Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales.
Autor: Ostrowski, Alexandre
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14887

Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales

Par Alexandre Ostrowski, Bâle

1. On connaît deux systèmes de conditions essentiellement différents assurant l'interversibilité des dérivations:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial x_1}\ . \tag{1}$$

Le premier, dû à *Schwarz*, suppose que l'une des dérivées mixtes existe dans tout un voisinage du point P_0 considéré[1]. Le second, dû à M. *W. H. Young*, ne fait d'hypothèses sur les dérivées mixtes qu'au point P_0 même, mais suppose en revanche l'existence des dérivées secondes $y''_{x_1 x_1}$ et $y''_{x_2 x_2}$ qui n'ont rien à faire avec le problème[2].

Dans ce qui suit nous donnons un troisième système de conditions qui ne porte que sur les dérivées mixtes au point P_0.

Nous introduisons à cet effet la notion d'une *dérivée uniforme dans un point*, une notion qui permet aussi de pousser l'analyse de la notion d'une différentielle totale plus loin qu'il n'était possible auparavant.

2. Rappelons d'abord la notion de la différentielle totale[3]. On dit que la fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ possède une *différentielle totale au point* $P_0(a_1,\ldots,a_n)$, si l'on a

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f(a_1,\ldots,a_n)+\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(x_\nu-a_\nu)+o(r)\ ,\quad r=\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu-a_\nu|\to 0, \tag{2}$$

où les constantes α_ν sont les dérivées partielles f'_{x_ν} de f en P_0.

De l'autre côté nous dirons que $f(x_1,\ldots,x_n)$ est *dérivable* par rapport à x_1 *uniformément* en $P_0(a_1,\ldots,a_n)$, si l'expression

---

[1] Cf. par exemple: *De la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse Infinitésimale, t. 1, 3ème éd. (1914), pp. 146—147. — *I. W. Hobson*, The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series, vol. 1, 3rd ed. (1927), pp. 425—426. — *O. Haupt* und *G. Aumann*, Differential- und Integralrechnung, Bd. 2 (1938), pp. 125—126.

[2] Cf. par exemple: *De la Vallée Poussin*, l. c., pp. 145—146. — *I. W. Hobson*, l. c., pp. 427—428. — *Haupt* und *Aumann*, l. c., pp. 125—126.

[3] Cf. par exemple: *De la Vallée Poussin*, l. c., pp. 140—141. — *I. W. Hobson*, l. c., pp. 419—421. — *Haupt* und *Aumann*, l. c., pp. 111—121.

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1 - a_1} \tag{3}$$

tend vers une limite déterminée $f'_{x_1}(a_1, \ldots, a_n)$ avec

$$x_1 - a_1 \to 0 , \quad |x_\nu - a_\nu| \leqq |x_1 - a_1| , \quad \nu = 2, \ldots, n . \tag{4}$$

En permutant les variables, on obtient la définition de la dérivabilité par rapport à x_ν, uniforme en P_0.

3. *Théorème I. Pour que $f(x_1, \ldots, x_n)$ possède une différentielle totale en $P_0(a_1, \ldots, a_n)$, il est nécessaire et suffisant que f soit dérivable par rapport à chaque x_ν, uniformément en P_0.*

Démonstration: Supposons que $f(x_1, \ldots, x_n)$ possède une différentielle totale en P_0, alors on tire de (2) dans les hypothèses (4):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1(x_1 - a_1) + o(x_1 - a_1) .$$

Donc l'expression (3) tend vers α_1 dans les hypothèses (4). Et, en permutant les variables, on obtient, uniformément en P_0, la dérivée par rapport à chacune des variables x_ν [4]).

Supposons inversement que $f(x_1, \ldots, x_n)$ soit dérivable par rapport à chacune des variables x_ν, uniformément en P_0. Si les $x_\nu - a_\nu$ tendent vers 0, il y a $n!$ cas à considérer, suivant les grandeurs relatives des $|x_\nu - a_\nu|$. Supposons par exemple que l'on ait

$$|x_1 - a_1| \geqq |x_2 - a_2| \geqq \cdots \geqq |x_n - a_n| . \tag{5}$$

Alors on a pour $|x_1 - a_1| \to 0$, en posant, pour fixer les idées, $n = 3$, par l'hypothèse:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, x_2, x_3) &= \alpha_1(x_1 - a_1) + \varepsilon_1(x_1 - a_1) , \\
f(a_1, x_2, x_3) - f(a_1, a_2, x_3) &= \alpha_2(x_2 - a_2) + \varepsilon_2(x_2 - a_2) , \\
f(a_1, a_2, x_3) - f(a_1, a_2, a_3) &= \alpha_3(x_3 - a_3) + \varepsilon_3(x_3 - a_3) ,
\end{aligned}$$

où les constantes α_ν sont les dérivées correspondantes de f, en P_0 et où les ε_ν tendent vers 0 avec $|x_1 - a_1|$. Donc, en ajoutant:

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, a_2, a_3) = \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu(x_\nu - a_\nu) + \sum_{\nu=1}^{3} \varepsilon_\nu(x_\nu - a_\nu) , \tag{6}$$

où le dernier membre est évidemment $o(r)$ avec $r \to 0$.

[4]) Comme on voit, dans le cas d'une différentielle totale l'expression (3) tend vers $f'_{x_1}(a_1, \ldots, a_n)$ avec $x_1 \to a_1$, même si les $x_2, \ldots, x_2$ sont restreintes au domaine

$$|x_\mu - a_\mu| \leqq C\, |x_1 - a_1| , \quad \mu = 2, \ldots, n$$

pour un C arbitraire, mais fixe.

Dans les $n! - 1$ autres cas on obtient, en permutant les variables, la même relation (6), et le théorème est démontré.

4. *Théorème II. Si $f(x_1, x_2)$ possède dans le voisinage de $P_0(a_1, a_2)$ les dérivées partielles f'_{x_1}, f'_{x_2}, et si les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial f'_{x_1}}{dx_2}$, $\dfrac{\partial f'_{x_2}}{dx_1}$ existent uniformément en P_0, on a en P_0*

$$\frac{\partial f'_{x_1}}{\partial x_2} = \frac{\partial f'_{x_2}}{\partial x_1} . \tag{7}$$

Démonstration. Considérons l'expression

$$\Delta = f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + k) + f(a_1, a_2) .$$

Appliquons à la fonction de x_1: $f(x_1, a_2 + k) - f(x_1, a_2)$, le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\begin{aligned} &(f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1 + h, a_2)) - (f(a_1, a_2 + k) - f(a_1, a_2)) = \\ &= h[f'_{x_1}(a_1 + \vartheta_1 h, a_2 + k) - f'_{x_1}(a_1 + \vartheta_1 h, a_2)], \quad 0 \leqq \vartheta_1 \leqq 1 . \end{aligned}$$

Donc, en posant $h = k$:

$$\frac{\Delta}{h^2} = \frac{f'_{x_1}(a_1 + \vartheta_1 h, a_2 + h) - f'_{x_1}(a_1 + \vartheta_1 h, a_2)}{h} . \tag{8}$$

Mais, puisque $\dfrac{\partial}{\partial x_2}(f'_{x_1})$ existe, uniformément en P_0, il résulte de (8):

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(f'_{x_1}) . \tag{9}$$

Or, l'expression Δ est formée symétriquement par rapport à x_1 et x_2, on a donc aussi au point P_0

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(f'_{x_2}) ,$$

et le théorème II est démontré.

5. On pourrait se demander, si le théorème II reste en vigueur, quand on définit la dérivabilité uniforme en P_0, en exigeant seulement que l'expression (3) tend vers une limite déterminée pour

$$x_1 - a_1 \to 0 , \quad |x_\nu - a_\nu| \leqq (1 - \varepsilon)\,|x_1 - a_1| , \quad \nu = 2, \ldots, n , \tag{10}$$

avec un ε fixe et positif.

Or, l'exemple suivant montre, que le théorème II cesse alors d'être valable:

Soit $\quad h = (x^2 + y^2)^{-1}, \; h'_x = -2xh^2,$

$$f(x,y) = xy\,\frac{|x|^h - |y|^h}{|x|^h + |y|^h}, \; (x^2 + y^2 > 0), \; f(0,0) = 0. \tag{11}$$

On a, en dérivant[5]) par rapport à x :

$$f'_x(x,y) = y\frac{|x|^h - |y|^h}{|x|^h + |y|^h} + 2hy\frac{|x|^h\,|y|^h}{(|x|^h + |y|^h)^2}\left(1 - 2x^2 h \lg\left|\frac{x}{y}\right|\right), \tag{12}$$

autant que $x^2 + y^2 > 0$. Pour $x = y = 0$, on a évidemment $f'_x(0,0) = 0$.

L'expression (12) *est continue.* Pour $|x| > 0, |y| > 0$ c'est évident. Si $x \to 0, |y| > 0$, le premier membre tend vers $-y$ et les deux derniers termes tendent vers 0. Si $y \to 0, |x| > 0$, tous les termes tendent vers 0. Enfin, pour $x \to 0$, $y \to 0$ l'expression (12) tend vers 0.

Or, je dis que la dérivée $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ existe à l'origine et est $= -1$, et qu'en plus, l'expression

$$\frac{f'_x(x,y) - f'_x(x,0)}{y} \tag{13}$$

tend vers -1, si pour un ε fixe positif

$$y \to 0, \quad |x| < (1 - \varepsilon)|y|. \tag{14}$$

En effet, $f'_x(x,0)$ s'annule. On a donc à considérer la limite, sous les conditions (14), de l'expression suivante, où l'on a posé $z = \left|\frac{x}{y}\right|$:

$$\frac{z^h - 1}{z^h + 1} + h\frac{z^h}{(z^h + 1)^2}\left(2 - 4\frac{z^2}{z^2 + 1}\lg z\right). \tag{15}$$

Or, h tendant vers ∞, le premier membre de (15) tend vers -1 sous l'hypothèse (14). Le facteur devant la parenthèse du second membre de (15) est majoré par

$$h(1 - \varepsilon)^h$$

et tend par conséquent vers 0 pour (14).

---

[5]) On dérive une puissance $|x|^a$, en l'écrivant dans la forme $(x^2)^{\frac{a}{2}}$.

Enfin, l'expression entre parenthèse du second membre de (15) est, pour $0 \leqq z < 1$, positive et bornée, $< 2 + 2e^{-1}$. Donc, on a en effet

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} f'_x(x, y)\right)_{x=y=0} = -1 .$$

Mais alors, puisque $f(y, x) = - f(x, y)$, la dérivée $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ existe, elle aussi, à l'origine, dans les conditions analogues, et est égal à $+1$, de sorte que l'interversion des dérivations n'est plus permise.

(Reçu le 28 juillet 1942.)