale von I, und mit l_n diejenige von I_n, so gilt

$$l = 2^n\, l_n \,.$$

Hieraus folgt:

$$|\, J(R_n) \,| \leqq \varepsilon \int_{R(I_n)} |\, r\,dZ \,| \leqq \varepsilon\, l_n \int_{R(I_n)} dr \leqq l_n^4\, 8\, \varepsilon = 8\, \frac{l^4}{16^n}\, \varepsilon \,.$$

Und schließlich findet man unter Berücksichtigung von (12)

$$|\, J(R) \,| \leqq 8\, l^4 \varepsilon \,.$$

Die positive Zahl ε darf aber beliebig klein gewählt werden. Daraus schließt man:

$$\int_{R(I)} f(\zeta)\,dZ = 0 \,.$$

Bemerkung: In der Einleitung habe ich betont, daß die Hyperfläche R, über die in den beiden Hauptsätzen zu integrieren ist, zweiseitig sein sollte, damit in jedem Punkt die Normale eindeutig festgelegt werden kann. Nun sind zwar die Ränder von Intervallen zweiseitig, aber es gibt Punkte, in denen die Normale nicht existiert (wenigstens nicht eindeutig). Es sind das die Punkte, die mehr als einem der acht abgeschlosse-

---

[11]) Fueter 3, pag. 372, 1. Hilfssatz.

nen, drei-dimensionalen Intervalle angehören, deren Durchschnitt gleich $R(I)$ ist. Die Schwierigkeit ist leicht zu umgehen, wenn man definitionsweise setzt:

$$J(R) = \sum_{k=1}^{8} J(r_k) .$$

Die r_k sind die oben genannten acht drei-dimensionalen Intervalle.

Wir kommen jetzt zum Beweis des allgemeinen Falles. Es sei $w = f(z)$ eine Funktion, die den Voraussetzungen (11) genügt. Die Funktion $v = g(z)$ soll denselben Voraussetzungen genügen, mit der einen Abänderung, daß die partiellen Ableitungen die Gleichung $\sum_{k=0}^{3} i_k v^{(k)} = 0$ erfüllen. Wegen der Stetigkeit von w und v in H existiert dann das Integral

$$J(R) = \int_{R(I)} f(\zeta) dZ g(\zeta) .$$

Nun führt man eine analoge Intervallschachtelung durch, wobei wieder die Ungleichung (12) auftritt. Für $g(z)$ gilt an der Stelle c, gegen welche die Intervallschachtelung konvergiert analog zu (14)

$$g(c+h) = g(c) + \sum_{k=1}^{3} (h_k - i_k h_0) g(c)^{(k)} + r \cdot q(c,h) .$$

Dabei ist entsprechend wie damals

$$|q(c,h)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |h| \leqq r_1(\varepsilon) .$$

Von $f(z)$ gebrauchen wir zum Beweise nur die *Stetigkeit*, und die *Tatsache, daß* $\int_{R(I)} f(z) dZ = 0$ *ist für jedes in* H *gelegene Intervall* I. Dann ist also $|f(c+h) - f(c)| < \varepsilon$, falls $|h| \leqq r_2$. Dabei ist ε dieselbe positive Zahl, wie oben. Mit r_0 bezeichne ich die kleinere der beiden Zahlen r_1, r_2. Denkt man sich jetzt die Intervallschachtelung soweit durchgeführt, daß I_n ganz im Innern der Hyperkugel um c mit dem Radius r_0 enthalten ist, so wird:

$$\int_{R(I_n)} f(\zeta) dZ \left[g(c) + \sum_{k=1}^{3} (h_k - i_k h_0) g(c)^{(k)} + r \cdot q(c, h)\right]$$

$$= \left(\int_{R(I_n)} f(\zeta) dZ\right) g(c)$$

$$+ \int_{R(I_n)} [f(c) + (f(\zeta) - f(c))] dZ \left[\sum_{k=1}^{3} (h_k - i_k h_0) g(c)^{(k)} + r \cdot q(c,h)\right]$$

$$= J_1 + J_2 .$$

Nach Voraussetzung verschwindet J_1. Ferner ist

$$
\begin{aligned}
J_2 = & \int\limits_{R(I_n)} f(c) dZ \left[\sum_{k=1}^{3} (h_k - i_k h_0) g(c)^{(k)}\right] \\
& + \int\limits_{R(I_n)} f(c) dZ r \cdot q(c,h) \\
& + \int\limits_{R(I_n)} [f(\zeta) - f(c)] dZ \left[\sum_{k=1}^{3} (h_k - i_k h_0) g(c)^{(k)}\right] \\
& + \int\limits_{R(I_n)} [f(\zeta) - f(c)] dZ r \cdot q(c,h) \\
= & J_3 + J_4 + J_5 + J_6 .
\end{aligned}
$$

J_3 verschwindet, weil die Funktionen $(h_k - i_k h_0)$, $(k = 1, 2, 3)$ sowohl rechts- wie links-regulär sind. Die Abschätzung für J_4 ist vollkommen analog derjenigen im vorhergehenden Beweis. Bei J_5 hat man:

$$
\begin{aligned}
| J_5 | & \leqq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{3} \{ | g(c)^{(k)} | \int\limits_{R(I_n)} | dZ (h_k - i_k h_0) | \} \\
& \leqq \varepsilon \{ \sum_{k=1}^{3} | g(c)^{(k)} | \} \int\limits_{R(I_n)} | dZ \cdot r | \leqq \varepsilon \cdot 8 \frac{l^4}{16^n} \{ \sum_{k=1}^{3} | g(c)^{(k)} | \} .
\end{aligned}
$$

Ferner ist

$$
| J_6 | \leqq \varepsilon \int | dZ r \cdot q(c,h) | \leqq \varepsilon^2 \cdot 8 \frac{l^4}{16^n} .
$$

Unter Berücksichtigung von (12) bekommt man

$$
| \int\limits_{R(I)} w dZ v | \leqq \varepsilon \cdot 8 l^4 \{ | g(c) | + [\sum_{k=1}^{3} | g(c)^{(k)} |] + \varepsilon \} .
$$

Damit haben wir den

2. Satz: *Sind $w = f(z)$ und $v = g(z)$ zwei in H definierte Funktionen einer Quaternionenvariabeln, deren reelle Komponenten in jedem Punkt von H nach Stolz differentiierbar sind, und deren partielle Ableitungen in jedem Punkt von H den Gleichungen $\sum_{k=0}^{3} w^{(k)} i_k = 0$ bzw. $\sum_{k=0}^{3} i_k v^{(k)} = 0$ genügen, dann gilt für jedes ganz in H gelegene Intervall I*

$$
\int\limits_{R(I)} f(\zeta) dZ g(\zeta) = 0 .
$$

Bemerkung: Goursat operiert bekanntlich mit Dreiecken. Dann kann man sehr einfach den Cauchy'schen Satz beweisen für beliebige, einfach zusammenhängende, geschlossene Kurven im Regularitätsbereich. Das ist mit Hilfe von Intervallen nicht möglich. Wollte man hier in analoger Weise vorgehen, dann müßte man den Satz für das vierdimensionale Simplex beweisen. Eine der Abschätzung zugängliche Zerlegung desselben ist zwar durchführbar, aber nicht sehr übersichtlich. Es ist daher nicht beabsichtigt, auf der vorliegenden Grundlage die Theorie vollkommen neu aufzubauen. Vielmehr ist das ganze nur als Ergänzung der Beweise von Herrn Fueter aufzufassen.

C. Beweis des zweiten Hauptsatzes für Intervalle.

Wir betrachten wieder die Funktion $f(z)$ des vorigen Abschnittes, die also in H den Voraussetzungen (11) genügt. Der Punkt z möge im Innern eines ganz in H gelegenen Intervalles I sich befinden. Man konstruiere um z, mit z als Mittelpunkt einen vier-dimensionalen Würfel W, der auch als Intervall aufgefaßt werden kann, und dessen Kantenlänge so klein ist, daß er ganz in I enthalten ist. Der Hyperraum zwischen $R(I)$ und $R(W)$ läßt sich in eindeutiger Weise in $3^4 - 1$ Intervalle I_k zerlegen, indem man die den Würfel W begrenzenden Hyperebenen mit $R(I)$ zum Schnitt bringt. Dann existieren nach dem vorhergehenden Abschnitt die Integrale

$$\int\limits_{R(I_k)} f(\zeta)dZ\Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) \ , \qquad (k = 1, \ldots, 80) \ ,$$

und sind alle gleich Null. Denn die Funktion $\Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1} = -4n((\zeta - z)^{-1})$ $(\zeta - z)^{-1}$ ist links-regulär als Funktion von ζ, falls $\zeta \neq z$. Es wird also

$$\int\limits_{R(I)} - \int\limits_{R(W)} = \sum_k \int\limits_{R(I_k)} = 0 \ . \tag{15}$$

Aus (15) folgt sofort, daß das Integral über W von der Kantenlänge des Würfels unabhängig ist. Es bleibt noch die Aufgabe, dieses Integral zu berechnen. Wegen der Stetigkeit der Funktion $f(z)$ in H gibt es eine Umgebung des Punktes z, in welcher

$$|f(z+h) - f(z)| \leqq \varepsilon$$

ist. Ist die Kantenlänge von W so klein, daß W ganz in obiger Umgebung enthalten ist, dann wird

$$\int\limits_{R(W)} f(\zeta)dZ\Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) = f(z)\int\limits_{R(W)} dZ\Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) + \int\limits_{R(W)} [f(\zeta) - f(z)]\, dZ\Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) \ .$$

Nun ist:

$$\left| \int_{R(W)} [f(\zeta) - f(z)] dZ \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) \right| \leqq \varepsilon \int_{R(W)} \left| dZ \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) \right| \leqq 256 \cdot \varepsilon \, ,$$

denn es ist:

$$\int_{R(W)} \left| dZ \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) \right| =$$

$$= 4 \int_{R(W)} \left| dZ n((\zeta - z)^{-1}) (\zeta - z)^{-1} \right| \leqq \frac{4 \cdot 8}{\left(\frac{l}{2}\right)^3} l^3 \cdot \varepsilon = 256 \, \varepsilon \text{ [12]} \, .$$

Sei K eine Hyperkugel um z, die in W enthalten ist. Da $\Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1})$ links-regulär ist im Hyperraum zwischen $R(W)$ und $R(K)$, ist:

$$\int_{R(W)} dZ \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) = \int_{R(K)} dZ \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) \, .$$

Dieses letzte Integral ist von Herrn Fueter[13]) ausgewertet worden, und besitzt den Wert $8\pi^2$. Daher hat man schließlich:

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{R(I)} f(\zeta) dZ \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) \, .$$

Damit ist der zweite Hauptsatz für Intervalle bewiesen. Nun sind wir in der Lage, den Beweis zu liefern für den folgenden, das eigentliche Ziel der Untersuchung bildenden

3. Satz: *Ist H ein endlicher, nicht degenerierter Hyperraum, und $f(z) = \sum_{k=0}^{3} u_k(x_0, x_1, x_2, x_3) i_k$ eine Funktion, deren reelle Komponenten in jedem Punkt von H nach Stolz differentiierbar sind, und deren partielle Ableitungen die Gleichung $\sum_{k=0}^{3} w^{(k)} i_k = 0$ erfüllen, dann ist $f(z)$ in H rechts-regulär.*

Jeder innere Punkt von H kann nämlich mit einem ganz in H liegenden Intervall I umgeben werden. Für I gelten dann die beiden Hauptsätze. Also läßt sich in I $f(z)$ darstellen durch das Integral

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{R(I)} f(\zeta) dZ \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) \, .$$

Weil die Funktion $\Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1})$ auf $R(I)$ stetige partielle Ableitungen nach den Parametern $x_k (k = 0, 1, 2, 3)$ besitzt, darf man unter dem Integralzeichen partiell nach x_k differentiieren und bekommt:

---

[12]) l ist die Kantenlänge des Würfels W.

[13]) Fueter 1, pag. 318.

$$f(z)^{(k)} = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{R(I)} f(\zeta)\, dZ \,\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\, \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1})\right] \;\cdot$$

Dieses Integral stellt im Innern von I eine stetige Funktion von z dar. Weil es zu jedem Punkt im Innern von H ein ganz in H liegendes Intervall gibt, das diesen Punkt enthält, so müssen die partiellen Ableitungen von $f(z)$ in jedem innern Punkt von H stetig sein. Damit sind die Voraussetzungen erfüllt, unter denen Herr Fueter die beiden Hauptsätze bewiesen hat, und $f(z)$ ist in der Tat rechts-regulär in H.

D. Das Analogon zum Satz von Morera.

Wie betrachten wieder eine Funktion $f(z)$ in H, und setzen von dieser voraus, daß sie in H stetig ist, und daß das Integral $\int\limits_{R(I)} f(\zeta)dZ$ verschwindet, sofern das Intervall I ganz in H enthalten ist. Aus dem vorigen Beweis des zweiten Hauptsatzes, der besonders auf diesen Fall zugeschnitten ist, folgt unmittelbar, daß für Punkte im Innern von I gilt:

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{R(I)} f(\zeta)\, dZ\, \Delta_\zeta((\zeta - z)^{-1}) \;.$$

Hieraus ergibt sich, daß die Ableitungen von $f(z)$ in jedem Punkt im Innern von I existieren, stetig sind, und der Gleichung $\sum\limits_{k=0}^{3} f(z)^{(k)} i_k = 0$ genügen. Da jeder innere Punkt von H als innerer Punkt eines ganz in H gelegenen Intervalles aufgefaßt werden kann, so ist damit der Beweis des folgenden Satzes erbracht.

4. Satz: *Ist H ein endlicher nicht degenerierter Hyperraum, und $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{3} u_k(x_0, x_1, x_2, x_3)i_k$ eine in H stetige Funktion, für welche das Integral $\int\limits_{R(I)} f(\zeta)dZ$ über jedes ganz in H liegendes Intervall I verschwindet, dann ist $f(z)$ in H rechts-regulär.*

(Eingegangen den 24. Juni 1938.)