Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Sur un théorème fondamental de la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles.

Autor: Ostrowski, Alexandre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14886

Sur un théorème fondamental de la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles

Par ALEXANDRE OSTROWSKI à Bâle

1. Soient $A_\nu(x_1, \ldots, x_n)$, $B_\nu(x_1, \ldots, x_n)$, $\nu = 1, \ldots, n$, $2n$ fonctions des $x_1, \ldots, x_n$, continues et douées des dérivées continues du premier ordre au voisinage d'un point $P_0(a_1, \ldots, a_n)$.

Si une fonction $z(x_1, \ldots, x_n)$ continue et douée des dérivées continues du premier et du second ordre au voisinage de P_0, satisfait dans ce voisinage aux deux équations

$$X(z) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0 \ , \quad Y(z) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0 \ , \tag{1}$$

elle satisfait aussi au voisinage de P_0 à l'équation

$$Z(z) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0 \ , \ C_\nu = X(B_\nu) - Y(A_\nu) \ , \ \nu = 1, \ldots, n \ . \tag{2}$$

Ceci résulte évidemment de l'identité

$$Z(u) = X(Y(u)) - Y(X(u)) \tag{3}$$

qu'on vérifie immédiatement au voisinage de P_0 pour chaque fonction $u(x_1, \ldots, x_n)$ dont les dérivées premières et secondes restent continues dans ce voisinage.

Ce n'est que tout récemment (1939) que M. *E. Schmidt*[1]) a réussi à démontrer que (2) est encore une conséquence de (1), si l'on suppose seulement que z possède des dérivées continues du *premier* ordre dans le voisinage de P_0. La démonstration de M. *Schmidt* repose sur une transformation assez délicate des intégrales n-ples et permet aussi une extension de la relation (3) au cas où $X(u)$, $Y(u)$ possèdent les dérivées continues du premier ordre.

Une autre démonstration donnée peu de temps après (1940) par M. *O. Perron*[2]) est plus „algébrique", mais encore assez compliquée.

---

[1]) *E. Schmidt,* Bemerkungen zum Fundamentalsatz der Theorie der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 48 (1940), pp. 426—432.

[2]) *O. Perron,* Das Verschwinden der Klammersymbole in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungssysteme. Math. Annalen, Bd. 117 (1940/41), pp. 686—693.

Dans ce qui suit, nous donnons une démonstration très simple et très élémentaire d'un théorème un peu plus général que celui de M. *Schmidt*. Cette démonstration n'emploie que les notions élémentaires du calcul différentiel, en particulier celle de la différentielle totale.

2. On dit qu'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ possède une *différentielle totale*[3]) à l'origine $P_0(0, \ldots, 0)$ si l'on a au voisinage de P_0

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu + o(r) \quad , \quad r = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \ , \qquad (4)$$

pour $r \to 0$, où $\alpha_\nu = f'_{x_\nu}(0, \ldots, 0)$ sont des constantes.

Nous aurons besoin de quelques lemmes sur les différentielles totales:

a) *Par une homographie régulière*

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\, y_\mu \ , \ y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a'_{\nu\mu}\, x_\mu \ , \quad \nu = 1, \ldots, n \ , \qquad (5)$$

une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ douée d'une différentielle totale en P_0 se transforme en une fonction $g(y_1, \ldots, y_n)$ y possédant une différentielle totale, et l'on a en P_0

$$\left[\frac{\partial g}{\partial y_\nu}\right]_{P_0} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} \left[\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\right]_{P_0} \ . \qquad (6)$$

On démontre a) en remplaçant les x_ν dans (4) par

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\, y_\mu \ .$$

b) *Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ s'annule en P_0 et y possède une différentielle totale, et si $g(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction continue en P_0, fg possède une différentielle totale en P_0, et l'on a*

$$\left[\frac{\partial (fg)}{\partial x_\nu}\right]_{P_0} = g_0 \left[\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right]_{P_0} \ , \ g_0 = g(0, \ldots, 0) \ . \qquad (7)$$

En effet, en posant $g(x_1, \ldots, x_n) = g_0 + \sigma(x_1, \ldots, x_n)$, où $\sigma(x_1, \ldots, x_n) \to 0$ avec $r = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|$, on obtient, en multipliant (4) par g

[3]) Cf. par exemple: *De la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse Infinitésimal, t. 1, 3ème éd., 1914, pp. 140—146. — *I. W. Hobson*, The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series, vol. 1, 3rd ed. (1927), p. 419. — *O. Haupt* und *G. Aumann*, Differential- und Integralrechnung, Bd. 2 (1938), pp. 111—125.

$$fg = \sum_{\nu=1}^{n} g_0 \alpha_\nu x_\nu + o(r) \ . \tag{8}$$

c) *Soit* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *continue au voisinage de* P_0. *Si* $\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}, \frac{\partial f}{\partial x_\kappa}, (\kappa \neq \lambda)$ *existent au voisinage de* P_0 *et possèdent des différentielles totales en* P_0, *on a en* P_0

$$\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\kappa}\right) \ . \tag{9}$$

On trouve une démonstration, d'ailleurs très simple, de ce théorème dû à M. *W. H. Young*, dans les traités d'analyse[4]).

3. Voici l'énoncé exact de notre résultat:

Théorème. Soient A_ν, B_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, $2n$ *fonctions de* $x_1, \ldots, x_n$, *continues dans le voisinage d'un point* P_0 $(a_1, \ldots, a_n)$ *et douées des différentielles totales en* P_0. *Soit* u *une fonction de* $x_1, \ldots, x_n$ *continue et douée des dérivées continues du premier ordre au voisinage de* P_0. *Alors, si les expressions*

$$X(u) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ , \quad Y(u) = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \tag{10}$$

possèdent au point P_0 *des différentielles totales, on a en* P_0

$$Z(u) = X(Y(u)) - Y(X(u)) \ , \tag{11}$$

où $Z(u)$ *est donné par*

$$Z(u) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ , \quad C_\nu = X(B_\nu) - Y(A_\nu) \ . \tag{12}$$

Dans la démonstration, on peut supposer que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

4. *Démonstration du théorème.* Posons

$$\left.\begin{array}{ll} A_\nu^0 = A_\nu(0, \ldots, 0) \ , & B_\nu^0 = B_\nu(0, \ldots, 0) \\ A_\nu^* = A_\nu - A_\nu^0 \ , & B_\nu^* = B_\nu - B_\nu^0 \end{array}\right\} \nu = 1, \ldots, n \ . \tag{13}$$

D'après l'hypothèse du théorème et le lemme b) du numéro 2, les expressions

[4]) Cf. *De la Vallée Poussin*, l. c., pp. 145—146. — *Hobson*, l. c. pp. 427—428. — *Haupt* und *Aumann*, l. c., p. 125. Nous donnons un résultat plus général dans une communication: Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales, qui paraît dans ce volume p. 222.

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad , \qquad \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \tag{14}$$

possèdent des différentielles totales en P_0 et l'on a dans ce point

$$X\left[\sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right] = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial B_\nu^*}{\partial x_\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu}\right] \frac{\partial u}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} X(B_\nu) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ .$$

De même, on a en P_0

$$Y\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} Y(A_\nu) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ .$$

Donc, on obtient, en retranchant et en utilisant (12), en P_0

$$X\left(\sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) - Y\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ . \tag{15}$$

De l'autre côté, puisque les expressions (10) et (14) possèdent en P_0 des différentielles totales, il en est de même, d'après (13), des expressions

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ , \quad \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ . \tag{16}$$

Il suffit maintenant de démontrer que l'on ait, en P_0, la relation

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\mu=1}^{n} B_\mu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\mu} - \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = 0 \ , \tag{17}$$

pour en déduire, en y ajoutant (15), la relation (11).

5. Or, si les deux systèmes A_ν^0, B_ν^0 sont proportionnels, (17) est évident. Si ces deux systèmes ne sont pas proportionnels, posons pour $\nu = 1, \ldots, n$:

$$x_\nu = A_\nu^0 y_1 + B_\nu^0 y_2 + \sum_{\mu=3}^{n} a_{\nu\mu} y_\mu \ , \tag{18}$$

en choisissant les constantes $a_{\nu\mu}$ de façon que la transformation (18) soit une homographie non-singulière.

On obtient alors par la relation (6) du lemme a) du numéro 2, en désignant par v la transformée de u:

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\;, \quad \frac{\partial v}{\partial y_2} = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\;,$$

et ces deux expressions possèdent avec les expressions (16) des différentielles totales en P_0. On a donc en P_0, en appliquant (6) à $\frac{\partial v}{\partial y_2}$ et à $\frac{\partial v}{\partial y_1}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right), \quad \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right),$$

et la relation (17) devient

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \tag{19}$$

et résulte immédiatement du lemme c) du numéro 2, [5]) C. Q.F.D.

---

[5]) Pendant la revision des épreuves j'apprends que M. *Gillis*, Bull. Soc. R. Sc. Liège, Déc. 1940, pp. 197—212, a trouvé indépendamment le théorème de M. *Schmidt*. La démonstration de M. *Gillis* repose sur les mêmes principes que celle de M. *Schmidt*.

(Reçu le 28 juillet 1942.)