Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Über Bewegungsmittelwerte konvexer Körper in Gittern.

Autor: Preisig, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14883

Über Bewegungsmittelwerte konvexer Körper in Gittern

Von E. Preisig, Baden

Wird ein k-dimensionaler Bereich mit Jordanschem Volumen in einem k-dimensionalen Einheitspunktgitter allen Translationen bzw. allen Bewegungen unterworfen, so ergibt sich als Translations- bzw. Bewegungsmittelwert der Bedeckungszahl von Gitterpunkten das Volumen. Es kann die Frage aufgeworfen werden, ob noch Aussagen ähnlicher Art gemacht werden können, wenn man an Stelle des Punktgitters ein Unterraumgitter G_ϱ, bestehend aus $(k - \varrho)$-dimensionalen Unterräumen betrachtet und die Treffzahl des Bereichs in G_ϱ über eine bestimmte Bewegungsgruppe mittelt. Es zeigt sich, daß dies tatsächlich der Fall ist, wenn man als Bereich einen konvexen Körper wählt und die Mittelwertsbildung über die volle Bewegungsgruppe erstreckt.

Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit lautet kurz gefaßt so:

Bezeichnet $J_{k-\lambda}$ den Bewegungsmittelwert der Treffzahl des konvexen Körpers im Unterraumgitter $G_{k-\lambda}$, W_λ das λ-te Quermaßintegral des Körpers, endlich κ_k das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel, so gilt die Relation

$$W_\lambda = \frac{\kappa_k}{\kappa_{k-\lambda}} J_{k-\lambda} .$$

Nach dieser Formel werden die $k+1$ Quermaßintegrale W_0 bis W_k eines konvexen Körpers als Treffzahlmittelwerte des Körpers in den $k+1$ möglichen Unterraumgittern G_k bis G_0 dargestellt.

Für dreidimensionale Eikörper ergeben sich z.B. Volumen, Oberfläche und das Integral der mittleren Krümmung als Treffzahlmittelwerte bei Bewegung des Eikörpers im Punkt-, Geraden- und Ebenengitter.

Eine direkte Definition der Mittelwerte, etwa durch Riemannsche Integrale in einem geeigneten Parameterraum der Bewegungsgruppe, wird umgangen. Die Mittelwerte werden als Resultat einer abstrakten Mittelwertsoperation dargestellt, die durch fünf Postulate charakterisiert ist, und der als Definitionsbereich eine geeignet abgegrenzte Klasse von Funktionen über der Bewegungsgruppe zugeordnet ist. Die Mittelwertsoperation wird als bewegungsinvariant, additiv, monoton, normiert und zerlegbar vorausgesetzt. Aus der Existenz einer Mittelwertsoperation, die diesen fünf Postulaten genügt, folgt ihre Eindeutigkeit. Die Existenz kann dadurch sichergestellt werden, daß man sich auf die Klasse der mittelbaren Funktionen beschränkt. Diese Mittelbarkeit für Funktionen über Bewegungsgruppen wird im Anschluß an eine analoge Begriffsbildung von *J. v. Neumann*[1]) in der Theorie der fastperiodischen Funktionen in geeignet abgeänderter Form gewählt, ähnlich wie das von *W. Maak*[2]) in seinen Grundlagen der ebenen Integralgeometrie gemacht worden ist. Für die bei der Bearbeitung des vorliegenden geometrischen Problems auftretenden Funktionen über Translations- und Drehgruppen wurde der erforderliche Nachweis der Mittelbarkeit erbracht.

Raum, Gitter und Bewegung

§ 1. Raum, Punktgitter und Unterraumgitter

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf den k-dimensionalen euklidischen Raum, den wir mit R_k bezeichnen. $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ bezeichne einen Punkt mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_k$, die auf ein orthogonales Koordinatensystem des R_k bezogen sind.

Alle Punkte $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, deren Koordinaten x_ν ganze Zahlen sind, bilden ein *Punktgitter*, das wir mit G_k bezeichnen. Jedem Gitterpunkt $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ordnen wir genau einen Gitterwürfel zu, nämlich die Gesamtheit der Punkte $Q(x_1+\mu_1, x_2+\mu_2, \ldots, x_k+\mu_k)$, wobei $0 \leqq \mu_\nu < 1$ ist. Einen solchen Würfel nennen wir halbabgeschlossen. Die Festsetzung des Variabilitätsbereiches der Größen μ im Sinne dieser Ungleichungen hat den Vorteil, daß der Raum durch diese Gitterwürfel genau einfach überdeckt wird und zu jedem solchen Würfel genau ein Gitterpunkt gehört.

Im weitern errichten wir Gitter aus $(k-\varrho)$-dimensionalen Unterräumen, die auf einem ϱ-dimensionalen Unterraum senkrecht stehen. Ein solches *Unterraumgitter* bezeichnen wir mit G_ϱ. G_ϱ besteht aus allen Punkten $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, für welche x_ν ganz ist für $1 \leqq \nu \leqq \varrho$, beliebig für $\varrho < \nu \leqq k$.

Insbesondere ist G_0 der Raum R_k; G_1 ist das Gitter aus $(k-1)$-dimensionalen Hyperebenen, die senkrecht stehen auf der Geraden

[1]) *J. v. Neumann*, Almost periodic functions in a group I. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 445—492 (1934).

[2]) *W. Maak*, Integralgeometrie 18 (Grundlagen der ebenen Integralgeometrie). Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität 12, 1. Heft, 83—110 (1937).

$x_2 = x_3 = \cdots = x_k = 0$; G_{k-1} ist das Gitter aus den Geraden, die senkrecht stehen auf der $(k-1)$-dimensionalen Hyperebene $x_k = 0$; G_k ist das Punktgitter des R_k, das oben beschrieben wurde.

§ 2. Bewegungen im Raum

P sei ein Punkt allgemeiner Lage mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_k$, den wir durch eine Operation X der Bewegungsgruppe $\mathfrak{X}$ in den Punkt P' mit den Koordinaten $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$ überführen. Dann gilt

$$x'_\nu = \sum_{\mu=1}^{k} a_{\nu\mu}\, x_\mu + t_\nu \tag{1}$$

oder

$$x' = A \cdot x + T \ , \tag{2}$$

wobei $A = ||a_{\nu\mu}||$ eine quadratische Matrix mit k Reihen darstellt und $T = ||t_\nu||$ eine Matrix mit einer einzigen Spalte. A bestimmt die Drehung, T die Translation. Die Bewegung X bezeichnen wir kurz durch[3])

$$X = (A\ ,\ T)\ . \tag{3}$$

$X_1 = (A_1, T_1)$ sei eine erste, $X_2 = (A_2, T_2)$ eine zweite Bewegung. Führen wir zuerst die Bewegung X_1 und dann die Bewegung X_2 aus, so gilt für die Zusammensetzung

$$X_2 X_1 = (A_2 A_1, A_2 T_1 + T_2)\ , \tag{4}$$

wie sich aus (1) leicht ergibt.

Bezeichnen wir die k-reihige Einheitsmatrix mit E, so ist $(E, 0)$ das Einheitselement der Bewegungsgruppe, wobei 0 eine Spalte von k Nullen darstellt. $(E, 0)$ bezeichnet die Ruhelage; $Z = (A, 0)$ stellt eine reine Drehung, $Y = (E, T)$ eine reine Translation dar.

Jede beliebige Bewegung $X = (A, T)$ kann dargestellt werden als

$$X = YZ\ ,$$

wobei Y nunmehr stets eine Translation und Z eine Drehung bezeichnen soll; denn aus (4) folgt:

$$(E\ ,\ T)\ (A\ ,\ 0) = (EA\ ,\ E0 + T) = (A\ ,\ T)\ .$$

[3]) Bezeichnung in Anlehnung an *J. J. Burckhardt*, Zur Theorie der Bewegungsgruppen. Comment. math. helv. 6, 159—184 (1933/34).

Die bekannte Tatsache, daß sowohl die Drehungen für sich als auch die Translationen für sich Untergruppen der Bewegungsgruppe $\mathfrak{X}$ bilden, findet ihren formelmäßigen Ausdruck im Bestehen der Relationen

$$(A_2, 0)\,(A_1, 0) = (A_2 A_1, 0)$$
$$(E\,, T_2)\,(E\,, T_1) = (E\,, T_2 + T_1)\ .$$

Die Untergruppe der Drehungen soll mit $\mathfrak{Z}$, diejenige der Translationen mit $\mathfrak{Y}$ bezeichnet werden.

Bildet man alle Translationen der Form

$$T_\varrho = \left\| \begin{matrix} t_1 \\ \vdots \\ t_\varrho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \text{und} \quad T_\varrho^* = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_{\varrho+1} \\ \vdots \\ t_k \end{matrix} \right\| ,$$

so bilden die Translationen T_ϱ eine Untergruppe $\mathfrak{T}_\varrho$ der Translationsgruppe $\mathfrak{Y}$. Führt man nämlich zwei Translationen der Form T_ϱ nacheinander aus, so entsteht wieder eine Translation dieser Form.

Dasselbe gilt für die Translationen T_ϱ^*.

Jede beliebige Translation T läßt sich eindeutig zerlegen in $T = T_\varrho\, T_\varrho^*$. Die Translationen T_ϱ^* führen alle Unterräume von G_ϱ einzeln in sich über.

Bewegungsmittelwerte

§ 3. Die Mittelwertsoperation für Funktionen über Bewegungsgruppen

Jedem Element X einer Bewegungsgruppe $\mathfrak{X}$ sei eindeutig eine reelle, nicht negative Zahl $F = F(X)$ zugeordnet.

Auf diese Weise wird eine Funktion $F(X)$ über der Bewegungsgruppe $\mathfrak{X}$ definiert. Wir betrachten insbesondere Mittelwerte derartiger Funktionen; diese könnten bei geeignet gewählter Parameterdarstellung der Gruppe als Integrale im Parameterraum dargestellt werden. Wir wählen aber einen andern Weg, bei dem die direkte Definition des Mittelwertes umgangen wird[4]).

---

[4]) Vgl. dazu: *H. Hadwiger*, Flächeninhalte und Kurvenlängen als geometrische Mittelwerte. Jahresbericht der D. M. V. 51, 212—218 (1941).

Der Mittelwert wird als Resultat eines auf Funktionen $F(X)$ einer bestimmten Menge $\mathfrak{M}$ ausgeübten Operators M aufgefaßt, symbolisch:

$$J = M_x\{F(X)\} \ .$$

Der Mittelwertsoperator M ordne jeder Funktion $F(X)$ des Definitionsgebietes $\mathfrak{M}$ eindeutig die reelle Zahl J zu, die wir Mittelwert der Funktion $F(X)$ nennen. Dieser Mittelwertsoperator soll die folgenden 5 Postulate erfüllen:

(I) Wenn $F(X) \subset \mathfrak{M}_x$ und $A \subset \mathfrak{X}$, $B \subset \mathfrak{X}$, so gilt $M_x\{F(AXB)\} = M_x\{F(X)\}$;
d. h. M ist *bewegungsinvariant.*

(II) Wenn $F(X) \subset \mathfrak{M}_x$, $G(X) \subset \mathfrak{M}_x$ und $F(X) + G(X) \subset \mathfrak{M}_x$, so gilt

$$M_x\{F(X) + G(X)\} = M_x\{F(X)\} + M_x\{G(X)\} \ ;$$

d. h. M ist *additiv.*

(III) Wenn $F(X) \subset \mathfrak{M}_x$, $G(X) \subset \mathfrak{M}_x$ und $F(X) \leqq G(X)$, so gilt

$$M_x\{F(X)\} \leqq M_x\{G(X)\} \ ;$$

d. h. M ist *monoton.*

(IV) Ist C eine beliebige reelle nicht negative Konstante, so gilt

$$F(X) \equiv C \subset \mathfrak{M}_x \quad \text{und} \quad M_x\{C\} = C \ ;$$

d. h. M ist *normiert.*

(V) Wenn jedes Element X der Bewegungsgruppe $\mathfrak{X}$ eindeutig zerlegt werden kann in $X = YZ$, mit $Y \subset \mathfrak{Y}$, $Z \subset \mathfrak{Z}$, wobei $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ Untergruppen von $\mathfrak{X}$ sind, und für festes Z $F(YZ) \subset \mathfrak{M}_y$, $M_y\{F(YZ)\} \subset \mathfrak{M}_z$, so gilt

$$F(X) \subset \mathfrak{M}_x \ ,$$

und

$$M_x\{F(X)\} = M_z\Big\{M_y\{F(YZ)\}\Big\} \ ;$$

d. h. M ist *zerlegbar.*

§ 4. Mittelbare Funktionen

Die Existenz der Mittelwertsoperation kann dadurch sichergestellt werden, daß über die Funktion $F(X)$ geeignete Voraussetzungen gemacht werden.

In Anlehnung an *J. v. Neumann*[5]) und *W. Maak*[6]) führen wir den Begriff der *Mittelbarkeit* in geeignet abgeänderter Form ein.

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ seien die Elemente einer geeignet gewählten, nicht von der Funktion abhängigen abzählbaren Teilmenge von $\mathfrak{X}$.

$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$ ist eine feste, von der Funktion unabhängige monotone Folge von natürlichen Zahlen.

Wir definieren nun:

Eine Funktion $F(X)$ über der Bewegungsgruppe $\mathfrak{X}$ heißt *mittelbar*, wenn eine reelle nicht negative Zahl J existiert, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 angegeben werden kann, so daß für alle $n > n_0$

$$\left| \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} F(AX_\nu B) - J \right| < \varepsilon$$

ausfällt für alle A, B aus $\mathfrak{X}$.

§ 5. Eindeutigkeit der Mittelwertsoperation für mittelbare Funktionen

Voraussetzung: $F(X)$ ist mittelbar.

Wir geben eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ vor. Wegen der Mittelbarkeit können wir immer endlich viele Elemente X_ν so wählen, daß für alle $n > n_0$

$$J - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} F(AX_\nu B) < J + \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{1}$$

Ferner können wir 2 Paare ganzer Zahlen p_1, q_1 und p_2, q_2 so wählen, daß

$$J - \varepsilon < \frac{p_1}{q_1} < J - \frac{\varepsilon}{2} \ ; \quad J + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{p_2}{q_2} < J + \varepsilon \ , \tag{2}$$

also

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} F(AX_\nu B) < \frac{p_2}{q_2} \ . \tag{3}$$

Durch Multiplikation von (3) mit $N_n q_1 q_2$ erhalten wir

$$N_n q_2 p_1 < q_1 q_2 \sum_{\nu=1}^{N_n} F(AX_\nu B) < N_n p_2 q_1 \ . \tag{4}$$

M_A sei irgend eine Mittelwertsoperation, die die Postulate I—V erfüllt.

---

[5]) *J. v. Neumann*, Almost periodic functions in a group I. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 445—492 (1934).

[6]) *W. Maak*, Integralgeometrie 18 (Grundlagen der ebenen Integralgeometrie). Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität 12, 1. Heft, 83—110 (1937).

M_A werde auf die Ungleichung (4) ausgeübt. Im Hinblick auf Postulat II gilt

$$M_A\{mF\} = M_A\{F + F + \cdots + F\} = mM_A\{F\} .$$

Wegen Postulat IV ist

$$M_A(N_n q_2 p_1) = N_n q_2 p_1 .$$

Berücksichtigen wir noch Postulat III, so erhalten wir

$$N_n q_2 p_1 < q_1 q_2 \sum_{\nu=1}^{N_n} M_A\{F(AX_\nu B)\} < N_n p_2 q_1 . \tag{5}$$

Wegen Postulat I gibt $M_A\{F(AX_\nu B)\}$ für alle X_ν denselben Wert $M_A\{F(A)\}$.

Aus (5) erhalten wir somit

$$N_n q_2 p_1 < q_1 q_2 N_n M_A\{F(A)\} < N_n p_2 q_1$$

oder

$$\frac{p_1}{q_1} < M_A\{F(A)\} < \frac{p_2}{q_2} . \tag{6}$$

Aus (2) und (6) folgt dann

$$J - \varepsilon < M_A\{F(A)\} < J + \varepsilon ;$$

$$|M_A\{F(A)\} - J| < \varepsilon . \tag{7}$$

Weil die Ungleichung (7) für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ richtig ist, folgt

$$M_x\{F(X)\} = J ;$$

d. h.: Wenn die Mittelwertsoperation existiert, ist sie eindeutig bestimmt.

§ 6. Existenz der Mittelwertsoperation für mittelbare Funktionen

Wir wollen nun nachweisen, daß der Operator M, der jeder mittelbaren Funktion den durch die Mittelbarkeitsbedingung eingeführten Wert

$$J = M_x\{F(X)\}$$

zuordnet, die Postulate I—V erfüllt.

1. Bewegungsinvarianz:

$F(X)$ sei mittelbar über der Gruppe $\mathfrak{X}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß für alle $n > n_0$ und $A, B \subset \mathfrak{X}$

$$\left| \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} F(AX_\nu B) - J \right| < \varepsilon$$

ausfällt. Wir betrachten nun die Funktion

$$F^*(X) = F(UXV) \ ,$$

wo U und V zwei feste Bewegungen aus $\mathfrak{X}$ sind. Mit $A', B' \subset \mathfrak{X}$ gilt

$$F^*(A'XB') = F^*(U^{-1}AXBV^{-1}) = F(AXB) \ ,$$

wenn für $A = UA'$ und $B = B'V$ gesetzt wird. Demzufolge erhalten wir

$$\left| \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} F^*(A'X_\nu B') - J \right| < \varepsilon$$

für alle $n > n_0$ und $A', B' \subset \mathfrak{X}$, d. h. mit $F(X)$ ist auch $F^*(X)$ mittelbar, und beiden Funktionen ist der gleiche Wert J zugeordnet.

2. Additivität:

$F_1(X)$ und $F_2(X)$ seien mittelbar über der Gruppe $\mathfrak{X}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß für $n > n_0$ und $A, B \subset \mathfrak{X}$

$$\left| \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} F_1(AX_\nu B) - J_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} F_2(AX_\nu B) - J_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Hieraus ergibt sich

$$\left| \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} [F_1(AX_\nu B) + F_2(AX_\nu B)] - [J_1 + J_2] \right| < \varepsilon \ ,$$

d.h. mit $F_1(X)$ und $F_2(X)$ ist auch $F_1(X) + F_2(X) = F(X)$ mittelbar, und für die zugewiesenen Werte J_1, J_2, J gilt $J_1 + J_2 = J$.

3. Monotonie:

$F_1(X)$ und $F_2(X)$ seien mittelbar über der Gruppe $\mathfrak{X}$. Es gelte für alle $X \subset \mathfrak{X}$

$$F_1(X) \leqq F_2(X) \ .$$

Wir zeigen, daß für die zugewiesenen Werte J_1 und J_2

$$J_1 \leqq J_2 \quad \text{gilt.}$$

Wir nehmen an, es wäre im Gegenteil

$$J_1 - J_2 = \varepsilon > 0 .$$

Es gibt ein n so, daß

$$\left| \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} F_1(X_\nu) - J_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} F_2(X_\nu) - J_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ausfällt. Hieraus folgert man

$$\left| \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=1}^{N_n} [F_2(X_\nu) - F_1(X_\nu)] + [J_1 - J_2] \right| < \varepsilon ,$$

oder

$$|\Delta + \varepsilon| < \varepsilon ,$$

also wegen $\Delta \geqq 0$ einen Widerspruch.

4. Normierung:

$F(X) = C$ ist über der Gruppe $\mathfrak{X}$ offenbar mittelbar, und für den zugewiesenen Wert J gilt

$$J = C .$$

5. Zerlegbarkeit:

Für $X \subset \mathfrak{X}$ gelte die eindeutige Zerlegung

$$X = YZ \qquad Y \subset \mathfrak{Y}, Z \subset \mathfrak{Z} ,$$

wobei $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ Untergruppen von $\mathfrak{X}$ sind.

$F(YZ)$ sei für jedes Z über $\mathfrak{Y}$ mittelbar,

$$M_y\{F(YZ)\} = J(Z) ;$$

ferner sei $J(Z)$ über $\mathfrak{Z}$ mittelbar,

$$M_z\{J(Z)\} = M_z\Big\{M_y\{F(YZ)\}\Big\} = J^* .$$

Wie soeben bewiesen wurde, sind M_y und M_z Operationen, für die die Postulate I bis IV gelten. Man verifiziert leicht, daß die Zusammensetzung $M_z M_y$ als Operation, die auf Grund der Zerlegung $X = YZ$ auf $F(X)$ anwendbar ist, die nämliche Eigenschaft aufweist. Das Resultat der Zusammensetzung kann als Mittelwertsoperation M^* gedeutet werden. Nach dem im vorstehenden Paragraphen bewiesenen Eindeutigkeitssatz, nach welchem die Einzigkeit eines solchen Operators sichergestellt ist, darf der Stern, der die spezielle Konstruktion des Operators andeutet, weggelassen werden. So ergibt sich

$$M_x\{F(X)\} = M_z\Big\{M_y\{F(YZ)\}\Big\} .$$

Bemerkung:

Die Definition der Mittelbarkeit stützte sich wesentlich auf eine nicht von den Funktionen abhängige abzählbare Teilmenge von Elementen der Gruppe sowie auf eine zugehörende monotone Folge natürlicher Zahlen. Es kann von einer *Basis* für die Mittelbarkeit gesprochen werden. Auf Grund der soeben erreichten Resultate ergibt sich im Hinblick auf den Eindeutigkeitssatz für Mittelwertsoperationen, für welche die Postulate I — IV Geltung haben, daß der sich aus der Definition der Mittelbarkeit ergebende Mittelwert von der Basis unabhängig ist. Eine Funktion kann in bezug auf verschiedene Basen mittelbar sein, der Mittelwert aber muß stets derselbe sein!

Jordanscher Bereich im Punktgitter

§ 7. Die Bedeckungszahl im Punktgitter

Gegeben sei ein k-dimensionaler Bereich $\mathfrak{B}$ vom Jordanschen Volumen V und das Punktgitter G_k des R_k (vgl. § 1).

Der Bereich $\mathfrak{B}$ bedeckt einen Punkt des Punktgitters G_k, wenn der Punkt zur Punktmenge $\mathfrak{B}$ gehört. Dabei kann es sich um einen innern Punkt oder um einen Randpunkt handeln. Bei der Vorgabe des Bereiches $\mathfrak{B}$ muß für jeden Randpunkt die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit zu $\mathfrak{B}$ entschieden werden.

Der Bereich $\mathfrak{B}$ werde im Punktgitter bewegt. $\mathfrak{B}_x$ sei der Bereich nach der Bewegung X, $\mathfrak{B}_y$ der Bereich nach der Translation Y. Die Zahl der von $\mathfrak{B}_x$ bedeckten Gitterpunkte bezeichnen wir mit $N(X)$; $N(Y)$ ist die Bedeckungszahl von $\mathfrak{B}_y$.

$N(X)$ bzw. $N(Y)$ sind Beispiele für Funktionen über der Bewegungsgruppe $\mathfrak{X}$ bzw. über der Untergruppe $\mathfrak{Y}$ der Translationen.

§ 8. Das Volumen als Translationsmittelwert

Auf die Bedeckungszahl $N(Y)$ des Bereiches $\mathfrak{B}_y$ üben wir die Mittelwertsoperation aus. Das Definitionsgebiet des Mittelwertoperators besteht aus der Menge $\mathfrak{M}$ aller auf diese Weise darstellbaren Funktionen sowie aus Konstanten. Zur Abkürzung setzen wir

$$M_y\{N(Y)\} = M(\mathfrak{B}) .$$

Die Postulate I—IV erfahren in diesem Falle folgende anschauliche Deutung:

(I) Wenn der Bereich $\mathfrak{B}$ durch eine Translation mit dem Bereich $\mathfrak{B}_0$ zur Deckung gebracht werden kann, so ist

$$M(\mathfrak{B}_0) = M(\mathfrak{B}) \; ;$$

d. h. der Mittelwert ist von der Anfangslage des Bereichs nicht abhängig.

(II) Wenn der Bereich $\mathfrak{B}$ in die beiden Teilbereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ zerlegt wird, so gilt

$$M(\mathfrak{B}) = M(\mathfrak{B}_1) + M(\mathfrak{B}_2) \, .$$

(III) Wenn $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$, d. h. wenn der Bereich $\mathfrak{B}_0$ im Bereich $\mathfrak{B}$ enthalten ist, so gilt

$$M(\mathfrak{B}_0) \leqq M(\mathfrak{B}) \, .$$

(IV) Wenn der Bereich $\mathfrak{B}$ nach jeder Translation genau C Gitterpunkte bedeckt, so ist

$$M(\mathfrak{B}) = C \, .$$

Es läßt sich nun zeigen, daß der Translationsmittelwert

$$M(\mathfrak{B}) = M_v\{N(Y)\}$$

stets gleich dem Jordanschen Volumen V des Bereiches $\mathfrak{B}$ ist.

$\mathfrak{W}_1$ sei der in § 1 erwähnte halbabgeschlossene Gitterwürfel mit dem Volumen $V(\mathfrak{W}_1) = 1$. Da er nach allen Translationen genau einen Gitterpunkt bedeckt, ist nach Postulat IV

$$M(\mathfrak{W}_1) = 1 = V(\mathfrak{W}_1) \, .$$

Zerlegen wir $\mathfrak{W}_1$ in n^k Würfel $\mathfrak{W}_n$ der Kantenlänge $\frac{1}{n}$, die alle durch Translation ineinander übergeführt werden können, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Postulate I und II, daß

$$M(\mathfrak{W}_n) = \frac{1}{n^k} = V(\mathfrak{W}_n) \qquad \text{ist.}$$

Ist $\mathfrak{B}^*$ ein Bereich, der sich in m derartige Würfel zerlegen läßt, so folgt nach Postulat II, daß

$$M(\mathfrak{B}^*) = \frac{m}{n^k} = V(\mathfrak{B}^*) \qquad \text{ist.}$$

Es sei nun $\mathfrak{B}$ ein beliebiger Bereich mit dem Jordanschen Volumen

$$V = V(\mathfrak{B}) .$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so lassen sich zu hinreichend groß gewähltem n stets zwei Bereiche $\mathfrak{B}_1^*$ und $\mathfrak{B}_2^*$ finden, die sich in lauter Würfel $\mathfrak{W}_n$ zerlegen lassen und noch folgende Eigenschaften haben:

$$\text{a)} \quad \mathfrak{B}_2^* \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_1^* ,$$
$$\text{b)} \quad V(\mathfrak{B}_1^*) - V(\mathfrak{B}_2^*) < \varepsilon .$$

Da nun nach Postulat III die Ungleichung

$$M(\mathfrak{B}_2^*) \leqq M(\mathfrak{B}) \leqq M(\mathfrak{B}_1^*)$$

gilt, so folgt

$$|M(\mathfrak{B}) - V(\mathfrak{B})| < \varepsilon ,$$

oder also

$$M(\mathfrak{B}) = M_y\{N(Y)\} = V(\mathfrak{B}) .$$

Satz 1. *Der Translationsmittelwert der Bedeckungszahlen eines k-dimensionalen Bereichs im Punktgitter des R_k ist gleich seinem Jordanschen Volumen*[7]*).*

§ 9. Das Volumen als Bewegungsmittelwert

Wir üben nun die Mittelwertsoperation M auf die Bedeckungszahlen $N(X)$ des Bereichs $\mathfrak{B}_x$ aus, wobei X die Elemente der Bewegungsgruppe $\mathfrak{X}$ darstellen. Das Definitionsgebiet des Mittelwertoperators besteht auch hier aus der Menge $\mathfrak{M}$ aller auf diese Weise darstellbaren Funktionen sowie aus Konstanten. Die Postulate I—IV erfahren eine ähnliche an-

---

[7]) *Für* $k = 2$:

H. Hadwiger, Flächeninhalte und Kurvenlängen als geometrische Mittelwerte. Jahresbericht der D. M. V. 51, 212—218 (1941).

Weitere Literatur:

H. Hadwiger, Über Mittelwerte im Figurengitter. Comment. math. helv. 11, 221—233 (1938/39).

H. Hadwiger, Über statistische Flächen- und Längenmessung. Mitt. der Naturf. Ges. Bern, 1938.

L. A. Santaló, Geometria Integral 31. Sobre valores medios y probabilidades geometricas. Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität 13, 284—294 (1939).

L. A. Santaló, Sur quelques problèmes des probabilités géométriques. Tôhoku Math. J. 47, 159—171 (1940).

L. A. Santaló, Geometria Integral de figuras ilimitadas. Publicaciones del instituto de matematicas, 1, No. 2, 5—58. Rosario 1939.

schauliche Deutung wie im vorhergehenden Paragraphen; nur ist überall die Translation durch eine beliebige Bewegung zu ersetzen.

Wir wollen nun zeigen, daß auch der Mittelwert über die Bedeckungszahlen $N(X)$ gleich dem Jordanschen Volumen des Bereiches $\mathfrak{B}$ ist.

Nach § 2 läßt sich jede Bewegung X eindeutig in eine Translation Y und eine Drehung Z zerlegen, wobei Y ein Element aus der Untergruppe $\mathfrak{Y}$ der Translationen und Z ein Element aus der Untergruppe $\mathfrak{Z}$ der Drehungen ist.

Mit Rücksicht auf Postulat V gilt dann

$$M_x\{N(X)\} = M_z\left\{M_y\{N(YZ)\}\right\}.$$

Für festes Z ist nach Satz 1

$$M_y\{N(YZ)\} = V\,,$$

und nach Postulat IV

$$M_z(V) = V\,.$$

Somit ist

$$M_x\{N(X)\} = V\,.$$

Satz 2. *Der Bewegungsmittelwert der Bedeckungszahlen eines k-dimensionalen Bereichs im Punktgitter des R_k ist gleich seinem Jordanschen Volumen.*

§ 10. Die Mittelbarkeit der Bedeckungszahl

Bis jetzt haben wir die Existenz der Mittelwertsoperation für Bedeckungszahlen stillschweigend vorausgesetzt. Im folgenden wollen wir nun nachweisen, daß $N(Y)$ mittelbar ist. Gelingt uns dies, so folgt nach (V) die Existenz der Mittelwertsoperation für $N(X)$, da jede Konstante mittelbar ist.

Zu diesem Zwecke errichten wir im Raume R_k das p-fach unterteilte Punktgitter, das wir mit $G_k^{(p)}$ bezeichnen. Jedem Gitterpunkt ist dann wiederum ein halboffener Gitterwürfel zugeordnet.

$N_p(Y)$ sei die Bedeckungszahl im p-fach unterteilten Punktgitter;

$U_p(Y)$ sei das Volumen aller Gitterwürfel von $G_k^{(p)}$, die Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$ enthalten;

$V_p(Y)$ sei das Volumen aller Gitterwürfel, die ganz im Bereiche liegen.

Dann gilt:

$$V_p(Y) \leqq V \leqq U_p(Y)\,. \tag{1}$$

Jedem der $N_p(Y)$ Gitterpunkte ist genau ein Würfel zugeordnet. Das Volumen dieses Würfelaggregates ist

$$\left(\frac{1}{p}\right)^k N_p(Y) \ .$$

Es ist nun

$$V_p(Y) \leqq \left(\frac{1}{p}\right)^k N_p(Y) \leqq U_p(Y) \ . \tag{2}$$

Um jeden Randpunkt des Bereiches $\mathfrak{B}$ legen wir eine Kugel vom Radius r und betrachten alle Punkte, die in solchen Randkugeln liegen. Die Gesamtheit dieser Punkte heiße die Umgebung des Randes. Das Volumen dieser Umgebung bezeichnen wir mit R_r. Offenbar gilt[8])

$$\lim_{r \to 0} R_r = 0 \ . \tag{3}$$

Wählen wir $r = \dfrac{\sqrt{k}}{p}$ (Diagonale eines Gitterwürfels), so gilt

$$U_p(Y) - V_p(Y) < R_{\frac{\sqrt{k}}{p}} \qquad \text{für alle } Y \ .$$

Wir erhalten somit

$$\left| \left(\frac{1}{p}\right)^k N_p(Y) - V \right| < R_{\frac{\sqrt{k}}{p}} \tag{4}$$

für alle Y.

Das p-fach unterteilte Gitter $G_k^{(p)}$ kann in $n_p = p^k$ normale Gitter zerlegt werden:

$$G_k^{(p)} = {}_1G_k + {}_2G_k + \cdots + {}_{n_p}G_k \ .$$

Diese Gitter gehen durch Translation auseinander hervor.

$T_\nu^{(p)}$ sei die Translation, die ${}_\nu G_k$ in G_k überführt, und $T_1^{(p)}$ sei die Identität.

${}_\nu N(Y)$ sei die Treffzahl des Bereiches $\mathfrak{B}_\nu$ mit ${}_\nu G_k$.

Es ist nun

$$N_p(Y) = {}_1N(Y) + {}_2N(Y) + \cdots + {}_{n_p}N(Y) \tag{5}$$

und

$${}_\nu N(Y) = N(Y T_\nu^{(p)}) \ . \tag{6}$$

---

[8]) Der hier betrachtete Grenzwert, der im Hinblick auf das monotone Verhalten der Funktion R_r mit abnehmendem r für beliebige beschränkte Punktmengen sicher vorhanden ist, stellt ein Volumen dar, das formal in die Reihe der *Minkowski*'schen Maßzahlen (vgl. *H. Minkowski*, Jahresbericht der D. M. V. 9, 115—121 [1901]) eingegliedert werden kann. Wie man ohne Mühe nachweist, fällt dieses Minkowskische Volumen mit dem äußern Jordanschen Volumen der Punktmenge zusammen und wird somit für die Randpunktmenge einer Jordan-meßbaren Menge nach einem bekannten Satz verschwinden.

Aus (3), (4), (5) und (6) folgt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ läßt sich ein Index p_0 so angeben, daß für alle $p > p_0$

$$\left| \frac{1}{n_p} \sum_{\nu=1}^{n_p} N(YT_\nu^{(p)}) - V \right| < \varepsilon$$

ausfällt für alle Y.

Zur Abkürzung setzen wir

$$\chi_p(Y) = \frac{1}{n_p} \sum_{\nu=1}^{n_p} N(YT_\nu^{(p)}) \; .$$

Die Funktionenfolge $\chi_p(Y)$, $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, konvergiert gleichmäßig gegen V.

Die Funktionen der Folge

$$\Psi_p(Y) = \frac{n_1 \chi_1(Y) + n_2 \chi_2(Y) + \cdots + n_p \chi_p(Y)}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} \; ,$$

$(p=1, 2, 3, \ldots)$, konvergieren dann auch gleichmäßig gegen V [9]) und wir erhalten:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ finden wir einen Index p_0 so, daß für alle $p > p_0$

$$\left| \frac{N(YT_1^{(1)}) + \cdots + N(YT_{n_1}^{(1)}) + N(YT_1^{(2)}) + \cdots + N(YT_{n_2}^{(2)}) + \cdots + N(YT_{n_p}^{(p)})}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} - V \right| < \varepsilon$$

ausfällt für alle Y.

Damit ist der Beweis für die Mittelbarkeit der Funktion $N(Y)$ erbracht. Die der Mittelbarkeit zugrunde liegende Basis besteht aus der Menge der in einer natürlichen Reihenfolge ausgezählten Gittertranslationen

$$T_1^{(1)} \ldots T_{n_1}^{(1)} \, , \; T_1^{(2)} \ldots T_{n_2}^{(2)} \, , \; T_1^{(3)} \ldots$$

in Verbindung mit der monotonen Folge

$$N_p = n_1 + n_2 + \cdots + n_p \; ^{10)} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \; .$$

[9]) Für festes Y liegt eine bekannte Relation in bezug auf Mittelbildung vor. Vgl. *G. Pólya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, Berlin 1925, S. 11, Nr. 72.

Bei Anwendung dieses Theorems im vorliegenden Fall ist noch wesentlich, daß

$$\lim_{p \to \infty} \frac{n_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = 0 \quad \text{gilt.}$$

[10]) Es ist

$$N_p = 1^k + 2^k + \cdots + p^k = \frac{B_{1+k}(1+p) - B_{1+k}(0)}{1+k} \; ,$$

wo $B_\nu(x)$ das ν-te Bernoullische Polynom bezeichnet.

§ 11. Der Satz von Blichfeldt

Satz 1 enthält eine spezielle Fassung eines bekannten Satzes von *H. F. Blichfeldt*[11]) als einfache Konsequenz.

Dieser Satz läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Ein Bereich vom Jordanschen Volumen V kann durch eine Translation immer in eine solche Lage gebracht werden, daß die Zahl der von ihm bedeckten Gitterpunkte nicht kleiner ist als V.

Da nicht alle Bedeckungszahlen kleiner als der Mittelwert sein können, folgt der Blichfeldtsche Satz ohne weiteres aus Satz 1[12]).

Konvexe Körper und Quermaßintegrale

§ 12. Der konvexe Körper

Eine *Punktmenge* heißt *konvex*, wenn sie mit zwei Punkten stets deren Verbindungsstrecke enthält. Eine abgeschlossene beschränkte konvexe Menge heißt *konvexer Körper*[13]).

Jeder konvexe Körper besitzt ein Volumen im Jordanschen Sinne[14]).

§ 13. Quermaße und ihre Drehmittelwerte

Es sei $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper des R_k. R_ϱ sei ein ϱ-dimensionaler Unterraum ($\varrho = 1, 2, \ldots, k-1$).

---

[11]) *H. F. Blichfeldt,* A new principle in the geometrie of numbers with some applications. Trans. Amer. Math. Soc. 15, 227—235 (1914).

Ein kurzer Beweis findet sich bei *W. Scherrer,* Ein Satz über Gitter und Volumen. Math. Ann. 86, 106—107 (1922).

[12]) Im zweidimensionalen Fall hat *H. Hadwiger* (Über Mittelwerte im Figurengitter. Comment. math. helv. 11, 221—233, 1938/39), schon auf diesen Zusammenhang hingewiesen.

Vgl. dazu auch *L. A. Santaló,* Geometria Integral de figuras ilimitadas. Publicaciones del instituto de matematicas, 1, No. 2, 5—58. Rosario 1939, S. 51—53.

Über gewisse Verfeinerungen im Zusammenhang mit einer Fragestellung von *L. A. Santaló* vgl. noch *H. Hadwiger,* Bemerkungen über Gitter und Volumen. Mathematica (Cluj) Vol. XVIII, 97—103 (1942).

[13]) Über konvexe Mengen und Körper siehe die Abhandlung von *T. Bonnesen* und *W. Fenchel,* Theorie der konvexen Körper. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete. Berlin, J. Springer (1934).

[14]) Über die Existenz des Volumens eines konvexen Körpers sehe man: *H. Minkowski,* Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. Ges. Abh. Bd. 2, 131—229, Leipzig und Berlin (1911).

W. Blaschke, Kreis und Kugel, § 17, Leipzig (1916).

Projiziert man den Körper $\mathfrak{K}$ senkrecht auf R_ϱ, so entsteht im R_ϱ ein konvexer Körper $\mathfrak{K}_\varrho$, dessen ϱ-dimensionales Volumen V_ϱ als ein *ϱ-dimensionales Quermaß* von $\mathfrak{K}$ bezeichnet wird.

Ist $R_\sigma (\sigma < \varrho)$ ein im R_ϱ liegender Unterraum, so sind die σ-dimensionalen Quermaße von $\mathfrak{K}_\varrho$ zugleich σ-dimensionale Quermaße von $\mathfrak{K}$[15]).

Projizieren wir den Körper $\mathfrak{K}$ auf einen festen Unterraum R_ϱ, so ändert sich das Quermaß V_ϱ bei einer Translation des Körpers nicht. V_ϱ kann als Funktion über der Drehgruppe dargestellt werden.

Wir beweisen nun, daß die Funktion $V_\varrho(Z)$ für $\varrho = k - 1$ über der Drehgruppe mittelbar ist.

Dem konvexen Körper $\mathfrak{K}$ wird eine Einheitskugel eingelagert und der Körper um den Mittelpunkt der Kugel gedreht. Das Quermaß V_ϱ wird dann zur Funktion dieser Drehungen:

$$V_\varrho = V_\varrho(Z) .$$

Jeder Drehung Z des Körpers wird nun der Punkt P der Kugeloberfläche eindeutig zugeordnet, der Durchstoßpunkt des vom Kugelmittelpunkt O auf den Unterraum R_ϱ gefällten Lotes mit der mitgedrehten Kugeloberfläche ist. Bei einer Drehung um das Lot OP ändert sich das Quermaß V_ϱ nicht.

Auf diese Weise wird über der Kugeloberfläche die Funktion $V_\varrho(P)$ durch

$$V_\varrho(P) = V_\varrho(Z) \qquad \text{definiert.}$$

Das mittlere ϱ-dimensionale Quermaß läßt sich nun als Integralmittelwert auf der Kugel darstellen:

$$J_\varrho = \frac{1}{\omega_k} \oint V_\varrho(P)\, d\omega \ ,$$

wobei $\omega_k = \dfrac{2\,\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}$ die Oberfläche der k-dimensionalen Einheitskugel ist, und $d\omega$ das Oberflächenelement auf der Einheitskugel darstellt.

Die Kugeloberfläche teilen wir nun in zwei gleiche Teile ein, die wir mit $\Delta_1\omega$ und $\Delta_2\omega$ bezeichnen. Jede Hälfte wird sodann wieder halbiert, und die so entstehenden 4 Zellen werden fortlaufend numeriert: $\Delta_3\omega$, $\Delta_4\omega$,

---

[15]) *T. Bonnesen* und *W. Fenchel*, a. a. O., Seite 45—46.

$\Delta_5\omega$, $\Delta_6\omega$. Dieser Teilungsprozeß wird ohne Ende weitergeführt und zwar so, daß die Durchmesser[16]) $d_1, d_2, d_3, \ldots$ eine Nullfolge bilden.

In der abgeschlossenen Zelle $\Delta_\nu\omega$ wählen wir irgend einen Punkt P_ν und erhalten so eine Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots$.

Φ sei eine im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbare Funktion auf der Kugeloberfläche ω_k. Dann hat die Punktfolge die Eigenschaft, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N so angegeben werden kann, daß für alle $n > N$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \Phi(P_\nu) - J \right| < \varepsilon$$

ausfällt, wobei

$$J = \frac{1}{\omega_k} \oint \Phi(P)\, d\omega \qquad \text{ist.}$$

A und B seien nun zwei beliebig gewählte Drehungen. Wir betrachten die Funktion

$$V_\varrho^*(P) = V_\varrho^*(Z) = V_\varrho(AZB) \ ,$$

wo $V_\varrho(Z)$ die weiter oben definierte Funktion über der Drehgruppe ist.

Es bezeichne nun weiter $M_\nu(A,B)$ bzw. $m_\nu(A, B)$ das Maximum bzw. das Minimum, das von der Funktion $V_\varrho^*(P)$ in der Zelle $\Delta_\nu\omega$ angenommen wird. M_ν und m_ν sind im Hinblick auf die Stetigkeit der Funktion $V_\varrho^*(Z)$ von A und B stetig abhängig.

Ist P_ν der oben gewählte Punkt der Zelle $\Delta_\nu\omega$, und wird die Drehung Z_ν so gewählt, daß $V_\varrho^*(P_\nu) = V_\varrho^*(Z_\nu)$ ist, so gilt

$$m_\nu(A, B) \leqq V_\varrho(AZ_\nu B) \leqq M_\nu(A, B) \ . \tag{α}$$

Zur Abkürzung führen wir ein:

$$\chi_n(A\ , B) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(A\ , B) \ ,$$

$$\Psi_n(A\ , B) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(A\ , B) \ .$$

Bei festem A, B läßt sich nun zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein N so finden, daß für alle $n > N$

$$| \chi_n(A, B) - J_\varrho | < \varepsilon \ ,$$

$$| \Psi_n(A, B) - J_\varrho | < \varepsilon \ .$$

χ_n und Ψ_n sind als Funktionen von A und B stetig.

---

[16]) Unter dem Durchmesser einer Zelle verstehen wir wie üblich die maximale Distanz zweier Punkte der Zelle.

Infolge der fortschreitenden Zweiteilung der Zellen gilt:

$$\left.\begin{aligned} \chi_{\lambda_{s+1}} &\leqq \chi_{\lambda_s} \\ \Psi_{\lambda_{s+1}} &\geqq \Psi_{\lambda_s} \end{aligned}\right\} \lambda_s = 2(2^s - 1) \ .$$

Die Funktionen χ_{λ_s} und Ψ_{λ_s} mit $s = 1, 2, 3, \ldots$ bilden eine monotone, konvergente Folge stetiger Funktionen, die gegen die stetige Grenzfunktion J_ϱ konvergiert.

Nach dem Satz von *Dini*[17]) ist diese Konvergenz gleichmäßig, d. h.: Zu jedem $\varepsilon > 0$ läßt sich ein Index S so angeben, daß für alle $s > S$

$$\left.\begin{aligned} |\ \chi_{\lambda_s}(A\ ,\ B) - J_\varrho\ | &< \varepsilon \\ |\ \Psi_{\lambda_s}(A\ ,\ B) - J_\varrho\ | &< \varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

ist für alle A, B.

Aus (α) gewinnt man

$$\Psi_{\lambda_s}(A\ ,\ B) \leqq \frac{1}{\lambda_s} \sum_{\nu=1}^{\lambda_s} V_\varrho(A Z_\nu B) \leqq \chi_{\lambda_s}(A\ ,\ B) \qquad (\gamma)$$

und mit Rücksicht auf (β) und (γ) schließen wir:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ läßt sich ein Index S so angeben, daß für alle $s > S$ und alle A, B der Drehgruppe

$$\left| \frac{1}{\lambda_s} \sum_{\nu=1}^{\lambda_s} V_\varrho(A Z_\nu B) - J_\varrho \right| < \varepsilon$$

ausfällt. Der Nachweis der Mittelbarkeit von $V_\varrho(Z)$ für $\varrho < k - 1$ kann nun induktiv geschehen, indem man das Quermaß V_ϱ als ϱ-dimensionales Quermaß des $(k-1)$-dimensionalen Körpers darstellt, den man durch Projektion des ursprünglichen Körpers im R_k auf einen R_{k-1} erhält. Allgemein gilt also:

Das Quermaß V_ϱ eines konvexen Körpers ist mittelbar über der Drehgruppe.

§ 14. Quermaßintegrale und die Formel von J. Steiner

a) Linearkombination zweier konvexer Körper; gemischte Volumina.

$\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ seien zwei k-dimensionale konvexe Körper. $\mathfrak{x}_1$ bzw. $\mathfrak{x}_2$ bezeichne den Vektor, der vom Koordinatenursprung O zu einem willkürlichen Punkt des Körpers $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ führt. Sind λ_1 und λ_2 feste nicht-

[17]) Vgl. *R. Courant*, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Berlin 1931, S. 89—90.

negative Zahlen, so durchläuft der Endpunkt des von O aufgetragenen Vektors $\lambda_1 \mathfrak{x}_1 + \lambda_2 \mathfrak{x}_2$ wieder einen konvexen Körper $\mathfrak{L}$, falls die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ unabhängig voneinander die Körper $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ durchlaufen. Man schreibt dann

$$\mathfrak{L} = \lambda_1 \mathfrak{K}_1 + \lambda_2 \mathfrak{K}_2 \, .$$

Das Volumen des Körpers $\mathfrak{L}$ ist ein homogenes Polynom k-ten Grades der Parameter λ_1 und λ_2:

$$V(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 + \lambda_2 \mathfrak{K}_2) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \lambda_1^{k-\nu} \lambda_2^{\nu} \cdot V_\nu(\mathfrak{K}_1 , \mathfrak{K}_2) \quad . \tag{1}$$

Die Koeffizienten $V_\nu(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ sind nur von den Körpern $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ abhängig und werden als *gemischte Volumina* bezeichnet[18]).

Dabei ist $V_0(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ gleich dem Volumen $V(\mathfrak{K}_1)$ des ersten Körpers und $V_k(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2) = V(\mathfrak{K}_2)$.

b) Der Parallelkörper eines konvexen Körpers und sein Volumen.

Im folgenden bezeichne $\mathfrak{S}$ stets die Einheitskugel des k-dimensionalen Raumes.

Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger konvexer Körper, so heißt der Körper

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{K} + r\mathfrak{S} \qquad (r \geqq 0)$$

der Parallelkörper von $\mathfrak{K}$ im Abstand r. Der Parallelkörper $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}$ im Abstand r besteht aus allen Punkten, deren Entfernung von $\mathfrak{K}$ nicht größer als r ist. Das Volumen des Parallelkörpers läßt sich nach Formel (1) durch die gemischten Volumina ausdrücken[19]):

$$V(\mathfrak{K} + r\mathfrak{S}) = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} r^\lambda \cdot V_\lambda(\mathfrak{K} , \mathfrak{S}) \quad . \tag{2}$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$V_\lambda(\mathfrak{K}, \mathfrak{S}) = W_\lambda \, .$$

---

[18]) Vgl. *T. Bonnesen* und *W. Fenchel*, a. a. O., 29—30, 38—43.
Über das Volumen in linearen Scharen konvexer Polyeder und Körper vgl.:
H. Minkowski, a. a. O., vor allem § 20—22. Dort findet sich auch eine geometrische Interpretation für die gemischten Volumina konvexer Polyeder.

[19]) Für $k = 2, 3$ wurde diese Formel schon von Steiner gefunden: *J. Steiner*, Über parallele Flächen. Monatsber. Preuß. Akad. Wiss. (1840), 114—118; Ges. Werke, Bd. II, 173—176.

Die Größe W_λ wird das *λ-te Quermaßintegral* genannt. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} W_0 &= V_0(\mathfrak{K}, \mathfrak{S}) \text{ das Volumen von } \mathfrak{K}, \\ k W_1 &= k \cdot V_1(\mathfrak{K}, \mathfrak{S}) \text{ die Oberfläche von } \mathfrak{K}, \\ W_k &= V_k(\mathfrak{K}, \mathfrak{S}) \text{ das Volumen } \kappa_k \text{ der Einheitskugel.} \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen für die Quermaßintegrale läßt sich die Steinersche Formel wie folgt schreiben:

$$\boxed{V(\mathfrak{K} + r\mathfrak{S}) = W_0 + \binom{k}{1} W_1 r + \binom{k}{2} W_2 r^2 + \cdots + W_k r^k} \quad . \tag{3}$$

c) Das Quermaßintegral $W_\lambda(\mathfrak{K})$.

Bezeichnet man das $(\lambda - 1)$-te Quermaßintegral der Projektion $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ auf eine Hyperebene mit $W'_{\lambda-1}(\mathfrak{K})$, so gilt für das λ-te Quermaßintegral die Formel von *Kubota* [20]:

$$\boxed{W_\lambda(\mathfrak{K}) = \frac{1}{k \cdot \kappa_{k-1}} \oint W'_{\lambda-1}(\mathfrak{K})\, d\omega} \quad , \tag{4}$$

wobei

$$\kappa_{k-1} = \frac{\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} = \text{Volumen der } (k-1)\text{-dim. Einheitskugel,}$$

$$\omega_k = k \cdot \kappa_k = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} = \text{Oberfläche der } k\text{-dim. Einheitskugel,}$$

$d\omega$ = Oberflächenelement der k-dimensionalen Einheitskugel.

Die Kubotasche Formel besagt: Das λ-te Quermaßintegral eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ ist gleich dem $\frac{\kappa_k}{\kappa_{k-1}}$-fachen Mittelwert der $(\lambda - 1)$-ten Quermaßintegrale seiner Orthogonalprojektionen auf $(\lambda - 1)$-dimensionale Unterräume.

Die Projektion $\mathfrak{K}'$ des Körpers $\mathfrak{K}$ auf einen $(k - 1)$-dimensionalen Unterraum ist ein $(k - 1)$-dimensionaler konvexer Körper. Somit läßt

---

[20]) *T. Kubota*, Über konvex geschlossene Mannigfaltigkeiten. Sci. Rep. Tôhoku Univ., Bd. 14, 85—99 (1925). Kubota bezeichnet dort die Quermaßintegrale als Mittelvolumina.

sich auf ihn Formel (4) wieder anwenden, wobei λ durch $\lambda - 1$ und k durch $k - 1$ ersetzt wird. Zudem ist eine $(k - 2)$-dimensionale Projektion $(\mathfrak{K}')'$ von $\mathfrak{K}'$ gleich der $(k - 2)$-dimensionalen Projektion $\mathfrak{K}_{k-2}$ des Körpers $\mathfrak{K}$ selbst auf denselben $(k - 2)$-dimensionalen Unterraum.

Eine einfache Rechnung ergibt, daß W_λ der $\frac{\kappa_k}{\kappa_{k-2}}$-fache Mittelwert der $(\lambda - 2)$-ten Quermaßintegrale der Projektionen $\mathfrak{K}_{k-2}$ ist. Diese lassen sich durch die $(\lambda - 3)$-ten Quermaßintegrale der Projektionen $\mathfrak{K}_{k-3}$ ausdrücken usw. Schließlich gelangen wir zu den 0-ten Quermaßintegralen von Projektionen auf $(k - \lambda)$-dimensionale Unterräume, also zu den $(k - \lambda)$-dimensionalen Quermaßen von $\mathfrak{K}$ und wir erhalten:

$$\boxed{W_\lambda = \frac{\kappa_k}{\kappa_{k-\lambda}} J_{k-\lambda}} \quad . \tag{5}$$

Das λ-te Quermaßintegral eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ ist gleich dem $\frac{\kappa_k}{\kappa_{k-\lambda}}$-fachen Mittelwert der $(k - \lambda)$-dimensionalen Quermaße von $\mathfrak{K}$.

Für $\lambda = 1$ erhalten wir als Spezialfall die Oberflächenformel von *Cauchy:*

$$\boxed{O(\mathfrak{K}) = \frac{\omega_k}{\kappa_{k-1}} J_{k-1}} \quad . \tag{6}$$

In Worten: *Die Oberfläche eines konvexen Körpers ist gleich dem $\frac{\omega_k}{\kappa_{k-1}}$-fachen Mittelwert seiner $(k - 1)$-dimensionalen Quermaße.*

Bewegungsmittelwerte konvexer Körper in Unterraumgittern

§ 15. Der Mittelwertssatz für Bewegung im Unterraumgitter

Im Raume R_k sei das in § 1 eingeführte Unterraumgitter G_ϱ aufgespannt. Der konvexe Körper $\mathfrak{K}$ führe eine Bewegung X der Bewegungsgruppe $\mathfrak{X}$ aus. Die Zahl der von ihm nach der Bewegung X getroffenen Unterräume des Gitters bezeichnen wir mit $N_\varrho(X)$.

Auf diese Bedeckungszahlen üben wir die Mittelwertsoperation M aus. Das Definitionsgebiet des Mittelwertsoperators besteht aus der Menge $\mathfrak{M}$ aller auf diese Weise darstellbaren Funktionen sowie aus Konstanten.

Da sich jede Bewegung X eindeutig in eine Translation Y und eine Drehung Z zerlegen läßt, gilt nach Postulat V:

$$M_x\{N_\varrho(X)\} = M_z\{M_y[N_\varrho(ZY)]\} \, .$$

Die Translation Y läßt sich nach § 2 eindeutig zerlegen in $Y = Y_\varrho \cdot Y_\varrho^*$. Also gilt:

$$M_z\{M_y[N_\varrho(ZY)]\} = M_z\Big\{M_{y_\varrho}[M_{y_\varrho}^*\{N_\varrho(ZY_\varrho Y_\varrho^*)\}]\Big\} \, .$$

Die Translationen Y_ϱ^* führen alle Unterräume von G_ϱ einzeln in sich über. Bei einer solchen Translation ändert sich die Treffzahl N_ϱ nicht. Somit ist nach Postulat IV auch ihr Mittelwert eine Konstante und wir erhalten:

$$M_z\Big\{M_{y_\varrho}[M_{y_\varrho}^*\{N_\varrho(ZY_\varrho Y_\varrho^*)\}]\Big\} = M_z\{M_{y_\varrho}[N_\varrho(ZY_\varrho)]\} \, .$$

Die Treffzahl des Körpers $\mathfrak{K}$ mit den $(k-\varrho)$-dimensionalen Unterräumen des Gitters G_ϱ ist gleich der Treffzahl seiner Projektion $\mathfrak{K}_\varrho$ mit dem Punktgitter des Unterraumes R_ϱ, der auf dem Gitter G_ϱ senkrecht steht. Die Projektion $\mathfrak{K}_\varrho$ ist selbst wieder ein konvexer Körper.

Übt man auf den Körper $\mathfrak{K}$ alle Translationen der Form Y_ϱ aus, so führt die Projektion zu Y_ϱ parallele Translationen aus. Das sind alle im R_ϱ möglichen Translationen.

Der Mittelwert $M_{y_\varrho}\{N_\varrho(ZY_\varrho)\}$ ist somit nach Satz 1 gleich dem ϱ-dimensionalen Volumen der Projektion $\mathfrak{K}_\varrho$, also gleich dem ϱ-dimensionalen Quermaß V_ϱ des Körpers $\mathfrak{K}$ und wir erhalten:

$$\boxed{M_x\{N_\varrho(X)\} = M_z\{V_\varrho\} = J_\varrho \, .}$$

Satz 3. *Der Bewegungsmittelwert der Treffzahlen eines konvexen Körpers mit dem Unterraumgitter G_ϱ ist gleich dem Mittelwert seiner ϱ-dimensionalen Quermaße.*

Da nach § 14 das Quermaßintegral

$$W_\lambda = \frac{\kappa_k}{\kappa_{k-\lambda}} \, J_{k-\lambda}$$

ist, folgt:

Satz 4. *Das Quermaßintegral W_λ eines konvexen Körpers ist gleich dem $\frac{\kappa_k}{\kappa_{k-\lambda}}$-fachen Bewegungsmittelwert der Treffzahlen des Körpers im Unterraumgitter $G_{k-\lambda}$.*

Setzen wir speziell $\lambda = 0$, so erhalten wir:

Satz 5. *Das Quermaßintegral W_0 (= Volumen) eines konvexen Körpers ist gleich dem Bewegungsmittelwert der Treffzahlen des Körpers im Punktgitter G_k.*

Da nach der Formel von *Cauchy* (§ 14) die Oberfläche

$$O = \frac{\omega_k}{\kappa_{k-1}} J_{k-1}$$

ist, folgt:

Satz 6. *Die Oberfläche eines konvexen Körpers ist gleich dem $\frac{\omega_k}{\kappa_{k-1}}$-fachen Bewegungsmittelwert der Treffzahlen des Körpers im Geradengitter G_{k-1}.*

Die Formel von *J. Steiner* für das Volumen des Parallelkörpers $\mathfrak{K}+r\mathfrak{S}$ eines Körpers $\mathfrak{K}$ läßt sich ebenfalls mit Hilfe der Bewegungsmittelwerte der Treffzahlen des Körpers $\mathfrak{K}$ mit den Unterraumgittern darstellen:

$$\boxed{V(\mathfrak{K} + r\,\mathfrak{S}) = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} \frac{\kappa_k}{\kappa_{k-\lambda}} J_{k-\lambda}\, r^\lambda} \; .$$

(Eingegangen den 18. Juni 1942.)