Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: L'itération directe des opérateurs hermitiens et deux théories qui en dépendent.

Autor: Wavre, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14894

L'itération directe des opérateurs hermitiens et deux théories qui en dépendent

Par R. WAVRE, Genève

1. L'espace

Nous voudrions faire une étude directe de l'itération des opérateurs hermitiens et fonder sur elle la théorie des équations intégrales à noyaux symétriques et celle des systèmes linéaires d'équations à une infinité d'inconnues, la matrice des coefficients étant hermitienne.

L'espace E dans lequel nous opérons est défini par les cinq axiomes suivants:

I. Il est vectoriel linéaire, c'est-à-dire que si x et y sont deux éléments de E et α, β des nombres complexes quelconques $\alpha x + \beta y$ est aussi un élément de E.

II. Il est métrique; on peut y définir un produit scalaire (x, y) et une distance réelle $+\sqrt{(x, x)}$.

III. Il est, à une infinité de dimensions, c'est-à-dire contient une infinité d'éléments orthogonaux x^j tels donc que l'on ait $(x^i, x^j) = \{{}^0_1$ suivant que $i \neq j$ ou non.

IV. Il est complet, c'est-à-dire admet le critère de Cauchy pour la convergence forte. Voir § 4.

V. Il est séparable, tous ses points sont points d'accumulation d'une infinité dénombrable d'entre eux. Cette propriété ne sera pas invoquée au début.

On trouverait dans le beau livre de M. *G. Julia:* Introduction mathématique aux théories quantiques, 1938, T. II, chap. III, toute explication concernant cet espace. L'espace d'Hilbert E_ω et l'espace fonctionnel E_f satisfont à ces cinq axiomes.

Le produit scalaire a les propriétés suivantes, les éléments pouvant être complexes:

$(x, y) = \overline{(y, x)}$ donc (x, x) est réel; une barre indique l'imaginaire conjuguée.

Dans E_ω, x a les coordonnées x_i et $(x, y) = \Sigma\, \bar{x}_i y_i$.

Dans E_f, x et y sont deux fonctions de carré sommable et $(x, y) = \int_0^1 \bar{x}(t)\, y(t)\, dt$.

La norme d'un élément sera $\| x \|^2 = (x, x)$, la racine positive $l = \| x \|$ sera sa longueur.

Norme et longueur sont bien positives ou nulles dans E_ω et E_f.

On a l'inégalité de Schwarz, l'inégalité triangulaire et la propriété du facteur

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| , \qquad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| , \qquad \begin{aligned} (ax, y) &= \bar{a}(x, y) \\ (x, ay) &= a(x, y) . \end{aligned}$$

Le produit scalaire est distributif $(x' + x'', y) = (x', y) + (x'', y)$, de même en y.

Un *opérateur* A est *linéaire* si

$$A(x' + x'') = Ax' + Ax'' , \quad A(\lambda x) = \lambda A x ,$$

λ nombre complexe. Nous poserons $y = Ax$.

Il est bien entendu que y est supposé être un élément de E si x l'est. Ce ne sera pas toujours le cas dans la suite, car y pourrait ne pas exister.

Les deux interprétations classiques sont, dans E_ω et E_f:

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \quad , \qquad y(s) = \int_0^1 N(s, t)\, x(t)\, dt \quad .$$

L'opérateur linéaire A sera dit *hermitien* si l'on a, quel que soit x et y de E :

$$(Ax, y) = (x, Ay) \qquad \text{donc} \qquad (x, Ax) \ \text{est réel.}$$

Dans les exemples ci-dessus, l'opérateur est hermitien si

$$N(s, t) = \bar{N}(t, s) , \qquad a_{ik} = \bar{a}_{ki} \ ;$$

en particulier, un noyau ou une matrice symétrique réels engendrent des opérateurs hermitiens. On dit qu'un opérateur hermitien est identique au conjugué de son transposé.

2. L'itération

Nous poserons $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, etc.; ces nouveaux opérateurs sont hermitiens si A l'est. On a, en effet:

$$(A^n x, y) = (A^{n-1} x, Ay) = \cdots = (Ax, A^{n-1} y) = (x, A^n y) .$$

Nous poserons: (1) $A^r x_0 = l_1 \ldots l_r x_r$ avec $||x_r|| = 1$ pour $r = 0, 1, 2 \ldots$

Le second membre de (1) sera l'*itéré* de rang r de x_0 et x_r le *conséquent* de rang r. Les conséquents sont donc toujours sur la sphère unité. Quant aux l_i ce sont les longueurs des itérés d'ordre un des différents conséquents:

$$l_i = ||A x_{i-1}|| \ .$$

On a, les x_r étant toujours normalisés, comme on le vérifie facilement:

$$A^p x_r = l_{r+1} \ldots l_{r+p} \, x_{r+p} \ . \tag{2}$$

Des produits scalaires tels que $(x_{2p}, x_{2q}) = (x_{2q}, x_{2p})$ sont toujours réels. On a:

$$(x_2 \, , \, x_0) = \frac{1}{l_2} (A x_1 \, , \, x_0) = \frac{1}{l_2} (x_1 \, , \, A x_0) = \frac{l_1}{l_2} (x_1 \, , \, x_1) = \frac{l_1}{l_2} \ ;$$

en vertu de l'inégalité de Schwarz $(x_2, x_0) \leqslant 1$ donc $l_1 \leqslant l_2$. De $(x_{p+2}, \ x_p) \leqslant 1$ on déduit de même $l_{p+1} \leqslant l_{p+2}$. On a donc, entre les l_i, les inégalités suivantes, tout à fait fondamentales pour la suite, et déjà établies par Kellogg pour la théorie des équations de Fredholm à noyau symétrique:

$$l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant \cdots \ . \tag{3}$$

Les longueurs des itérés de rang un des conséquents d'un élément ne peuvent pas décroître.

De (4) $l_1 \ldots l_r \geqslant l_1^r$ on déduit (5) $||A_r x|| \geqslant ||A x||^r$.

Posons: (6) $l = \lim l_i$; l existe: $l = + \infty$ ou $l =$ quantité finie sauf si $l_1 = 0$.

Si $l_1 = 0$ nous dirons que x_0 est antécédent de zéro: $||A x_0|| = 0$.

Les inégalités (3) ou (5) montrent que si l_1 n'est pas nul aucun conséquent ne sera antécédent de zéro.

Si l'on a quel que soit x de E, M étant un nombre indépendant de x,

$$||A x|| < M \, ||x|| \ ,$$

l'opérateur sera dit *borné*.

On démontre qu'un opérateur borné est défini dans tout l'espace et qu'il est uniformément continu, c'est-à-dire que

$$||A y - A x|| < \varepsilon \quad \text{pourvu que} \quad ||y - x|| < \eta \ .$$

Pour les opérateurs bornés on a $l \leqslant M$. En plus l'existence d'une infinité d'itérés est assurée quelque soit l'élément initial x_0.

3. Le produit infini $\overline{\omega}$ et l'éloignement des conséquents

Formons sur une suite de conséquents de x_0 le produit des quotients des longueurs par leur limite

$$\overline{\omega}(x_0) = \frac{l_1}{l} \cdot \frac{l_2}{l} \cdots , \tag{7}$$

si $l_1 = 0$ nous ne le formons pas; produit infini que nous avons déjà considéré en 1925*), mais que Kellogg n'introduisait pas. Les quantités $l(x_0)$ et $\overline{\omega}(x_0)$ sont des fonctionnelles de x_0 que nous étudierons plus tard. Puisque $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots \leqslant l$ on a $0 \leqslant \overline{\omega} \leqslant 1$. Posons encore, en omettant x_0:

$$\overline{\omega}_{p,p+r} = \frac{l_p}{l} \cdots \frac{l_{p+r}}{l} \; ; \quad \overline{\omega}_p = \frac{l_p}{l} \cdot \frac{l_{p+1}}{l} \cdots \; ; \quad \overline{\omega} = \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_{1\,,\,\infty} \; . \tag{8}$$

On a, comme on le vérifie sans peine, la dernière égalité n'étant valable que si l est fini:

$$(x_q \, , \, x_{q+2r}) = \frac{1}{l_{q+1} \cdots l_{q+2r}} (A^r x_q \, , \, A^r x_q) =$$

$$= \frac{l_{q+1} \cdots l_{q+r}}{l_{q+r+1} \cdots l_{q+2r}} = \frac{\overline{\omega}_{q+1\,,\,q+r}}{\overline{\omega}_{q+r+1\,,\,q+2r}} \; . \tag{9}$$

Si $\overline{\omega} \neq 0$, donc l fini on a $\lim\limits_{r \to +\infty} \overline{\omega}_{q+r+1\,,\,q+2r} = 1$ donc

$$\lim_{r \to +\infty} (x_q, x_{q+2r}) = \overline{\omega}_{q+1} \; . \tag{10}$$

Si $\overline{\omega} = 0$, je prétends que l'égalité (10) est encore vraie, $\overline{\omega}_{q+1}$ étant alors nul lui aussi.

En effet, on a quel que soit $r_1 < r$ en vertu de (9), le quotient des l_i diminuant lorsque r augmente:

$$0 < (x_q \, , \, x_{q+2r}) \leqslant (x_q \, , \, x_{q+2r_1}) \; .$$

Si $l = +\infty$ (10) est évident car les $l_{q+r+i} \to +\infty$ avec r; et si l est fini, on a par le rapport des $\overline{\omega}$:

$$\lim_{r \to +\infty} (x_q, x_{q+2r}) \leqslant \overline{\omega}_{q+1\,,\,q+r_1}$$

quel que soit r_1 et alors comme $\overline{\omega}_{q+1\,,\,+\infty} = 0$ on a bien (10).

---

*) Bulletin de la Société Mathématique de France.

Considérons, maintenant, la distance (véritable dans E_ω, en moyenne dans E_f) de deux conséquents de même parité. Son carré est

$$||x_q - x_{q+2r}||^2 = (x_q - x_{q+2r}, x_q - x_{q+2r}) = 2[1 - (x_q, x_{q+2r})] .$$

D'où par (10)

$$\lim_{r \to +\infty} ||x_q - x_{q+2r}||^2 = 2(1 - \overline{\omega}_{q+1}) . \qquad (11)$$

On peut poser, le produit scalaire étant formé d'éléments normalisés:

Cos de l'angle $x_q, x_{q+2r} = (x_q, x_{q+2r}) =$ cos de l'angle x_{q+2r}, x_q.

Les relations (9) montrent ceci: *L'angle x_q, x_{q+2r} et la distance de ces deux conséquents ne diminuent jamais lorsque r augmente.* L'angle est toujours inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

4. La convergence forte des conséquents, cas $\overline{\omega} \neq 0$

La convergence forte est définie dans E par le critère de Cauchy:

α) $||x^{n+p} - x^n|| < \varepsilon$ pourvu que $n > N(\varepsilon)$ quel que soit $p > 0$. Espace complet signifie qu'il existe alors un élément x de E et un seul tel que l'on ait:

β) $||x^n - x|| < \eta$ pourvu que $n > N(\eta)$.

Inversément β) implique α) par l'inégalité triangulaire. Nous écrivons $x = \lim x^n$.

Dans E_ω, β s'écrit, l'indice i marquant maintenant les coordonnées:

$$\sum_i |x_i - x_i^n|^2 < \varepsilon \quad \text{d'où} \quad x_i = \lim x_i^n, \quad \text{en particulier.}$$

Dans E_f

$$\int_0^1 |x(t) - x^n(t)|^2 \, dt < \varepsilon; \; x(t) = \text{limite en moyenne de } x^n(t).$$

Ceci dit: si $\overline{\omega}(x_0) \neq 0$, le second membre de (11) tend vers zéro car $\overline{\omega}_{q+1} \to 1$.

Donc les conséquents de x_0 convergent fortement vers un élément x de E.

L'on a d'ailleurs:

$$(x_{2q}, x) = (x, x_{2q}) = \overline{\omega}_{2q+1}(x_0) = \overline{\omega}_1(x_{2q}) \tag{12}$$

et

$$||x_{2q} - x||^2 = 2(1 - \overline{\omega}_{q+1}) .$$

L'angle et la distance de x_{2q} et de sa limite n'augmentent jamais avec q. Si $\overline{\omega} \neq 0$ l'angle en question est inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Si $\overline{\omega}(x_0) = 0$ alors par (11)

$$\lim_{r \to +\infty} ||x_q - x_{q+2r}||^2 = 2 \tag{12}$$

quel que soit q car $\overline{\omega}_{q+1} = 0$, ce qui est contraire au critère α) de la convergence forte. Toute suite $x_{q+2r'}$ extraite de x_{q+2r} donnerait lieu à la même relation (12) lorsque $r' \to +\infty$. Il est donc impossible d'extraire de la suite des conséquents de x_0 par A^2 une suite fortement convergente. En appelant avec M. Fréchet, *ensemble compact*, un ensemble tel que de toute suite infinie d'élément on puisse extraire une suite convergente, on peut affirmer, en résumé, ceci:

Théorème. Si $\overline{\omega}(x_0) \neq 0$, *les conséquents x_{2q} convergent fortement vers un élément x de E;*

si $\overline{\omega}(x_0) = 0$, *les conséquents x_{2q} forment un ensemble non compact pour la convergence forte.* Le cas $l_1 = 0$, étant excepté.

5. Cas $\overline{\omega} = 0$. Convergence faible des conséquents. Opérateurs singuliers

Nous allons montrer que si $\omega(x_0) = 0$, les x_q deviennent orthogonaux à tout élément y de E. Bien que de norme unité $||x_q|| = 1$; nous dirons conformément à l'usage qu'il converge faiblement vers zéro. Dans E_ω, $\lim (x_q)_i = 0$, quel que soit la coordonnée de rang i. Nous dirons que les x^n convergent faiblement vers x s'il existe un y élément x tel que

$$\lim (x^n, y) = (x, y)$$

quel que soit l'élément y de E. On sait que dans E_ω, voir Julia, T. II, et dans E_f, voir Banach: Théorie des opérateurs linéaires, Varsovie 1932, toute suite d'élément de normes bornées est compacte pour la convergence faible. Donc de toute suite de conséquents x_q on peut extraire une suite x_{2q_i} faiblement convergente. On aurait un x tel que

$$\lim (x_{2q_i}, y) = (x, y) \quad \text{quel que soit } y.$$

Mais pour $x = y$ on aurait:

$$\lim (x_{2q_i}, x) = (x, x) \quad \text{or} \quad (x_{2q_i}, x) = \lim (x_{2q_i}, x_{2q_j}),$$

x_{2q_i} jouant maintenant le rôle de y. Or cette limite, égale à $\overline{\omega}_{2q_i+1}$, est nulle; donc $(x, x) = 0$. Les limites faibles ne peuvent être que l'élément zéro. Je prétends que la suite x_q elle-même converge faiblement vers zéro. En effet, si les nombres (x_q, y) ne tendent pas vers zéro, quel que soit y, c'est qu'il existe un y et une suite x_{q_i} tels que

$$|(x_{q_i}, y)| > k > 0 .$$

Mais cela est impossible, car alors il existerait une nouvelle suite extraite de la précédente pour laquelle les modules tendraient vers zéro. Ce qui serait contradictoire.

En résumé. Si un opérateur hermitien fournit une infinité de conséquents normalisés d'un élément x_0 alors:

Si $\overline{\omega}(x_0) \neq 0$ *les* x_{2q} *convergent fortement vers un élément* x *de* E.

Si $\overline{\omega}(x_0) = 0$ *les* x_q *convergent faiblement vers zéro, donc deviennent orthogonaux à tout élément* y *de* E *:* $\lim (x_q, y) = 0$.

6. Autre définition de l et répartition asymptotique

On a, puisque $l_r \to l$:

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\| A^r x_0 \|}{\lambda^r} = \lim \frac{l_1 \ldots l_r}{\lambda^r} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda < l \\ \overline{\omega}(x_0) & \text{si } \lambda = l \\ 0 & \text{si } \lambda > l \end{cases} \quad \begin{array}{l} f \text{ fini ou infini ;} \\ \overline{\omega} = 0 \text{ ou non.} \end{array}$$

l est donc la plus petite valeur de λ pour laquelle cette limite n'est pas infinie et *cette valeur existe.*

On peut aussi écrire:

$$\lim \frac{1}{l^{2r}} A^{2r} x_0 = \overline{\omega}(x_0)\, x \; ; \; B(x_0) = \lim \frac{A^{2r}(x_0)}{l_1 \ldots l_{2r}} = \lim x_{2r}\,, \quad \|x_{2r}\| = 1 .$$

Si $\overline{\omega} \neq 0$ ces limites sont des points de E de norme non nulle, si $\overline{\omega} = 0$ il y a convergence faible vers zéro.

7. Les opérateurs réguliers et les opérateurs complètement continus

Un opérateur sera dit *régulier* s'il est borné et si pour tout x_0 non antécédent de zéro l'on a $\overline{\omega} \neq 0$. Le passage de A à A^n n'altère pas $\overline{\omega}$, il groupe les facteurs de n en n. Donc si A est régulier A^n l'est aussi et réciproquement. Le passage de x_0 à x_i change $\overline{\omega}_1$ en $\overline{\omega}_{i+1}$ et n'altère pas le fait pour $\overline{\omega}$ d'être nul ou non.

Un opérateur sera dit *complètement continu* (un abrégé cc), s'il est borné et s'il convertit une suite bornée quelconque x^i en une suite $y^i = A x^i$ formant un ensemble compact pour la convergence forte.

Un opérateur cc est régulier. En effet, on a $A\frac{x_q}{l_{q+1}} = x_{q+1}$ éléments qui formeraient un ensemble compact, il en serait de même des x_{2q} et par suite $\overline{\omega} \neq 0$ quel que soit x_0. *Si A^n est un opérateur cc alors A est régulier.* A^n serait régulier et $\overline{\omega}$ est le même pour A et A^n. Les opérateurs cc sont ceux de la théorie classique de Fredholm et des théories homologues. Soit, en effet, $N(s, t)$ un noyau réel, symétrique et continu sur l'ensemble $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Il est donc borné et uniformément continu. Posons:

$$\varphi(s) = \int_0^1 N(s, t) f(t)\, dt \qquad \text{avec} \qquad \int_0^1 f^2(t)\, dt = 1 .$$

On a

$$\varphi(s') - \varphi(s'') = \int_0^1 [N(s', t) - N(s'', t)] f(t)\, dt \; ;$$

$$|\varphi(s') - \varphi(s'')|^2 \leqslant \int_0^1 [\,]^2 dt \int_0^1 f^2 dt .$$

Or

$$[\,] < \varepsilon \quad \text{pourvu que} \quad |s' - s''| < y \quad \text{et} \quad |\varphi(s') - \varphi(s'')| < \varepsilon$$

sous la même condition, en vertu de l'inégalité de Schwarz. Les fonctions φ sont également continues et bornées. Elles forment un ensemble compact pour la convergence uniforme, donc la convergence forte. Les opérateurs cc recouvrent le cas classique du noyau symétrique continu dans la théorie de Fredholm. Exemple d'un opérateur donnant lieu à $\overline{\omega} = 0$. $Af = xf(x)$, (on multiplie par la variable) en normalisant sur l'intervalle $0, 1$. Prenons $f_0 = 1$ alors $A\,1 = x$, $A^2 1 = x^2$, ... $A^n 1 = x^n$.

$$l_1 \dots l_n = 1/N$$

avec

$$N^2 = \int_0^1 x^{2n}\, dx = \frac{1}{2n+1}$$

donc

$$l_n = \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}\,, \; l = 1\,, \; \overline{\omega} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdots = 0\,.$$

Les conséquents sont $x_n = \sqrt{2n+1}\, x^n$, ils tendent vers zéro sur tout l'intervalle $0 \leqslant x < 1$, mais pas uniformément;

$$(x_n\,, x_{n+2r}) = \frac{\sqrt{2n+1}\;\sqrt{2n+4r+1}}{2n+2r+1}$$

et sa limite pour $r \to +\infty$ est bien nulle. On aurait donc aussi

$$\lim \sqrt{2n+1} \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx = 0\,,$$

φ étant une fonction quelconque de carré sommable.

8. Les solutions de l'équation homogène, ou éléments propres

Nous appelons *élément propre* tout x de E solution de l'équation: $Ax = \nu x$; ν est appelée valeur propre. Ce sont les vecteurs de E_ω dont la direction est invariante par A, ou dans E_f les fonctions qui se reproduisent à un facteur près.

Si A est borné et $\overline{\omega}(x_0) \neq 0$; les x_{2q} convergent fortement vers un élément propre pour l'opérateur A^2. En effet, on peut écrire:

$$x_{2q} = x + g_{2q} \quad \text{avec} \quad \|g_{2q}\| \to 0 \quad \text{et} \quad l_q = l + \eta_q,\; \eta_q \to 0$$

alors

$$l_{2q+1}\, l_{2q+2},\, x_{2q+2} = A^2 x_{2q} = A^2 x + A^2 g_{2q} \quad \text{et} \quad l^2 x - A^2 x = F_{2q}\;;$$

$$F_{2q} = A^2 g_{2q} + g_{2q}\,(\;) - x(\eta_{2q+1} + \cdots)$$

autant de terme dont les normes tendent vers zéro avec $1|q$.

En vertu de l'inégalité triangulaire $\|u+v+w\| \leqslant \|u\| + \|v\| + \|w\|$, on montre que $\|F_{2q}\| \to 0$. On a donc bien

$$A^2 x = l^2 x \quad \text{avec} \quad x = \text{limite forte des } x_{2q}.$$

Posons

$$y' = x + \frac{1}{l} Ax \text{ d'où } Ay' = \quad ly' \quad , \; y' + y'' = \quad 2x = 2 \lim x_{2q}$$

$$y'' = x - \frac{1}{l} Ax \text{ d'où } Ay'' = -ly'', \; y' - y'' = \frac{2}{l} Ax = \frac{2}{l} \lim x_{2q+1} \, .$$

Donc, à la limite x par A^2 correspond deux éléments propres y' et y'' de valeur propre l et $-l$, l'un des deux peut être nul, mais pas les deux à la fois car $||y' + y''|| = 2$.

Nous appellerons à l'avenir l la *fréquence*. Il peut y avoir deux valeurs propres ν pour une même fréquence $\nu = \pm l$ et il y en a au moins une.

9. Quelques lemmes

α) *Pour tout opérateur régulier, une fréquence λ est la plus grande valeur que peut prendre $||Af_0||$ lorsque l'élément f_0 normalisé est orthogonal à tout élément propre de fréquence supérieur à λ.*

En effet, si $l_1(f_0) > \lambda$ on aurait $\lambda < l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots \leqslant l$ et les f_{2q} tendraient vers un élément propre f de fréquence $l > \lambda$ et non orthogonal à f_0, car $(f, f_0) = \overline{\omega}(f_0) \neq 0$. Et l'on a $||A(\varphi)|| = \lambda$.

Cette propriété est tout à fait fondamentale comme on sait dans la théorie des formes quadratiques.

Nous appellerons opérateur nul un A pour lequel $||Ax|| = 0$ quel que soit x de E.

Nous en ferons ici abstraction.

a) *Un opérateur régulier admet au moins une fréquence et un élément propre.*

En effet, il existe un x_0 donnant $l_1 > 0$ donc $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots$ puis l et $\overline{\omega} \neq 0$ d'où x puis y' ou y'' qui sont éléments propres. On voit combien cette méthode permet facilement de démontrer l'existence d'une solution au moins de l'équation homogène $Ax = \nu x$.

Il suffit d'ailleurs que $A(x_0)$ ne soit pas identiquement nul pour qu'il existe un élément propre.

b) *Les fréquences sont toutes réelles.* Les éléments propres sont supposés dans E naturellement.

En effet, $(x, Ax) = (x, \nu z) = \nu = (Ax, x) = (\nu x, x) = \bar{\nu}$. L'on a évidemment sur un élément propre: $\overline{\omega} = 1$ car $l_1 = l_2 = l_3 = l$.

c) *Deux éléments propres de fréquences différentes sont orthogonaux.*

On aurait: $Ax = \nu x$, $Ay = \mu y$ avec $\nu \neq \mu$ d'où

$$(x, Ay) = \mu(x, y) = (Ax, y) = \nu(x, y), \quad (\mu - \nu)(x, y) = 0$$

et $(x, y) = 0$.

Ces lemmes b) et c) sont classiques.

d) *Si un élément x_0 est orthogonal à un élément propre y tous ses conséquents le sont aussi, ainsi que les limites (forte ou faible) des x_{2q} et x_{2q+1}.*

On a en effet, si $Ay = py$:

$$(x_0, y) = \frac{1}{p^q}(x_0, A^q y) = \frac{1}{p^q}(A^q x_0, y) = \frac{l_1 \dots l_q}{p^q}(x_q, y).$$

Cette relation montre que si dans la suite $x_0, x_1, \dots x_q \dots$ l'un des éléments est orthogonal à y ils le sont tous. Si $\overline{\omega} \neq 0$, $\lim x_{2q} = x$, $\lim x_{2q+1} = \frac{1}{l} Ax$ et $\lim (x_{2q}, y) = \lim (x, y)$. Si $\overline{\omega} = 0$, la proposition sur x est évidente. Mais la réciproque ne sera pas vraie, on peut avoir $(x, y) = 0$ sans avoir $(x_{2q}, y) = 0$.

e) *Tout antécédent de zéro est orthogonal à tout élément propre.* En effet, on a $0 = l_1(x_1, y) = p(x_0, y)$.

f) *Si A^n est un opérateur cc, A n'a qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de fréquences dont le seul point d'accumulation est 0. En plus, à chaque valeur propre n'est attaché qu'un nombre fini d'éléments orthogonaux.*

En effet, soient ψ' et ψ'' deux éléments propres orthogonaux. On a

$$\|A^n\psi' - A^n\psi''\|^2 = \|\nu'^n\psi'^n - \nu'^n\psi''^n\|^2 = \nu'^{2n} + \nu''^{2n} \quad \text{car} \quad (\psi', \psi'') = 0.$$

Il est alors impossible d'avoir pour une suite S de ψ

$$\nu'^{2n} + \nu''^{2n} > k > 0$$

car l'opérateur A^n transforme toute suite S en une suite compacte. Donc S contiendrait une suite S', pour laquelle le premier terme des égalités ci-dessus tendrait vers zéro et par conséquent l'inégalité en k serait impossible. Les fréquences l n'ont que zéro comme point d'accumulation. Elles forment une suite finie ou dénombrable. A chaque valeur propre ν ne correspond qu'un nombre fini d'éléments propres orthogonaux; donc un nombre m d'éléments linéairement indépendants, s'il y en avait davantage, on formerait plus de m éléments orthogonaux par un procédé d'orthogonalisation bien connu.

Dans la théorie des équations de Fredholm à noyau symétrique, si un des noyaux itérés $N^n(s, t)$ est continu, l'opérateur A^n est cc et la théorie précédente s'applique. En particulier, en introduisant les valeurs fondamentales $\lambda_i = 1/\nu_i$ on a $\lim |\lambda_i| = +\infty$.

g) On sait que, en posant $g = \lim$ forte g_{2r}, on a $(g_0, g) = \overline{\omega}(g_0)$.
Posons $f = g_0 - \overline{\omega}(g_0)g$ d'où $(f, g) = 0$ car $(g, g) = 1$,
puis $g_0 = \overline{\omega}(g_0)g + f$.

On décompose ainsi un élément g_0 tel que $\overline{\omega}(g_0) \neq 0$ en deux éléments orthogonaux, l'un suivant un élément propre g et l'autre est un élément orthogonal à g.

h) *Si trois éléments x_0, x_0', x_0'' appartiennent à une même variété linéaire*

$$\alpha x_0 + \alpha' x_0' + \alpha'' x_0'' = 0 \qquad \alpha, \alpha', \alpha'' \text{ nombres complexes};$$

alors leurs fréquences l, l', l'' sont telles qu'aucune n'est supérieure aux deux autres. Si l'on itère r fois par A on aurait:

$$\alpha l_1 \ldots l_r x_r + \alpha' l_1' \ldots l_r' x_r' + \alpha'' l_1'' \ldots l_r'' x_r'' = 0 \ .$$

Si $l > \lambda$ et $l' < \lambda$, $l'' < \lambda$ en divisant par λ^r le coefficient de x_r tendrait vers l'infini et les deux autres vers zéro. Cela est impossible, les éléments x_r, x_r', x_r'' étant normalisés.

i) *Lemme classique sur la convergence forte des séries.*

Pour qu'une série procédant suivant des éléments orthogonaux normalisés converge fortement, il faut et il suffit que la série des carrés des modules des coefficients soit convergente.

Posons

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i \qquad (\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

on a

$$\| \varphi_{n+p} - \varphi_n \|^2 = \| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \psi_i \|^2 = \sum_{n+1}^{n+p} | a_i |^2 \ .$$

Le critère de Cauchy pour la convergence forte des φ_n vers un élément φ est le même que pour la convergence ordinaire de la série. On peut donc poser

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i \ , \qquad \text{si} \quad \sum_i |a_i|^2 \quad \text{converge} \ .$$

10. Lemme sur la répartition des fréquences

Soient A un opérateur hermitien et ν_i une succession de valeurs propres distinctes, ψ_i des éléments propres correspondants $A\psi_i = \nu_i \psi_i$. Nous supposons $|\nu_i| < N$. Considérons la série où tous les a_i sont différents de zéro.

$$\varphi = \Sigma a_i \psi_i \quad \text{avec} \quad \Sigma |a_i|^2 \text{ convergente.}$$

Puis posons $\nu = \overline{\text{borne}}\ |\nu_i|$ (borne supérieure des fréquences introduites).

On a $A^r \varphi = \sum\limits_i a_i \nu_i^r \psi_i$ série fortement convergente.

Puis

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{||A^r \varphi||^2}{\lambda^{2r}} = \lim \sum |a_i|^2 \left(\frac{\nu_i}{\lambda}\right)^{2r} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda < \nu \\ |a_i|^2 & \text{si } \lambda = \nu = |\nu_i| \\ 0 & \text{si } \lambda = \nu > |\nu_i| \\ 0 & \text{si } \lambda > \nu\ . \end{cases}$$

Donc 1) $l(\varphi) = \nu = \overline{\text{borne}}$ des fréquences introduites.

2) $\overline{\omega}(\varphi) = |a_j|$ si la $\overline{\text{borne}}\ |\nu_i|$ est atteinte pour ν_j.

3) $\overline{\omega}(\varphi) = 0$ si la $\overline{\text{borne}}\ |\nu_i|$ n'est pas atteinte.

Théorème. En conséquence, *si l'opérateur est régulier,* $\overline{\omega}(\varphi) \neq 0$ quel que soit φ de E, *il est impossible qu'une suite de fréquences bornées n'atteignent pas sa borne supérieure.*

Une suite de fréquences bornées distinctes contient toujours une fréquence supérieure à toutes les autres si l'opérateur est régulier. Les points d'accumulation des fréquences ne peuvent être approchés que par des valeurs plus fortes. Tout sous ensemble de fréquences contient un plus grand élément.

Les fréquences des opérateurs réguliers peuvent donc être numérotées au moyen des nombres ordinaux transfinis de classe II que nous appellerons les α :

$$1, 2, 3, \ldots \omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2 \ldots\ 2\omega,\ 2\omega + 1, \ldots .$$

En prenant les fréquences l^α par ordre décroissant quelconque, chaque fréquence a une suivante, sans avoir nécessairement de précédente: $l^\alpha > l^{\alpha+1}$.

Posons $l^\alpha - l^{\alpha+1} = i_\alpha$, ces intervalles sont différents de zéro. Il y en a un nombre fini entre $M > 1$ et 1, un nombre fini aussi entre 1 et M^{-1}, entre M^{-1} et $M^{-2}, \ldots$. L'ensemble des fréquences inférieures à M est donc dénombrable quel que soit M.

L'ensemble des fréquences d'un opérateur régulier est dénombrable.

11. La décomposition spectrale.

Opérateur cc. Soit $f = f_0^0$ un élément quelconque de E. Formons $l(f)$ puis $\overline{\omega}(f)$ et posons:

$$
\begin{array}{llll}
f_0^0 = \overline{\omega}(f_0^0)\, f^0 + f_0^1 & \text{avec} & f^0 = \lim f_{2r}^0 & l^0 = l(f_0^0) = l(f^0) \\
f_0^1 = \overline{\omega}(f_0^1)\, f^1 + f_0^2 & ,, & f^1 = \lim f_{2r}^1 & l^1 = l(f_0^1) = l(f^1) \\
f_0^2 = \overline{\omega}(f_0^2)\, f^2 + f_0^3 & ,, & f^2 = \lim f_{2r}^2 & l^2 = l(f_0^2) = l(f^2)
\end{array}
$$

etc.

La réduction serait arrêtée au rang n si $l_1^n = 0$, donc la première fois que l'on rencontrerait un reste f_0^n antécédent de zéro. Je prétends que l'on a toujours $l^{m+1} < l^m$ l'égalité se présentant la première fois si $m = n$.

En effet, on a toujours en vertu de $l(f_0^m) = l(f^m)$ et du lemme h) sur trois fréquences:

$$l(f_0^{m+1}) \leqslant l(f_0^m) = l(f^m) \,.$$

Si l'égalité était réalisée on aurait en itérant l'équation de rang m:

$$l_1^m \dots l_{2r}^m f_{2r}^m = \overline{\omega}(f_0^m)\, l^{m2r} f^m + l_1^{m+1} \dots l_{2r}^{m+1} f_{2r}^{m+1}$$

d'où, en divisant par l^m à la puissance $2r$ et passant à la limite:

$$\overline{\omega}(f_0^m)\, f^m = \overline{\omega}(f_0^m)\, f^m + \overline{\omega}(f_0^{m+1})\, f^{m+1}$$

ce qui entraîne $l_1^{m+1} = 0$ car $\overline{\omega}(f_0^{m+1})$ serait sans cela différent de zéro ainsi que f_0^{m+1}. L'on aurait $l_1^m = l^m$.

On a bien $l^{m+1} < l^m$ jusqu'à $m = n$ (n fini ou inexistant). En ajoutant les équations membre à membre, on trouve:

$$f = \sum_{i=0}^{n} \overline{\omega}(f_0^i)\, f^i + h \qquad n \text{ fini ou infini et } \|A(h)\| = 0 \,.$$

D'où l'équivalent du théorème d'Hilbert-Schmidt (avec la convergence forte):

$$f = \sum \tfrac{1}{2}\, \overline{\omega}(f_0^i)\, (y'^i + y''^i) + h \,, \quad 2f^i = y'^i + y''^i \,,$$

et

$$Af = \tfrac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \overline{\omega}(f_0^i)\, (\nu_i y'_i - \nu_i y''_i) \,, \quad n \text{ fini ou infini.}$$

Tout conséquent par A d'un point de E est développable en une série d'éléments propres.

Si $n = +\infty$, h est le résidu après le passage à la limite sur m.

Remarque. Le reste h étant antécédent de zéro est orthogonal à tous les éléments propres y'_i, y''_i d'où deux conséquences: les $\overline{\omega}(f_0^i)$ sont les coefficients de Fourier de f et l'on a

$$||f||^2 = \sum_{i=0}^{n} \overline{\omega}^2(f_0^i) + ||h||^2 , \qquad n \text{ fini ou infini}.$$

Que h soit orthogonal à toutes f^i se voit aussi sur les équations de la réduction progressive des restes successifs: f_0^1 est orthogonal à f^0 (lemme g), f^1 aussi, donc f_0^2 est orthogonal à f^0 et f^1, et ainsi de suite, f_0^m est orthogonal à f^{m-1} et à tous les f^{m-1} car f^m l'est, ainsi que f_0^{m-1}.

Cette réduction ne fait intervenir que les éléments propres y^i en lesquels l'élément donné se développe effectivement. Il n'est pas nécessaire de connaître tous les éléments propres. En plus les termes apparaissent dans l'ordre des fréquences décroissantes.

12. La décomposition spectrale par réduction transfinie. Opérateurs réguliers non $c\,c$.

Pour les opérateurs non cc mais encore ,,réguliers'', les m sont empruntés à une suite d'ordinaux transfinis α. Il faut ici étudier ce qui se passe lorsque l'on épuisse une suite infinie de α pour repartir ensuite. On a

$$f_0^\alpha = \overline{\omega}(f_0^\alpha)\, f^\alpha + f_0^{\alpha+1} \;, \quad l^{\alpha+1} < l^\alpha \;.$$

Le procédé serait arrêté si $l_1(f_0^{\alpha+1}) = 0$, ce qu'il faut envisager c'est donc $\lim l^\alpha = \lambda$; β désignant l'ordinal qui marque l'épuisement de cette suite de α.

On posera donc:
$$f = \sum_{\alpha<\beta} \overline{\omega}(f_0^\alpha)\, f^\alpha + f_0^\beta \;.$$

Je prétends que si f_0^β n'est pas antécédent de zéro:

$$l^\beta \leqslant \lambda \;; \qquad \text{si non } l^\beta = \lambda + k \quad \text{avec} \quad k > 0 \;;$$

mais on aurait $l^\beta > l^\gamma > l^{\gamma+1} > \cdots$ pour un γ de la suite au moins. Et alors

$$f_0^\gamma = \sum_{\alpha\geq\gamma}^{\alpha<\beta} \overline{\omega}(f_0^\alpha)\, f^\alpha + f_0^\beta = \varphi + f_0^\beta \;,$$

ce qui est contradictoire avec le lemme h) des trois fréquences, car l de f_0^β serait supérieur à celui de f_0^γ et à celui de φ. Si f_0^β est antécédent de zéro, on suspend la réduction, sans cela on la poursuit. On aura donc encore ici

$$||f||^2 = \sum_{\alpha<\beta} \overline{\omega}^2(f_0^\alpha) + ||f_0^\beta||^2 \ .$$

Et l'on peut écrire:

$$f = \sum_\alpha \overline{\omega}(f_0^\alpha)\, f^\alpha + h \qquad \text{avec} \qquad ||Ah|| = 0 \quad \text{et} \quad (f^\alpha, h) = 0$$

$$Af = \sum_\alpha \tfrac{1}{2}\, \overline{\omega}(f_0^\alpha)\ (\nu_\alpha y'_\alpha - \nu_\alpha y''_\alpha)$$ théorème d'Hilbert-Schmidt étendu,

et $||f||^2 = \sum \overline{\omega}^2(f_0^\alpha) + ||h||^2$.

S'il y avait doute au sujet du sens de la série étendue aux ordinaux transfinis de classe II, rappelons que leur ensemble est ici dénombrable et que l'on peut toujours écrire, en intervertissant s'il le faut les fréquences

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\omega}(f_0^n)\, f^n + h \qquad \text{(de même pour les autres séries)}.$$

13. Quelques remarques sur les opérateurs réguliers.

A. Soit e le spectre, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les fréquences de A et e' son dérivé, c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation des e. L'ensemble $e + e'$ est encore numérotable dans l'ordre décroissant par des ordinaux transfinis de classe II.

En effet, un point d'accumulation de $e + e'$ ne peut être approché que par valeurs plus grandes. Sans cela, il y aurait dans la suite approchante une infinité de points de e', mais les points de e' entraînent avec eux des points de e.

B. Prenons un élément x_0 non antécédent de zéro. On a

$(x_{i-1}\,,\ x_{i+1}) = \dfrac{l_i}{l_{i+1}}$. Donc, si $l_i = l_{i+1}$

$$||x_{i-1} - x_{i+1}||^2 = 0, \ x_{i-1} = x_{i+1} = x_{i+3} = \cdots \ .$$

Inversément, si $l_i = l_{i+1}$ alors $l_2 = l_3$. En effet, on a en développant x_0 suivant le § 13:

$$x_0 = \sum_\alpha c_\alpha\, x^\alpha + h\ , \qquad A^i x_0 = l_1 \ldots l_i x_i = \sum_\alpha c_\alpha\, l_\alpha^i\, x^\alpha$$

d'où par soustraction, puisque $x_{i-1} = x_{i+1}$

$$\sum_\alpha c_\alpha\, l_\alpha^{i-1} \left(1 - \frac{l_\alpha^2}{l_i\, l_{i+1}}\right) x^\alpha = 0 \ .$$

Mais les x^α du développement de x_0 sont tous orthogonaux, et les l^α tous différents, donc il n'y aurait qu'un c_α différent de zéro et alors $x_0 = cx^\alpha + h$ d'où $l_2 = l_3 = \cdots = l_\alpha$. Corollaire si $l_2 < l_3$ alors $l_2 < l_3 < l_4 < \cdots$.

14. L'équation avec second membre

Nous avons vu au § 13 que l'on peut poser pour tout f de E et tout A régulier

$$f = \Sigma y_\alpha y^\alpha + h \quad \text{avec} \quad A y^\alpha = \nu_\alpha y^\alpha . \tag{1}$$

$$\Sigma |y_\alpha|^2 \ \text{convergente.}$$

Soit alors à résoudre en φ et ν l'équation où le second membre f est donné

$$\varphi - \frac{1}{\nu} A \varphi = f . \tag{2}$$

On décompose f comme ci-dessus et l'on pose

$$\varphi = f + \sum_\alpha \frac{y_\alpha \nu_\alpha}{\nu - \nu_\alpha} y^\alpha \tag{3}$$

série qui converge fortement si $|\nu - \nu_\alpha| > k > 0$, car les y^α sont orthogonaux et les $|\nu_\alpha|$ bornés supérieurement. φ satisfait à (2); en effet, en substituant, il resterait:

$$\sum y_\alpha \nu_\alpha y^\alpha \left[\frac{1}{\nu - \nu_\alpha}\left(1 - \frac{\nu_\alpha}{\nu}\right) - \frac{1}{\nu}\right] = 0$$

ce qui est bien vrai.

Si ν est point d'accumulation des ν_α sans être une de ces valeurs-là, la solution (3) est encore valable pourvu que

$$\sum \frac{|y_\alpha|^2}{(\nu - \nu_\alpha)^2} \quad \text{converge.}$$

La solution $\varphi(\nu)$ admet les singularités ν_α et leurs points d'accumulation qui forment au total un ensemble dénombrable. Il peut y avoir des pôles, des limites de pôles, limite de limite de pôles, etc., tous réels.

Si ν n'est pas une valeur propre de l'opérateur, cette solution (3) est unique, car s'il y en avait deux φ' et φ'' leur différence $\varphi' - \varphi''$ serait dans E et serait solution de l'équation homogène pour la valeur ν qui n'est pas valeur propre. Donc $\varphi' = \varphi''$. Si ν est valeur propre ne figurant pas dans (1), la solution générale de (2) s'obtient en ajoutant à la solution particulière (2), la solution générale ψ de l'équation homogène pour cette valeur ν. Puisque cette solution ψ n'apparaît pas dans le développement de f c'est que l'on a alors $(f, \varphi) = 0$, condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi.

La théorie précédente s'applique aux équations intégrales et aux équations linéaires à matrice hermitienne

$$x_i - \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, x_k = c_i \quad \text{avec} \quad a_{ik} = \bar{a}_{ki} \ ,$$

chaque fois que l'opérateur correspondant est régulier.

15. Système complet, égalité de Bessel, série de Fourier

Soit y^i un système orthonormal et a_i les coefficients de Fourier relatifs aux y^i d'un élément quelconque y de E.

$$(y^i\,,\; y^j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (y^i\,,\; y) = a_i \ .$$

a) Le système est complet s'il n'existe aucun élément normalisé orthogonal à tous les y^i.
b) L'égalité de Bessel a lieu si $||y||^2 = \Sigma |a_i|^2$ quel que soit y.
c) La série de Fourier est légitime, dans le sens de la convergence forte, pour tout y, si l'on a:

$$y = \Sigma a_i y^i \, .$$

Ces trois faits s'entraînent mutuellement. Démonstration classique.
En effet, on peut écrire

$$y = \Sigma a_i y^i + h \ , \quad (y^i, h) = 0 \ , \quad ||y||^2 = \Sigma |a_i|^2 + ||h||^2 \, .$$

Alors, si a) $||h|| = 0$ alors b) et c). Si b), il existe un $a_i \neq 0$ pour tout $||y|| = 1$, donc a); si c) alors $||h|| = 0$ pour tout y donc b) donc a).

Nous dirons qu'un opérateur est *complet* si aucun élément de E autre que zèro n'est antécédent de zéro: $||Ax|| = 0$ entraîne $||x|| = 0$.

Le systeme y^i des éléments propres d'un opérateur complet est complet. En effet, on a toujours, quel que soit y de E, puisqu'il n'existe pas d'antécédent h de zéro:

$$y = \Sigma a_i y^i \, ,$$

ce qui est le point b) d'où a). Réciproquement, *si le système des solutions propres est complet l'opérateur est complet.* Car les développements d'un y quelconque est unique

$$y = \Sigma a_i y^i , \qquad A y = \Sigma a_i \nu_i y^i$$

avec $||A y||^2 = \Sigma |a_i \nu_i|^2$ et l'un au moins des a_i est différent de zéro, car l'égalité de Bessel a lieu, donc $||A y|| > 0$.

16. L'équation de première espèce. Théorème de Picard

Soit A un opérateur régulier complet; y^i ses éléments propres. On a $y = \Sigma a_i y^i$ avec $\Sigma |a_i|^2$ convergente, et $A y^i = \nu_i y^i$. Formons $z = \Sigma \frac{a_i}{\nu_i} y^i$ en supposant $\Sigma \left| \frac{a_i}{\nu_i} \right|^2$ convergente. Alors $Az = y, z$ est un antécédent de y. C'est le seul, tout autre z' donnerait $A(z - z') = 0$ d'où $z = z'$. La condition est donc suffisante. (Σ en i peutêtre un Σ en α, ordinaux tranfinis.) D'autre part, s'il existe un z, il est développable suivant les $y^i : z = \Sigma z_i y^i$; $\Sigma |z_i|^2$ converge mais $a_i = z_i \nu_i$ donc $\Sigma \left| \frac{a_i}{\nu_i} \right|^2$ converge.

Nous avons pour le moment montré, en particulier, combien cette méthode, fondée sur les inégalités $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots$ et sur $\overline{\omega}$, permet de retrouver rapidement les résultats classiques de l'équation de Fredholm à noyau symétrique. Car sur nos seize paragraphes, on peut, pour reconstruire cette théorie, faire abstraction des § 5, 6, 10, 12 et 13, et dans ceux qui restent du cas $\overline{\omega} = 0$ qui est toujours le plus délicat.

Les opérateurs complètement continus de la théorie classique sont un cas particulier des opérateurs réguliers $\overline{\omega} \neq 0$, mais le symbolisme est presque le même dans les deux cas.

Nous poursuivrons dans un prochain article l'étude des opérateurs irréguliers, par exemple de ceux qui répondent à un spectre continu.

(Reçu le 14 décembre 1942.)