

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales.
Autor: Ostrowski, Alexandre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14887>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales

Par ALEXANDRE OSTROWSKI, Bâle

1. On connaît deux systèmes de conditions essentiellement différents assurant l'interversibilité des dérivations :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_1} . \quad (1)$$

Le premier, dû à *Schwarz*, suppose que l'une des dérivées mixtes existe dans tout un voisinage du point P_0 considéré¹⁾. Le second, dû à *M. W. H. Young*, ne fait d'hypothèses sur les dérivées mixtes qu'au point P_0 même, mais suppose en revanche l'existence des dérivées secondes $y''_{x_1 x_1}$ et $y''_{x_2 x_2}$ qui n'ont rien à faire avec le problème²⁾.

Dans ce qui suit nous donnons un troisième système de conditions qui ne porte que sur les dérivées mixtes au point P_0 .

Nous introduisons à cet effet la notion d'une *dérivée uniforme dans un point*, une notion qui permet aussi de pousser l'analyse de la notion d'une différentielle totale plus loin qu'il n'était possible auparavant.

2. Rappelons d'abord la notion de la différentielle totale³⁾. On dit que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ possède une *différentielle totale au point* $P_0(a_1, \dots, a_n)$, si l'on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu (x_\nu - a_\nu) + o(r), \quad r = \sum_{\nu=1}^n |x_\nu - a_\nu| \rightarrow 0, \quad (2)$$

où les constantes α_ν sont les dérivées partielles f'_{x_ν} de f en P_0 .

De l'autre côté nous dirons que $f(x_1, \dots, x_n)$ est *dérivable* par rapport à x_1 *uniformément* en $P_0(a_1, \dots, a_n)$, si l'expression

¹⁾ Cf. par exemple: *De la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse Infinitésimale, t. 1, 3^{ème} éd. (1914), pp. 146—147. — *I. W. Hobson*, The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series, vol. 1, 3rd ed. (1927), pp. 425—426. — *O. Haupt* und *G. Aumann*, Differential- und Integralrechnung, Bd. 2 (1938), pp. 125—126.

²⁾ Cf. par exemple: *De la Vallée Poussin*, l. c., pp. 145—146. — *I. W. Hobson*, l. c., pp. 427—428. — *Haupt* und *Aumann*, l. c., pp. 125—126.

³⁾ Cf. par exemple: *De la Vallée Poussin*, l. c., pp. 140—141. — *I. W. Hobson*, l. c., pp. 419—421. — *Haupt* und *Aumann*, l. c., pp. 111—121.

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n)}{x_1 - a_1} \quad (3)$$

tend vers une limite déterminée $f'_{x_1}(a_1, \dots, a_n)$ avec

$$x_1 - a_1 \rightarrow 0, \quad |x_\nu - a_\nu| \leq |x_1 - a_1|, \quad \nu = 2, \dots, n. \quad (4)$$

En permutant les variables, on obtient la définition de la dérivabilité par rapport à x_ν , uniforme en P_0 .

3. *Théorème I.* Pour que $f(x_1, \dots, x_n)$ possède une différentielle totale en $P_0(a_1, \dots, a_n)$, il est nécessaire et suffisant que f soit dérivable par rapport à chaque x_ν , uniformément en P_0 .

Démonstration: Supposons que $f(x_1, \dots, x_n)$ possède une différentielle totale en P_0 , alors on tire de (2) dans les hypothèses (4):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1(x_1 - a_1) + o(x_1 - a_1).$$

Donc l'expression (3) tend vers α_1 dans les hypothèses (4). Et, en permutant les variables, on obtient, uniformément en P_0 , la dérivée par rapport à chacune des variables x_ν ⁴⁾.

Supposons inversement que $f(x_1, \dots, x_n)$ soit dérivable par rapport à chacune des variables x_ν , uniformément en P_0 . Si les $x_\nu - a_\nu$ tendent vers 0, il y a $n!$ cas à considérer, suivant les grandeurs relatives des $|x_\nu - a_\nu|$. Supposons par exemple que l'on ait

$$|x_1 - a_1| \geq |x_2 - a_2| \geq \dots \geq |x_n - a_n|. \quad (5)$$

Alors on a pour $|x_1 - a_1| \rightarrow 0$, en posant, pour fixer les idées, $n = 3$, par l'hypothèse:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, x_2, x_3) &= \alpha_1(x_1 - a_1) + \varepsilon_1(x_1 - a_1), \\ f(a_1, x_2, x_3) - f(a_1, a_2, x_3) &= \alpha_2(x_2 - a_2) + \varepsilon_2(x_2 - a_2), \\ f(a_1, a_2, x_3) - f(a_1, a_2, a_3) &= \alpha_3(x_3 - a_3) + \varepsilon_3(x_3 - a_3), \end{aligned}$$

où les constantes α_ν sont les dérivées correspondantes de f , en P_0 et où les ε_ν tendent vers 0 avec $|x_1 - a_1|$. Donc, en ajoutant:

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, a_2, a_3) = \sum_{\nu=1}^3 \alpha_\nu(x_\nu - a_\nu) + \sum_{\nu=1}^3 \varepsilon_\nu(x_\nu - a_\nu), \quad (6)$$

où le dernier membre est évidemment $o(r)$ avec $r \rightarrow 0$.

⁴⁾ Comme on voit, dans le cas d'une différentielle totale l'expression (3) tend vers $f'_{x_1}(a_1, \dots, a_n)$ avec $x_1 \rightarrow a_1$, même si les x_2, \dots, x_n sont restreintes au domaine

$$|x_\mu - a_\mu| \leq C |x_1 - a_1|, \quad \mu = 2, \dots, n$$

pour un C arbitraire, mais fixe.

Dans les $n! - 1$ autres cas on obtient, en permutant les variables, la même relation (6), et le théorème est démontré.

4. *Théorème II.* Si $f(x_1, x_2)$ possède dans le voisinage de $P_0(a_1, a_2)$ les dérivées partielles f'_{x_1}, f'_{x_2} , et si les deux dérivées partielles $\frac{\partial f'_{x_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial f'_{x_2}}{\partial x_1}$ existent uniformément en P_0 , on a en P_0

$$\frac{\partial f'_{x_1}}{\partial x_2} = \frac{\partial f'_{x_2}}{\partial x_1} . \quad (7)$$

Démonstration. Considérons l'expression

$$\Delta = f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + k) + f(a_1, a_2) .$$

Appliquons à la fonction de x_1 : $f(x_1, a_2 + k) - f(x_1, a_2)$, le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\begin{aligned} & (f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1 + h, a_2)) - (f(a_1, a_2 + k) - f(a_1, a_2)) = \\ & = h [f'_{x_1}(a_1 + \vartheta_1 h, a_2 + k) - f'_{x_1}(a_1 + \vartheta_1 h, a_2)], \quad 0 \leq \vartheta_1 \leq 1 . \end{aligned}$$

Donc, en posant $h = k$:

$$\frac{\Delta}{h^2} = \frac{f'_{x_1}(a_1 + \vartheta_1 h, a_2 + h) - f'_{x_1}(a_1 + \vartheta_1 h, a_2)}{h} . \quad (8)$$

Mais, puisque $\frac{\partial}{\partial x_2} (f'_{x_1})$ existe, uniformément en P_0 , il résulte de (8):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} (f'_{x_1}) . \quad (9)$$

Or, l'expression Δ est formée symétriquement par rapport à x_1 et x_2 , on a donc aussi au point P_0

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} (f'_{x_2}) ,$$

et le théorème II est démontré.

5. On pourrait se demander, si le théorème II reste en vigueur, quand on définit la dérivabilité uniforme en P_0 , en exigeant seulement que l'expression (3) tend vers une limite déterminée pour

$$x_1 - a_1 \rightarrow 0, \quad |x_\nu - a_\nu| \leq (1 - \varepsilon) |x_1 - a_1|, \quad \nu = 2, \dots, n, \quad (10)$$

avec un ε fixe et positif.

Or, l'exemple suivant montre, que le théorème II cesse alors d'être valable:

$$\text{Soit} \quad h = (x^2 + y^2)^{-1}, \quad h'_x = -2xh^2,$$

$$f(x, y) = xy \frac{|x|^h - |y|^h}{|x|^h + |y|^h}, \quad (x^2 + y^2 > 0), \quad f(0, 0) = 0. \quad (11)$$

On a, en dérivant⁵⁾ par rapport à x :

$$f'_x(x, y) = y \frac{|x|^h - |y|^h}{|x|^h + |y|^h} + 2hy \frac{|x|^h |y|^h}{(|x|^h + |y|^h)^2} \left(1 - 2x^2 h \lg \left| \frac{x}{y} \right| \right), \quad (12)$$

autant que $x^2 + y^2 > 0$. Pour $x = y = 0$, on a évidemment $f'_x(0, 0) = 0$.

L'expression (12) est continue. Pour $|x| > 0, |y| > 0$ c'est évident. Si $x \rightarrow 0, |y| > 0$, le premier membre tend vers $-y$ et les deux derniers termes tendent vers 0. Si $y \rightarrow 0, |x| > 0$, tous les termes tendent vers 0. Enfin, pour $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ l'expression (12) tend vers 0.

Or, je dis que la dérivée $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$ existe à l'origine et est $= -1$, et qu'en plus, l'expression

$$\frac{f'_x(x, y) - f'_x(x, 0)}{y} \quad (13)$$

tend vers -1 , si pour un ε fixe positif

$$y \rightarrow 0, \quad |x| < (1 - \varepsilon)|y|. \quad (14)$$

En effet, $f'_x(x, 0)$ s'annule. On a donc à considérer la limite, sous les conditions (14), de l'expression suivante, où l'on a posé $z = \left| \frac{x}{y} \right|$:

$$\frac{z^h - 1}{z^h + 1} + h \frac{z^h}{(z^h + 1)^2} \left(2 - 4 \frac{z^2}{z^2 + 1} \lg z \right). \quad (15)$$

Or, h tendant vers ∞ , le premier membre de (15) tend vers -1 sous l'hypothèse (14). Le facteur devant la parenthèse du second membre de (15) est majoré par

$$h(1 - \varepsilon)^h$$

et tend par conséquent vers 0 pour (14).

⁵⁾ On dérive une puissance $|x|^a$, en l'écrivant dans la forme $(x^2)^{\frac{a}{2}}$.

Enfin, l'expression entre parenthèse du second membre de (15) est, pour $0 \leq z < 1$, positive et bornée, $< 2 + 2e^{-1}$. Donc, on a en effet

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} f'_x(x, y) \right)_{x=y=0} = -1 .$$

Mais alors, puisque $f(y, x) = -f(x, y)$, la dérivée $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$ existe, elle aussi, à l'origine, dans les conditions analogues, et est égal à $+1$, de sorte que l'interversion des dérivations n'est plus permise.

(Reçu le 28 juillet 1942.)