Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs.

Autor: Martinelli, Enzo di

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14896

Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs

Di Enzo Martinelli, Roma

Introduzione

1. In due recenti note[1]), *Rud. Fueter* ha dato un'interessante dimostrazione di un classico teorema di *Hartogs* per le funzioni analitiche di due o più variabili complesse. Nello spazio $2n$-dimensionale S_{2n}, ove si rappresentano le n variabili complesse $z_1, \ldots, z_n$, sia D_{2n} un dominio $2n$-dimensionale, univalente e limitato, con il contorno costituito da una ipersuperficie chiusa irriducibile Γ_{2n-1}. Il teorema di *Hartogs*, cui ci si riferisce, afferma che: "Ogni funzione $f(z_1, \ldots, z_n)$, $n > 1$, analitica regolare ed univocamente definita su Γ_{2n-1}, può prolungarsi analiticamente in modo regolare ed univoco in tutto il dominio D_{2n}".

La dimostrazione citata è ottenuta da *Fueter* applicando l'idea suggestiva, e già manifestantesi feconda, di subordinare la teoria delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse alla teoria delle funzioni regolari di una variabile quaternione o di una variabile ipercomplessa più generale.

Mi propongo qui di riottenere il teorema di *Hartogs* ricalcando nella sua linea concettuale il ragionamento di *Fueter*, ma restando nell'ambito della teoria delle funzioni di ordinarie variabili complesse. A questo scopo mi appoggio sopra una formula integrale già da me stabilita per le funzioni analitiche di n variabili complesse[2]), e sull'uso sistematico dell'operazione di differenziazione esterna delle forme differenziali, introdotta da *E. Cartan*, ciò che mi permette di superare nella maniera più spedita le difficoltà essenziali, in guisa che la dimostrazione risultante in definitiva per il teorema di *Hartogs* mi sembra possa considerarsi come notevolmente semplice.

La formula integrale cui ho ora alluso (e che è ricordata al n. 2) permette di esprimere una $f(z_1, \ldots, z_n)$ analitica in un dominio D_{2n} mediante i valori che la funzione assume sul contorno Γ_{2n-1} di D_{2n}, con un inte-

---

[1]) *R. Fueter*, Über einen Hartogs'schen Satz, Comm. Math. Helvetici, vol. 12 (1939), pag. 75; e Über einen Hartogs'schen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von n komplexen Variablen, ibidem, vol. 14 (1942), pag. 394.

[2]) Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse, Mem. della R. Accad. d'Italia, vol. IX (1938), pag. 269.

grale $(2n-1)$-plo sopra Γ_{2n-1}. Benché tale formula si riduca per $n=1$, com'è naturale, all'ordinaria formula di *Cauchy*, essa ha tuttavia una struttura formale nettamente diversa da quest'ultima, per modo che il ragionamento che conduce al teorema di *Hartogs* viene a cadere completamente per $n=1$. E si sa bene che questo teorema non sussiste per le funzioni di una sola variabile.

D'altra parte la formula di *Cauchy* può estendersi al caso di n variabili anche con un'altra formula di struttura formale più prossima al caso $n=1$, nella quale appare però una integrazione sopra una varietà chiusa di dimensione n anziché $2n-1$; varietà che, quando si presenti la formula nel suo aspetto più generale, è vincolata soltanto da certe condizioni topologiche, già da me[3]) determinate per $n=2$, e da *B. Segre*[4]) per n qualunque, e che sono più oltre ricordate (n. 7).

Ebbene, in una seconda parte di questo lavoro, dò un'altra dimostrazione del teorema di *Hartogs* basata appunto sull'applicazione di questa seconda formula integrale. La dimostrazione (che espongo per semplicità nel caso $n=2$, ma che è facilmente estensibile al caso generale) è limitata all'ipotesi restrittiva che la ipersuperficie Γ_3, ove è assegnata la $f(z_1, z_2)$, sia contorno di un dominio c o n v e s s o. Penso nondimeno che la dimostrazione possa presentare qualche interesse, perché essa mette in luce le ragioni topologiche che determinano la validità del teorema d'*Hartogs* per $n>1$ e la non validità per $n=1$. Ecco, in breve, di cosa si tratta.

Assegnata la funzione analitica regolare $f(z)$ sopra una linea chiusa irriducibile Γ_1 (delimitante un dominio D_2 del piano ove si distende la variabile complessa z), la formula

$$g(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} \tag{1}$$

definisce una funzione $g(\zeta)$ regolare in tutti i punti interni a D_2. D'altronde la $f(z)$, per essere regolare su Γ_1, resta in conseguenza definita, in modo regolare ed univoco, in tutta una corona Σ_2 comprendente Γ_1 all'interno. Ora, se ζ è un punto della corona interno a quella parte, Σ_2', di Σ_2 che appartiene a D_2, il secondo membro della (1) darebbe, in base alla formula di *Cauchy*, il valore $f(\zeta)$ e in conseguenza varrebbe il teorema

---

3) La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse, Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXV, s. 6ª, gennaio 1937, pag. 33.

4) *B. Segre*, Sull'estensione della formula integrale di Cauchy e sui residui degli integrali n-pli, nella teoria delle funzioni di n variabili complesse, Atti del 1º Congresso dell'Un. Mat. Ital., aprile 1937, pag. 174.

d'*Hartogs*, qualora la linea Γ_1 potesse soddisfare entro Σ_2' alle condizioni topologiche occorrenti per la validità della formula di *Cauchy* (cioè di essere omologa a zero ed avvolgente il punto ζ), come vi soddisfa entro D_2. Questo non accade; mentre la proprietà topologica in certo senso analoga a quella che qui occorrerebbe, vale invece per $n > 1$, e ciò sostanzialmente a causa del maggior dislivello che intercede tra la dimensione $2n$ di uno strato Σ_{2n} comprendente Γ_{2n-1} all'interno, e la dimensione n della varietà d'integrazione, tracciata su Γ_{2n-1}, che appare nella estensione della formula di *Cauchy* nella seconda forma.

Osserverò infine che il ragionamento da me sviluppato in questa seconda dimostrazione del teorema d'*Hartogs* ha qualche rassomiglianza con quello su cui *F. Severi*[5]) basò la dimostrazione del suo analogo teorema, valevole per le funzioni analitiche di una variabile reale e di una complessa, e dal quale egli dedusse il teorema d'*Hartogs* medesimo.

I.

Richiamo della prima formula integrale

2. Cominciamo col ricordare la prima formula integrale valida per le funzioni analitiche di n variabili complesse, cui si è sopra alluso. Sia $f(z_1, \ldots, z_n)$ analitica regolare in un dominio D_{2n}, contorno Γ_{2n-1} incluso.

Il valore di f in ogni punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *interno* a D_{2n}, può esprimersi, mediante i valori che la f stessa assume sul contorno Γ_{2n-1}, colla formula:

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_{2n-1}} \frac{f(z_1, \ldots, z_n) \sum_1^n{}_\alpha (-1)^{\alpha-1} (\bar{z}_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha)\, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots_{[\alpha]} \ldots, \bar{z}_n)}{\left(\sum_1^n{}_\alpha (z_\alpha - \zeta_\alpha)(\bar{z}_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha)\right)^n}, \tag{2}$$

dove s'indicano con sopralineature i valori complessi coniugati, e con $d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots_{[\alpha]} \ldots, \bar{z}_n)$ s'intende il differenziale di grado $2n-1$, $dz_1 \cdots dz_n d\bar{z}_1 \cdots d\bar{z}_{\alpha-1} d\bar{z}_{\alpha+1} \cdots d\bar{z}_n$, nel quale manca l'elemento $d\bar{z}_\alpha$ [6]).

---

[5]) *F. Severi*, Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa, Rend. della R. Accad. dei Lincei, Vol. XV, s. 6a, aprile 1932, pag. 487.

[6]) Alla formula (2) può venir dato un aspetto più semplice (che è non però qui opportuno), una volta introdotta sopra l'ipersuperficie Γ_{2n-1} una certa congruenza $[s]$ di linee, come ho dimostrato nel lavoro: Studio di alcune questioni della teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse coll'ausilio del calcolo differenziale assoluto, Mem. della R. Accad. d'Italia, vol. XII (1942), pag. 143, n. 17 e Oss.

La (2) sussiste per una conveniente scelta della orientazione di Γ_{2n-1}, che non occorre qui ricordare, e, una volta dimostrata nell'ipotesi che D_{2n} si riduca ad una $2n$-cella, vale immutata per un dominio D_{2n} qualunque il cui contorno Γ_{2n-1} sia anche eventualmente spezzato in più cicli irriducibili, bastando, per persuadersi di questo, ripetere un ragionamento ben noto, dopo aver decomposto D_{2n} in $2n$-celle.

Due proposizioni fondamentali

3. Suppongasi ora che la funzione $f(z_1, \ldots, z_n)$ sia definita, analitica e regolare, soltanto sul contorno irriducibile Γ_{2n-1} del dominio D_{2n}, nelle ipotesi del teorema d'*Hartogs* (n. 1). Si può nondimeno considerare ancora l'integrale a secondo membro della (2), essendo $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un punto *interno*, ovvero anche un punto *esterno*, a Γ_{2n-1}. Il risultato dell'integrazione sarà, a priori, in ogni caso una funzione analitica $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$ delle variabili $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n$, considerate come indipendenti, poiché è una funzione analitica di quelle variabili la funzione integranda. Indicata brevemente la forma differenziale di grado $2n - 1$ a secondo membro della (2) con $\omega(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$ (ove si son messe in evidenza soltanto le variabili che non sono variabili d'integrazione), si ha cioè:

$$g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_{2n-1}} \omega(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n) \, . \qquad (3)$$

Ebbene, proveremo (nn. 5, 6) i due fatti fondamentali seguenti:

a) *Se* $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *è interno a* Γ_{2n-1}, *la funzione* g *è indipendente dalle variabili* $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n$, *e risulta quindi funzione analitica regolare di* $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$;

b) *Se* $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *è esterno a* Γ_{2n-1}, *la funzione* g *è identicamente nulla.*

Dimostrazione del teorema d'Hartogs

4. Una volta stabiliti a) e b), la dimostrazione del teorema di *Hartogs* si ottiene immediatamente seguendo *R. Fueter*. Invero, poiché per ipotesi $f(z_1, \ldots, z_n)$ è analitica regolare su Γ_{2n-1}, in ogni punto M di Γ_{2n-1} $f(z_1, \ldots, z_n)$ è sviluppabile in una serie n-pla di potenze, ed esiste un'ipersfera di centro M e raggio massimo, nel cui interno la serie converge. Al variare di M su Γ_{2n-1} i raggi delle ipersfere hanno un minimo non nullo,

come si prova con un ragionamento consueto; perciò la $f(z_1, \ldots, z_n)$ esiste ed è regolare in tutto uno strato $2n$-dimensionale, Σ_{2n}, comprendente all'interno Γ_{2n-1}. Sia Γ'_{2n-1} un'ipersuperficie chiusa appartenente a Σ_{2n}, interna e prossima a Γ_{2n-1}. Se $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ è un punto interno allo strato Σ'_{2n}, contenuto in Σ_{2n} e delimitato da Γ_{2n-1} e Γ'_{2n-1}, la formula (2), applicata nel dominio Σ'_{2n}, dà

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left\{ \int\limits_{\Gamma_{2n-1}} \omega - \int\limits_{\Gamma'_{2n-1}} \omega \right\},$$

con convenienti orientazioni di Γ_{2n-1} e Γ'_{2n-1}.

Ora, in virtù di b) il secondo integrale è nullo, onde risulta, per $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ interno a Σ'_{2n},

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_{2n-1}} \omega \quad ;$$

e poiché il secondo membro della precedente rappresenta, in virtù di a), una funzione analitica regolare in ogni punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ interno a Γ_{2n-1}, questa funzione coincide con $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ per $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ interno a Σ'_{2n}, e si conclude col teorema d'*Hartogs*.

Dimostrazione del teorema a)

5. Per stabilire l'affermazione a), ricordiamo che la forma differenziale ω a secondo membro della (3) è integrabile, vale a dire che si annulla identicamente il differenziale di *Cartan* $d\omega$. Questo fatto, che è di verifica immediata e che trovasi nel lavoro citato in [2]), trae seco, in base ad un teorema fondamentale, che esiste una forma differenziale di grado $2n-2$, Ω, della quale ω è *differenziale esatto*: $d\Omega = \omega$ [7]). La dimostrazione stessa del teorema citato offre il mezzo di costruire una forma Ω (che, si sa, risulta definita soltanto a meno della più generale forma differenziale dello stesso grado, la quale sia a sua volta differenziale esatto di una forma di grado $2n-3$). Si ottiene così, per esempio,

$$\Omega = \sum_2^n {}_\beta \frac{(-1)^{\beta-1}}{n-1} f(z_1, \ldots, z_n) \frac{\bar{z}_\beta - \bar{\zeta}_\beta}{z_1 - \zeta_1} r^{2-2n} d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_2, \ldots_{[\beta]} \ldots, \bar{z}_n), \tag{4}$$

[7]) Cfr. p. es. *E. Goursat*, Leçons sur le problème de Pfaff, Paris, J. Hermann (1922), pag. 106.

ove si è indicato, per semplicità di scrittura, con $r^2 = \sum_1^n {}_\alpha (z_\alpha - \zeta_\alpha)(\bar{z}_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha)$ il quadrato della distanza del punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ dal punto $(z_1, \ldots, z_n)$ che scorre su Γ_{2n-1}. La verifica della relazione $d\Omega = \omega$ è anch'essa immediata.

Si osserverà che nella (4) la variabile z_1 ha un ufficio privilegiato di fronte alle altre variabili $z_2, \ldots, z_n$. Ma è evidente, a causa della simmetria della forma ω rispetto a tutte le variabili $z_1, \ldots, z_n$, che una forma Ω', analoga alla (4), nella quale l'ufficio privilegiato sia tenuto anziché dalla variabile z_1, da un'altra qualunque delle variabili $z_2, \ldots, z_n$, soddisfa ancora alla $d\Omega' = \omega$.

Se nelle forme Ω ed ω si pensa ora $\bar{\zeta}_1$ come un parametro indipendente, e si deriva rispetto ad esso, si ottiene: $d\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_1}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}_1}$. D'altronde dalla (4) si ha:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_1} = \sum_2^n {}_\beta (-1)^{\beta-1} f(z_1, \ldots, z_n)(\bar{z}_\beta - \bar{\zeta}_\beta)\, r^{-2n}\, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_2, \ldots_{[\beta]} \ldots, \bar{z}_n)\,; \tag{5}$$

donde appare che, quando il punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ si mantiene interno a Γ_{2n-1}, la forma $\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_1}$ è *regolare ed uniforme* su Γ_{2n-1} (il che, si badi, non accade per la forma Ω).

Ciò posto, si ha dalla (3) derivando rispetto a $\bar{\zeta}_1$:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}_1} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_{2n-1}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}_1}\,. \tag{6}$$

Ma la forma $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}_1}$ è differenziale esatto di una forma regolare ed uniforme su Γ_{2n-1}, e quindi l'integrale a secondo membro della (6) è nullo, come segue dalla formula di *Green-Stokes* generale[8]).

---

[8]) La formula generale di *Green-Stokes* (che esprime l'uguaglianza fra l'integrale sopra una varietà a $p+1$ dimensioni del differenziale esterno $d\omega$ di una forma ω di grado p e l'integrale di ω sul contorno della varietà stessa; cfr. p. es. *F. Severi*, Lezioni di analisi, Zanichelli, Bologna (1942), II_1, pag. 381) può facilmente estendersi al campo complesso. D'altronde, per l'applicazione che qui ne occorre, basta pensare di aver preventivamente separato la parte reale e l'immaginaria nella (6), e passare alle variabili reali $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ mediante la trasformazione $z_j = x_j + iy_j$, $\bar{z}_j = x_j - iy_j$ tenendo conto dell'invarianza dell'operazione di differenziazione esterna di fronte ai cambiamenti di variabili. Cfr. il mio lavoro cit. in [2]), particolarmente al n. 2.

La funzione $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar\zeta_1, \ldots, \bar\zeta_n)$ non dipende dunque da $\bar\zeta_1$; similmente si dimostra ch'essa non dipende da $\bar\zeta_2, \ldots, \bar\zeta_n$. Cioè g è funzione analitica di $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, per $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ interno a Γ_{2n-1}[9]), e il teorema a) è così stabilito.

Dimostrazione del teorema b)

6. Passiamo a dimostrare il teorema b). Si suppone qui il punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ esterno a Γ_{2n-1}.

Le argomentazioni sviluppate nel n. 5 sussistono inalterate in questo caso; onde intanto risulta ancora g funzione analitica di $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

D'altra parte, essendo Γ_{2n-1} limitata, è finito il max $|z_1|$ sopra Γ_{2n-1}, che indicheremo con μ. E allora, per tutti i punti $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ esterni a Γ_{2n-1}, soddisfacenti alla condizione $|\zeta_1| > \mu$, altresì la forma Ω data dalla (4) risulta *regolare ed uniforme* su Γ_{2n-1}, come già $\dfrac{\partial \Omega}{\partial \bar\zeta_1}$. In queste condizioni si conclude, analogamente a sopra, che è nullo l'integrale a secondo membro della (3).

La funzione g, analitica in $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, deve dunque essere nulla per $|\zeta_1| > \mu$, onde è nulla identicamente. Così è provato anche il teorema b).

II.

Richiamo della seconda formula integrale

7. Come si è detto al n. 1 daremo ora una nuova dimostrazione del teorema di *Hartogs*, esponendola per semplicità nel caso di $n = 2$ variabili, e limitandoci all'ipotesi della convessità del dominio D_4 contornato dalla ipersuperficie Γ_3, ove è assegnata la funzione $f(z_1, z_2)$. La dimostrazione è basata sulla estensione della formula di *Cauchy* nella seconda forma, che cominciamo col ricordare.

Se (ζ_1, ζ_2) è un punto interno a Γ_3, ho dimostrato, nel lavoro citato in [3]), che i piani caratteristici $z_2 = \zeta_2$, $z_1 = \zeta_1$ segano Γ_3 rispett. secondo due linee chiuse C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, che sono tra loro *allacciate sopra* Γ_3 come due anelli di una catena. Se il punto (ζ_1, ζ_2) si muove entro D_4, C_{ζ_1} e C_{ζ_2} si conservano allacciate e non s'incontrano mai, fin tanto che il punto non cada su Γ_3.

Sia σ_{ζ_1} una superficie, del tipo topologico del toro, descritta sopra Γ_3 da un piccolo circuito allacciato con C_{ζ_1}, che scorra lungo C_{ζ_1} stessa senza mai incontrare nè C_{ζ_1}, nè C_{ζ_2}. Sia σ_{ζ_2} una superficie analogamente

[9]) Cfr. il lavoro ora richiamato, al n. 1.

ottenuta facendo scorrere lungo C_{ζ_2} un piccolo circuito allacciato con C_{ζ_2}. Tenendo conto che l'ambiente Γ_3 è uno spazio sferico, si vede facilmente che, con una deformazione continua, si può passare da una superficie del tipo di σ_{ζ_1} ad una del tipo di σ_{ζ_2}, senza incontrare C_{ζ_1}, C_{ζ_2} e restando entro Γ_3[10]). Ciascuna delle due superficie σ_{ζ_1}, σ_{ζ_2} è dunque allacciata simultaneamente, ed in maniera simmetrica, con C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, per deformazioni sopra Γ_3.

Ebbene, sia $f(z_1, z_2)$ analitica regolare nel dominio convesso D_4, contorno Γ_3 incluso. Se σ è una superficie qualunque sopra Γ_3, del tipo topologico del toro, allacciata con C_{ζ_1}, C_{ζ_2} nel modo descritto (e quindi riducibile per deformazione, senza incontrare C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, tanto a σ_{ζ_1} che a σ_{ζ_2}), il valore della $f(z_1, z_2)$ nel punto (ζ_1, ζ_2), si esprime colla formula:

$$f(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_\sigma \frac{f(z_1, z_2)\, d(z_1, z_2)}{(z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2)} . \tag{7}$$

Seconda dimostrazione del teorema d'Hartogs

8. Ciò ricordato, suppongasi sia nota la $f(z_1, z_2)$ soltanto sopra Γ_3, e ivi sia analitica e regolare, nelle condizioni del teorema di *Hartogs*. Allora, in ogni punto (ζ_1, ζ_2) *interno* a Γ_3, può considerarsi la funzione $g(\zeta_1, \zeta_2)$, definita dalla

$$g(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\sigma(\zeta_1, \zeta_2)} \frac{f(z_1, z_2)\, d(z_1, z_2)}{(z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2)} , \tag{8}$$

essendo $\sigma(\zeta_1, \zeta_2)$ una superficie tracciata sopra Γ_3, dipendente dalla posizione del punto (ζ_1, ζ_2) e simultaneamente allacciata con le linee C_{ζ_1}, C_{ζ_2} nel modo sopra espresso. È chiaro che $g(\zeta_1, \zeta_2)$ resta univocamente definita dalla (8) nonostante l'arbitrarietà della scelta della superficie $\sigma(\zeta_1, \zeta_2)$ (subordinatamente alle condizioni topologiche indicate): infatti, in base al classico teorema di *Cauchy-Poincaré*, il secondo membro della (8) non varia comunque si deformi $\sigma(\zeta_1, \zeta_2)$ sopra Γ_3 senza incontrare C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, perché, così facendo, non si viene ad attraversare alcuna singolarità della funzione integranda.

---

[10]) Ciò risulta a priori nel lavoro citato, poiché ivi si dimostra che una particolare superficie (toro circolare dello S_4), che è definita in modo simmetrico rispetto a z_1 e z_2, può ridursi per deformazione a σ_{ζ_1}. A causa della simmetria indicata, del pari accade che la superficie può ridursi a σ_{ζ_2} ; e quindi σ_{ζ_1} può ridursi a σ_{ζ_2}, e viceversa.

Inoltre la $g(\zeta_1, \zeta_2)$ definita risulta analitica regolare nelle variabili ζ_1, ζ_2. Ci si convince immediatamente di ciò, riflettendo che una superficie $\sigma(\zeta_1^0, \zeta_2^0)$ che sia adatta a definire $g(\zeta_1, \zeta_2)$, mediante la (8), in un punto qualunque fissato (ζ_1^0, ζ_2^0) interno a Γ_3, è altresì adatta a definire la funzione stessa per tutti i punti (ζ_1, ζ_2) di un intorno abbastanza ristretto di (ζ_1^0, ζ_2^0), in quanto, se $\sigma(\zeta_1^0, \zeta_2^0)$ è allacciata con le linee $C_{\zeta_1^0}, C_{\zeta_2^0}$, è allacciata altresì con le linee C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, che son molto prossime a $C_{\zeta_1^0}$, $C_{\zeta_2^0}$, quando (ζ_1, ζ_2) sia molto prossimo a (ζ_1^0, ζ_2^0). Pertanto, nell'intorno di (ζ_1^0, ζ_2^0) si può supporre *fissa* la superficie d'integrazione nella (8), e quindi $g(\zeta_1, \zeta_2)$ risulta funzione analitica regolare di ζ_1, ζ_2, in quell'intorno, come la è la funzione integranda $\dfrac{f(z_1, z_2)}{(z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2)}$ per qualunque posizione di (z_1, z_2) sopra $\sigma(\zeta_1^0, \zeta_2^0)$.

9. Abbiamo già osservato (n. 4) che, essendo $f(z_1, z_2)$ analitica regolare sopra Γ_3, essa risulta senz'altro definita e regolare in tutto uno strato 4-dimensionale Σ_4 comprendente Γ_3 all'interno, ed in particolare in uno strato Σ_4' compreso tra Γ_3 e una ipersuperficie Γ_3' interna a Γ_3 e prossima ad essa.

Si consideri nello $S_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$, essendo $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, il fascio di iperpiani paralleli rappresentati dall'equazione

$$y_2 + \lambda = 0\,, \tag{9}$$

al variare del parametro reale λ [11]).

Sia $\lambda' \vdash\!\dashv \lambda''$ $(\lambda' < \lambda'')$ l'intervallo (finito) di variabilità del parametro λ, entro il quale, estremi inclusi, l'iperpiano (9) incontra Γ_3, e fuori del quale non ha alcun punto comune con Γ_3. I due iperpiani $y_2 + \lambda' = 0$, $y_2 + \lambda' + \varepsilon = 0$ staccano dal dominio D_4 circondato da Γ_3 una porzione che, per ε positivo abbastanza piccolo, è contenuta nello strato Σ_4' delimitato da Γ_3 e Γ_3'. Questa porzione, che indicheremo con $\overline{\Sigma}_4'$, risulta convessa e delimitata da un pezzo $\overline{\Gamma}_3$ dell'ipersuperficie Γ_3 e da un pezzo $\overline{\Pi}_3$ dell'iperpiano $y_2 + \lambda' + \varepsilon = 0$.

Ebbene facciamo vedere che, in ogni punto (ζ_1, ζ_2) interno al dominio convesso $\overline{\Sigma}_4'$, il valore della funzione $f(\zeta_1, \zeta_2)$ e quello della funzione $g(\zeta_1, \zeta_2)$ si possono esprimere colla identica formula integrale: onde le due funzioni coincidono in $\overline{\Sigma}_4'$ e quindi in tutto Σ_4'; ciò che prova il teorema d'*Hartogs*.

---

[11]) Tutte le considerazioni successive potrebbero ripetersi più in generale assumendo in luogo di (9) il fascio di iperpiani paralleli $ax_2 + by_2 + \lambda = 0$, ovvero $ax_1 + by_1 + \lambda = 0$, essendo a, b costanti reali arbitrariamente fissate.

Basta all'uopo mostrare che tra le superficie $\sigma(\zeta_1, \zeta_2)$ tracciate su Γ_3 e simultaneamente allacciate con C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, che possono assumersi come superficie d'integrazione nella (8), ne esistono di quelle che sono al tempo stesso tracciate sul contorno $\overline{\Gamma}_3 + \overline{\Pi}_3$ di $\overline{\sum}'_4$ ed allacciate simultaneamente con le linee $\overline{C}_{\zeta_1}$, $\overline{C}_{\zeta_2}$ intersezioni di $\overline{\Gamma}_3 + \overline{\Pi}_3$ rispett. con i piani caratteristici $z_2 = \zeta_2$, $z_1 = \zeta_1$. Ora il piano caratteristico $z_2 = \zeta_2$ appartiene all'iperpiano del fascio (9) $y_2 — \eta_2 = 0$ (essendo $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$), il quale non ha punti comuni con $\overline{\Pi}_3$, onde la linea $\overline{C}_{\zeta_1}$ è tracciata per intero su $\overline{\Gamma}_3$ e quindi coincide con C_{ζ_1}. In conseguenza, una superficie del tipo σ_{ζ_1} considerato al n. 7, che sia abbastanza prossima alla linea $C_{\zeta_1} = \overline{C}_{\zeta_1}$, soddisfa senz'altro al requisito espresso.

(Reçu le 5 janvier 1943.)