Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Invariante Herleitung der Differentialgleichungen für 3-fache Orthogonalsysteme.

Autor: Bieri, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14892

Invariante Herleitung der Differentialgleichungen für 3-fache Orthogonalsysteme

Von Hans Bieri, Herzogenbuchsee

Nach dem Satze von Dupin schneiden sich die Flächen eines dreifachen Orthogonalsystems paarweise in Krümmungslinien. Die Differentialgleichungen, denen der Ortsvektor des Systems zu genügen hat, wird man also zweckmäßig durch invariante Ableitung gewinnen können.

1. *Bezeichnungen* (vergleiche Figur 1).

Die Durchführung unserer Idee erfordert ausgiebige Verwendung der Indexrechnung. Von großem Vorteil wird sich die Abmachung erweisen, daß ohne gegenteilige Vorschrift über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

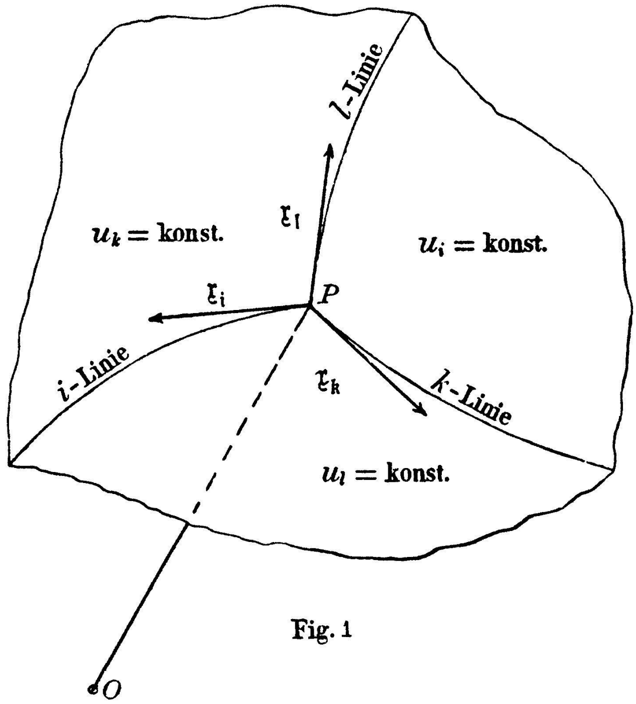

Fig. 1

Bedenkt man ferner, daß in den dreifachen Orthogonalsystemen keine der Flächenscharen irgendwie ausgezeichnet ist, so erscheint die Verwendung von Indizespermutationen selbstverständlich. Ich benütze die Bezeichnungen der Differentialgeometrie nach *Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie (Dritte Auflage). Außerdem bedeuten:

1. Obere eingeklammerte Indizes: Markierung[1])
Untere Indizes: Ableitung
Untere deutsche Indizes: Ableitung nach den Bogenlängen der Krümmungslinien

2. u_1, u_2, u_3: Flächenparameter u, v, w

3. i, k, l: Gruppe der aus 1, 2, 3 durch zyklische Vertauschung[2]) hervorgehenden Permutationen
i, l, k: Übrige Permutationen

4. l-Linien: Schnittlinien der Flächen $u_i =$ konst.
$u_k =$ konst.

5. $A^{(lk)}$: Hauptkrümmung der Flächen $u_l =$ konst. längs der k-Linien

6. $B^{(ki)}$: Geodätische Krümmung der Parameterlinien i auf den Flächen $u_k =$ konst.

7. $K^{(l)}$: Gaußsche Krümmung der Flächen $u_l =$ konst.

2. *Formelapparat der invarianten Ableitung.*

Die invariante Ableitung bezweckt, aus Invarianten J einer Fläche durch Differentiation neue Invarianten zu gewinnen. Zunächst ist erforderlich, die Flächen auf Kurvennetze von invarianter Bedeutung zu beziehen. Ganz allgemein eignen sich dazu die Krümmungslinien am besten, da sie immer reell sind. Wegen des Satzes von Dupin drängen sie sich für unsere Zwecke geradezu auf. Bedeuten nun u, v Krümmungslinienparameter, so sind die Ableitungen J_u bzw. J_v doch nicht invariant gegenüber Parametertransformationen von der Form

$$u = f(\bar{u}), \quad v = g(\bar{v}), \quad \text{mit } \frac{df}{d\bar{u}} \neq 0, \quad \frac{dg}{d\bar{v}} \neq 0 ;$$

denn man erhält:

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial J}{\partial u} \cdot f' \quad ; \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial J}{\partial v} \cdot g' \quad .$$

In der Kurventheorie benützt man mit Erfolg die Bogenlänge als Parameter. Will man dieses Verfahren auf die Flächentheorie übertragen,

---

[1]) Diese Bezeichnung wird jedoch nur dann systematisch angewendet, wenn Mißverständnisse zu befürchten sind.

[2]) Vertauschung wird ausdrücklich vorgeschrieben.

so ist zu bedenken, daß u und v im allgemeinen auf den Krümmungslinien nicht die Bogenlänge messen. Durch eine Skalentransformation kann man nur erreichen, daß sie dies auf je einer herausgegriffenen Krümmungslinie jeder Schar tun. Dadurch entsteht natürlich eine Komplikation.

Mit den Bezeichnungen in 1. erhalten wir:

1. Bogenlänge der Parameterlinien:

$$s^{(m)} = \int \sqrt{E^{(m)}}\, du^{(m)} \ .$$

(Nicht summieren über m!) ($m = i$, k oder l) .

2. Linienelement des Orthogonalsystems:

$ds^2 = E^{(\lambda)} (du^{(\lambda)})^2$.

3. $\dfrac{\partial}{\partial s^{(m)}} = \dfrac{\partial}{\partial u^{(m)}} \cdot \dfrac{\partial u^{(m)}}{\partial s^{(m)}} = \dfrac{\partial}{\partial u^{(m)}} : \dfrac{\partial s^{(m)}}{\partial u^{(m)}} = \dfrac{\partial}{\partial u^{(m)}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{E^{(m)}}}$.

4. $\dfrac{\partial}{\partial s^{(m)}} = \dfrac{\partial}{\partial \mathfrak{m}}$ $(\mathfrak{m} = \mathfrak{i}, \mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{l})$.

5. Ist S invariant gegenüber den oben erwähnten Skalentransformationen, so gilt[3]):

$$S_1 = \frac{S_u}{\sqrt{E}} \quad ; \quad S_2 = \frac{S_v}{\sqrt{G}}$$

$$S_{11} = \frac{S_{uu}}{E} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_u \cdot E_u}{E^2} \quad ; \quad S_{22} = \frac{S_{vv}}{G} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_v \cdot G_v}{G^2}$$

$$S_{12} = \frac{S_{uv}}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_u \cdot E_v}{E\sqrt{EG}} \ ; \quad S_{21} = \frac{S_{vu}}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_v \cdot G_u}{G\sqrt{EG}} \ .$$

Wegen $S_{vu} = S_{uv}$ ist nun die Integrabilitätsbedingung

$$S_{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_u \cdot E_v}{E\sqrt{EG}} = S_{21} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_v \cdot G_u}{G\sqrt{EG}}$$

zu beachten. Dieselbe kann durchsichtiger geschrieben werden. Es ist:

---

[3]) *Blaschke*, S. 125 ff., 3. Auflage.

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{S_u\cdot E_v}{\sqrt{E}\sqrt{E}\sqrt{EG}} = -S_1\cdot\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E} = S_1\cdot\varkappa_g^{(u)}\,,\ ^{4})$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{S_v\cdot G_u}{\sqrt{G}\sqrt{G}\sqrt{EG}} = -S_2\cdot\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G} = S_2\cdot\varkappa_g^{(v)}$$

also nach 1

$$S_{12} - B^{(31)}\cdot S_1 = S_{21} - B^{(32)}\cdot S_2 \text{ und weiter:}$$

$$\underline{S_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} - B^{(li)}\cdot S_{\mathfrak{i}} = S_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} - B^{(lk)}\cdot S_{\mathfrak{k}}\,.} \tag{1}$$

(1) ist für die Ableitung der Differentialgleichungen von fundamentaler Bedeutung.

Es ist ferner leicht einzusehen, daß durch *gleichzeitige zyklische Vertauschung sämtlicher Indizes* alle Flächen des Orthogonalsystems erfaßt werden.

3. *Die Ableitungsgleichungen.*

Für unsere Zwecke haben wir nun das Dreibein der normierten Tangentenvektoren längs der Krümmungslinien zu verfolgen. Aus schon genannten Gründen ist Beschränkung auf die Grundvektoren der einen Flächenschar statthaft.

Wir machen den zunächst unbestimmten Ansatz:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} = \alpha^{(i\lambda)}\,\mathfrak{x}_\lambda & \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} = \varepsilon^{(i\lambda)}\,\mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} = \beta^{(i\lambda)}\,\mathfrak{x}_\lambda & \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} = \eta^{(i\lambda)}\,\mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} = \gamma^{(i\lambda)}\,\mathfrak{x}_\lambda & \\ \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}} = \delta^{(i\lambda)}\,\mathfrak{x}_\lambda\,. & \end{array} \tag{2}$$

Die Koeffizienten der 6 Linearformen bestimmt man mit Hilfe der Beziehungen, die zwischen den Grundvektoren bestehen.

$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}$ genügen folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} = 1 \tag{a}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = 0 \tag{b}$$

Aus (a) folgt:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{l}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}} =$$
$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{l}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{l}} = 0\,,$$

[4]) *Blaschke*, S. 150, 3. Auflage. $\varkappa_g^{(u)}$ = geodätische Krümmung der u-Linien
$\varkappa_g^{(v)}$ = geodätische Krümmung der v-Linien.

und aus (b):

$$(\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}})_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} + \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} \,,$$
$$(\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}})_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}} + \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} \;;$$
$$(\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}})_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} + \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} \;; \qquad (\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}})_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} + \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} \;;$$
$$(\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}})_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} + \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} \;; \qquad (\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}})_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}} + \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} \;;$$

und weiter:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} = -\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} \,,$$
$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}} = -\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} \,,$$
$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} = -\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} \,,$$
$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} = -\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} \,,$$
$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} = -\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} \,,$$
$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} = -\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}} \,.$$

Die Integrabilitätsbedingung in 2. gilt auch für beliebige Vektoren. Wir schreiben:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} - B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} - B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} \,.$$

Nach skalarer Multiplikation mit $\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}$ bzw. $\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}$ folgt:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = -\,B^{(li)} \;; \qquad \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = -\,B^{(lk)} \,. \tag{c}$$

Da die Parameterlinien Krümmungslinien sind, steht ferner die Gleichung

$$M \equiv 0$$

zur Verfügung. M ist gleich der Determinante der 3 Vektoren $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{x}_k$ und $\mathfrak{x}_{ik}$[5]). Nun ist aber $\mathfrak{x}_i$ proportional $\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}$, $\mathfrak{x}_k$ proportional $\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}$, und $\mathfrak{x}_{ik}$ ist eine lineare Kombination von $\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}$ und $\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}$, bzw. von $\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}$ und $\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}$ gemäß 2, 5. Daraus folgt:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\cdot\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}\cdot\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} = 0 \,. \tag{d}$$

Schließlich darf man die beiden Rodrigues'schen Gleichungen[6])

$$\mathfrak{N}_u = -\,A^{(li)}\cdot\mathfrak{x}_u \,, \qquad \mathfrak{N}_v = -\,A^{(lk)}\,\mathfrak{x}_v$$

nicht vergessen. Nach Division durch $\sqrt{E}$ bzw. $\sqrt{G}$ liest man sie:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} = -\,A^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} \,, \qquad \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} = -\,A^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} \,,$$

woraus folgt:

---

[5]) *Blaschke*, S. 89, 3. Auflage.
[6]) *Blaschke*, S. 95, 3. Auflage.

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = -A^{(li)}, \qquad \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = -A^{(lk)}, \qquad \text{(e)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = 0 \quad , \qquad \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = 0 \quad .$$

Damit sind alle Bedingungen ausgewertet, und wir schreiten zur Bestimmung der unbestimmten Koeffizienten.

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} = \alpha^{(i\lambda)}\, \mathfrak{x}_{\lambda}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = \alpha^{(ii)} \cdot 1 + \alpha^{(ik)} \cdot 0 + \alpha^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \alpha^{(ii)} = 0 \qquad \text{(vergleiche (a))}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = \alpha^{(ii)} \cdot 0 + \alpha^{(ik)} \cdot 1 + \alpha^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \alpha^{(ik)} = B^{(li)} \qquad \text{((b), (c))}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} = \alpha^{(ii)} \cdot 0 + \alpha^{(ik)} \cdot 0 + \alpha^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \alpha^{(il)} = A^{(li)} \qquad \text{((b), (e))}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} = \beta^{(i\lambda)} \cdot \mathfrak{x}_{\lambda}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = \beta^{(ii)} \cdot 1 + \beta^{(ik)} \cdot 0 + \beta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \beta^{(ii)} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = \beta^{(ii)} \cdot 0 + \beta^{(ik)} \cdot 1 + \beta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \beta^{(ik)} = -B^{(lk)} \qquad \text{(c)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} = \beta^{(ii)} \cdot 0 + \beta^{(ik)} \cdot 0 + \beta^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \beta^{(il)} = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} = \gamma^{(i\lambda)} \cdot \mathfrak{x}_{\lambda}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = \gamma^{(ii)} \cdot 1 + \gamma^{(ik)} \cdot 0 + \gamma^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \gamma^{(ii)} = -B^{(li)} \qquad \text{(c)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = \gamma^{(ii)} \cdot 0 + \gamma^{(ik)} \cdot 1 + \gamma^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \gamma^{(ik)} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} = \gamma^{(ii)} \cdot 0 + \gamma^{(ik)} \cdot 0 + \gamma^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \gamma^{(il)} = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}} = \delta^{(i\lambda)}\, \mathfrak{x}_{\lambda}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = \delta^{(ii)} \cdot 1 + \delta^{(ik)} \cdot 0 + \delta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \delta^{(ii)} = B^{(lk)} \qquad \text{((b), (c))}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = \delta^{(ii)} \cdot 0 + \delta^{(ik)} \cdot 1 + \delta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \delta^{(ik)} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} = \delta^{(ii)} \cdot 0 + \delta^{(ik)} \cdot 0 + \delta^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \delta^{(il)} = A^{(lk)} \qquad \text{((b), (e))}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} = \varepsilon^{(i\lambda)} \cdot \mathfrak{x}_{\lambda}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = \varepsilon^{(ii)} \cdot 1 + \varepsilon^{(ik)} \cdot 0 + \varepsilon^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \varepsilon^{(ii)} = -A^{(li)} \qquad \text{((b), (e))}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = \varepsilon^{(ii)} \cdot 0 + \varepsilon^{(ik)} \cdot 1 + \varepsilon^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \varepsilon^{(ik)} = 0 \qquad \text{(e)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}\, \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} = \varepsilon^{(ii)} \cdot 0 + \varepsilon^{(ik)} \cdot 0 + \varepsilon^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \varepsilon^{(il)} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} = \eta^{(i\lambda)} \cdot \mathfrak{x}_{\lambda}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = \eta^{(ii)} \cdot 1 + \eta^{(ik)} \cdot 0 + \eta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \eta^{(ii)} = 0 \qquad \text{(e)}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = \eta^{(ii)} \cdot 0 + \eta^{(ik)} \cdot 1 + \eta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \eta^{(ik)} = -A^{(lk)} \qquad \text{((b), (e))}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} = \eta^{(ii)} \cdot 0 + \eta^{(ik)} \cdot 0 + \eta^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \eta^{(il)} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Die Ableitungsgleichungen lauten mithin:

$$
\begin{array}{lllll}
\mathfrak{x}_{\mathfrak{ii}} = & * & B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} + A^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} & & \\
\mathfrak{x}_{\mathfrak{ik}} = & * & -B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} & * & \mathfrak{x}_{\mathfrak{il}} = -A^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} \\
\mathfrak{x}_{\mathfrak{ki}} = & -B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} & * & * & \mathfrak{x}_{\mathfrak{kl}} = -A^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} \\
\mathfrak{x}_{\mathfrak{kk}} = & B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} & * & + A^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} &
\end{array}
\tag{3}
$$

Man bemerkt Vertauschbarkeit von i und k bei festgehaltenem l. Dies ist keineswegs erstaunlich, sind doch i- und k-Linie vollständig gleichwertig. Gestützt darauf hätte man $\mathfrak{x}_{\mathfrak{ki}}$, $\mathfrak{x}_{\mathfrak{kk}}$ und $\mathfrak{x}_{\mathfrak{kl}}$ zum vornherein weglassen können.

Soll das System (3) integrabel sein, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{\mathfrak{iik}} - B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{ii}} &= \mathfrak{x}_{\mathfrak{iki}} - B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{ik}} \quad {}^{7)} \\
\mathfrak{x}_{\mathfrak{kki}} - B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{kk}} &= \mathfrak{x}_{\mathfrak{kik}} - B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{ki}} \\
\mathfrak{x}_{\mathfrak{ilk}} - B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{il}} &= \mathfrak{x}_{\mathfrak{ikl}} - B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{ik}}\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Nun werden die Ableitungen ausgeführt und für die zweiten Ableitungen werden ihre Werte aus (3) eingesetzt:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{ii}} = B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} + A^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{\mathfrak{iik}} &= B^{(li)}_{\mathfrak{k}}\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} + A^{(li)}_{\mathfrak{k}}\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} + B^{(li)}\,(B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} + A^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}) - A^{(li)}\cdot A^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} \\
&= B^{(li)}\,B^{(lk)}\cdot\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} + (B^{(li)}_{\mathfrak{k}} - A^{(li)}\,A^{(lk)})\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} + (A^{(li)}_{\mathfrak{k}} + B^{(li)}\,A^{(lk)})\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{\mathfrak{iik}} - B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{ii}} &= B^{(li)}\,B^{(lk)}\cdot\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} + (B^{(li)}_{\mathfrak{k}} - A^{(li)}\,A^{(lk)})\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} \\
&\quad + (A^{(li)}_{\mathfrak{k}} + B^{(li)}\,A^{(lk)})\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} - B^{(li)}\,(B^{(li)}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} + A^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}) \\
&= B^{(li)}\,B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} + (B^{(li)}_{\mathfrak{k}} - A^{(li)}\,A^{(lk)} - B^{(li)}\,B^{(li)})\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} \\
&\quad + (A^{(li)}_{\mathfrak{k}} + B^{(li)}\,A^{(lk)} - B^{(li)}\,A^{(li)})\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}
\end{aligned}
$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{ik}} = -B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{iki}} = -B^{(lk)}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} - B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{ki}} = -B^{(lk)}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} + B^{(lk)}\cdot B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{\mathfrak{iki}} - B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{ik}} &= -B^{(lk)}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} + B^{(lk)}\cdot B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} + B^{(lk)}\cdot B^{(lk)}\cdot\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} \\
&= B^{(lk)}\,B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} + (B^{lk}\cdot B^{(lk)} - B^{(lk)}_{\mathfrak{i}})\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}
\end{aligned}
$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{il}} = -A^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{ilk}} = -A^{(li)}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} - A^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{ik}} = -A^{(li)}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} + A^{(li)}\cdot B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}$$

---

7) Anwendung der Integrabilitätsbedingung (1).

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}\mathfrak{k}} - B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} = -A_{\mathfrak{k}}^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} + A^{(li)}\cdot B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} + B^{(li)}\cdot A^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}$$
$$= (B^{(li)}\cdot A^{(li)} - A_{\mathfrak{k}}^{(li)})\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} + A^{(li)}\,B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}\mathfrak{i}} - B^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} = (B^{(lk)}\,A^{(lk)} - A_{\mathfrak{i}}^{(lk)})\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} + A^{(lk)}\,B^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\ .$$

Die zweite Zeile von (4) liefert nichts Neues.

Bringt man in (4) alles auf die linken Seiten, so resultiert:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}(B^{(li)}B^{(lk)} - B^{(lk)}B^{(li)}) + \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}(B_{\mathfrak{k}}^{(li)} + B_{\mathfrak{i}}^{(lk)} - A^{(li)}A^{(lk)} - B^{(li)2} - B^{(lk)2})$$
$$+ \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}(A_{\mathfrak{k}}^{(li)} + B^{(li)}A^{(lk)} - B^{(li)}A^{(li)}) = 0\ .$$

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}(B^{(li)}A^{(li)} - A_{\mathfrak{k}}^{(li)} - B^{(li)}A^{(lk)}) + \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}(A^{(li)}B^{(lk)} - B^{(lk)}A^{(lk)} + A_{\mathfrak{i}}^{(lk)}) = 0\ .$$

Dies sind lauter Identitäten. Deshalb lauten die Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} &B_{\mathfrak{k}}^{(li)} + B_{\mathfrak{i}}^{(lk)} - B^{(li)2} - B^{(lk)2} = A^{(li)}\,A^{(lk)} = K^{(l)} \\ &A_{\mathfrak{i}}^{(lk)} = B^{(lk)}\,(A^{(lk)} - A^{(li)})\ ; \quad A_{\mathfrak{k}}^{(li)} = B^{(li)}\,(A^{(li)} - A^{lk)}) \end{aligned} \tag{5}$$

(5) ist natürlich nichts anderes als die Gauß'sche und die Codazzi'schen Gleichungen in invarianter Gestalt.

(4) und (5) charakterisieren nicht schon das Orthogonalsystem. In der Tat haben wir noch gar nicht berücksichtigt, daß jeder der drei Grundvektoren auf zwei Flächen die Rolle eines Tangentenvektors spielt, während er zugleich Normalenvektor der dritten ist. Die zusätzlichen Bedingungen findet man einfach durch Vergleichen der skalaren Grundvektorprodukte. Wir erhalten ihre Gesamtheit durch *gleichzeitige zyklische Vertauschung* sämtlicher Indizes[8]).

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}{}^{*} & = B^{(li)}, & \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}{}^{****} & = B^{(ik)}, & \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{l}}{}^{******} & = B^{(kl)}, \\ \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}}{}^{**} & = B^{(lk)}, & \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{l}}{}^{*****} & = B^{(il)}, & \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}{}^{***} & = B^{(ki)}, \\ \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}{}^{***} & = A^{(li)}, & \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}{}^{**} & = A^{(ik)}, & \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}{}^{*****} & = A^{(kl)}, \\ \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}{}^{****} & = A^{(lk)}, & \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}\mathfrak{l}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}{}^{******} & = A^{(il)}, & \mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}}{}^{*} & = A^{(ki)}\ . \end{array} \tag{6}$$

Die Gleichungen (6) stimmen paarweise in den linken Seiten überein (durch Sternchen dargestellt), also müssen auch die rechten Seiten gleich sein. Deshalb gelten die sechs wichtigen Relationen:

---

[8]) Skalarprodukte mit den Werten 0 oder 1 werden vernachlässigt. Unterscheiden sich zwei nur durch das Vorzeichen, so wird nur dasjenige mit dem positiven Wert berücksichtigt (vgl. 3 (b)).

$$\boxed{\begin{array}{lll} B^{(ki)} = A^{(li)}, & B^{(lk)} = A^{(ik)}, & B^{(il)} = A^{(kl)} \\ B^{(ik)} = A^{(lk)}, & B^{(kl)} = A^{(il)}, & B^{(li)} = A^{(ki)} \end{array}} \qquad (7)$$

Sie bedeuten geometrisch folgendes:

Satz: *Im dreifachen Orthogonalsystem ist die Hauptkrümmung einer beliebig herausgegriffenen Parameterfläche längs jeder ihrer Krümmungslinien gleich der geodätischen Krümmung dieser Kurve in jener andern eindeutig bestimmten Parameterfläche, der sie noch angehört.*

Jetzt brauchen wir nur noch (7) in (3) und (5) einzusetzen und erhalten endgültig:

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{l}} = & * & A^{(ki)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} & + A^{(li)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}, & ^{9})\ ^{10}) \\ \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} = & * & -A^{(ik)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} & * & , \\ \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}} = & * & -A^{(lk)}\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} & * & . \end{array} \qquad (8)$$

$$\begin{array}{l} A_{\mathfrak{k}}^{(ki)} + A_{\mathfrak{l}}^{(ik)} - A^{(ki)2} - A^{(ik)2} = A^{(li)}\,A^{(lk)} = K^{(l)}, \\ A_{\mathfrak{l}}^{(lk)} = A^{(ik)}\,(A^{(lk)} - A^{(li)}), \quad A_{\mathfrak{k}}^{(li)} = A^{(ki)}\,(A^{(li)} - A^{(lk)}). \end{array} \qquad (8a)$$

Die Analyse von (8) übersteigt den Rahmen meiner Arbeit, weshalb sie unterbleibt.

Der große Vorteil der invarianten Gleichungen besteht darin, daß man zwanglos zu speziellen Flächen, etwa Minimalflächen, übergehen kann.

(Eingegangen den 7. Dezember 1942.)

---

[9]) $\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}\mathfrak{l}}$ und $\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}\mathfrak{k}}$ werden aus (8) durch zyklische Vertauschung erzeugt.

[10]) Für gewisse Probleme wird man besser die geodätischen Krümmungen verwenden, wobei natürlich (7) berücksichtigt werden muß.