Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Nachtrag zur der Arbeit: Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe.

Autor: Hopf, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14876

Nachtrag zu der Arbeit

Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe

Von Heinz Hopf, Zürich

Die nachstehenden Bemerkungen setzen die Kenntnis der im Titel genannten Arbeit[1]), die ich kurz als „*F.*“ zitieren werde, nicht voraus. Der Untersuchung und Darstellung topologisch-gruppentheoretischer Zusammenhänge, die den Hauptinhalt von *F.* bilden (§ 1; § 2; § 4 ohne Nr. 22; Anhang), habe ich nichts hinzuzufügen; es soll aber zu einem Korollar der dort gewonnenen Sätze ein elementarerer Zugang gezeigt werden. Dieses Korollar lautet: „*Es seien: K, K_1 zwei Komplexe mit isomorphen Fundamentalgruppen; $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{B}_1^2$ ihre zweiten Bettischen Gruppen; $\mathfrak{S}^2$, $\mathfrak{S}_1^2$ die Gruppen derjenigen Homologieklassen, welche stetige Bilder der Kugelfläche enthalten. Dann ist $\mathfrak{B}^2 / \mathfrak{S}^2 \cong \mathfrak{B}_1^2 / \mathfrak{S}_1^2$.*“ Von diesem Satz lassen sich zahlreiche Anwendungen machen (*F.*, § 3; Nr. 25); sowohl aus diesem Grunde dürfte der unten angegebene kurze Beweis Interesse verdienen, als auch darum, weil dieser Beweis sogleich einen allgemeineren Satz liefert, der sich nicht nur auf die Dimensionszahl 2 bezieht. Dabei erhält man allerdings weder Aufschluß über die Art der gruppentheoretischen Verwandtschaft zwischen $\mathfrak{B}^2 / \mathfrak{S}^2$ und der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$, noch über die Art der geometrischen Beziehung zwischen zweidimensionalen Zyklen und eindimensionalen Wegen, welche den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{B}^2 / \mathfrak{S}^2$ und $\mathfrak{G}$ herstellt; die Klärung der beiden damit gestellten Fragen bildet gerade den Inhalt der §§ 1 und 2 von *F.* .

Die unten angewandte Methode gehört ganz in den Rahmen der Theorie der Deformationen von Hurewicz, und zwar in deren elementarsten Teil[2]); es wird eigentlich einem der dortigen Beweise nur eine Kleinigkeit — im wesentlichen die Einführung der Gruppe $\mathfrak{S}^2$ — hinzugefügt. Daher wird manches, was nachher zu sagen ist, bekannt sein, und die Darstellung darf an diesen Stellen knapp gefaßt werden. Für neu halte ich den speziellen Satz am Schluß (Nr. 5.5); aber auch er wird durch Betrachtungen gewonnen, die solchen bei Hurewicz ähnlich sind.

In *F.* wurde auch gezeigt, daß und wie gewisse multiplikative Eigenschaften in Mannigfaltigkeiten durch die Fundamentalgruppe bestimmt sind. Verzichtet man auf das „wie“ und begnügt man sich mit dem Satz, *daß* diese Eigenschaften nur von der Fundamentalgruppe abhängen, so

---

[1]) Comment. Math. Helvet. **14** (1942), S. 257.

[2]) *W. Hurewicz*, Proc. Akad. Amsterdam **39** (1938), 215—224; besonders 217—218. — Im folgenden als „*H.*“ zitiert.

läßt sich dies — samt einer Verallgemeinerung auf höhere Dimensionszahlen — mit derselben elementaren Methode beweisen; man muß dann — was in F. nur angedeutet wurde (Nr. 24) — von vornherein statt Mannigfaltigkeiten beliebige Komplexe und in diesen in erster Linie das Čech-Whitneysche „cap"-Produkt[3]) betrachten. Ich will aber darauf hier nicht eingehen.

1. K sei ein Komplex beliebiger Dimension, K^n der Komplex seiner höchstens n-dimensionalen Simplexe, $\mathfrak{Z}^n$ die Gruppe seiner n-dimensionalen Zyklen, $\mathfrak{B}^n$ seine n-te Bettische Gruppe (in bezug auf ganzzahlige Koeffizienten). Die Menge derjenigen $z \in \mathfrak{Z}^n$, welche (simpliziale) Bilder einer n-dimensionalen Sphäre S^n sind, nennen wir $\overline{\mathfrak{S}}^n$. Behauptung: $\overline{\mathfrak{S}}^n$ ist eine Gruppe.

Beweis: Es sei $z_1 \in \overline{\mathfrak{S}}^n$, $z_2 \in \overline{\mathfrak{S}}^n$; dann ist $z_1 = f_1(S_1^n)$, $z_2 = f_2(S_2^n)$, wobei S_1^n, S_2^n zwei zueinander fremde Sphären sind. Man verbinde einen Punkt $a_1 \in S_1^n$ durch eine Strecke T mit einem Punkt $a_2 \in S_2^n$ und bilde eine dritte Sphäre S^n so auf $S_1^n + T + S_2^n$ ab, daß S_1^n mit dem Grade $+1$, S_2^n mit dem Grade -1 bedeckt wird; darauf übe man f_1, f_2 auf S_1^n bzw. S_2^n aus und bilde außerdem T auf einen Streckenzug in K ab, der $f_1(a_1)$ mit $f_2(a_2)$ verbindet. So entsteht eine Abbildung f von S^n mit $f(S^n) = z_1 - z_2$; es ist also $z_1 - z_2 \in \overline{\mathfrak{S}}^n$; folglich ist $\overline{\mathfrak{S}}^n$ eine Gruppe.

Wir setzen $\mathfrak{Z}^n / \overline{\mathfrak{S}}^n = \mathfrak{Q}^n$. Diejenigen $z \in \mathfrak{Z}^n$, welche ~ 0 in K sind, sind lineare Verbindungen von Rändern $(n+1)$-dimensionaler Simplexe, also von n-dimensionalen Sphärenbildern, also selbst in $\overline{\mathfrak{S}}^n$ enthalten; daraus folgt: eine n-dimensionale Homologieklasse von K enthält entweder nur Sphärenbilder oder kein Sphärenbild. Die Homologieklassen, die Sphärenbilder enthalten, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{S}^n$ von $\mathfrak{B}^n$; ordnet man jedem Zyklus die ihn enthaltende Homologieklasse zu, so entsteht eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{Z}^n$ auf $\mathfrak{B}^n$, bei welcher $\overline{\mathfrak{S}}^n$ das Urbild von $\mathfrak{S}^n$ ist; folglich ist

$$\mathfrak{Q}^n \cong \mathfrak{B}^n / \mathfrak{S}^n . \tag{1}$$

Diese Isomorphie zeigt: Die Struktur von $\mathfrak{B}^n / \mathfrak{S}^n$ ist bereits durch K^n bestimmt (während $\mathfrak{B}^n$ und $\mathfrak{S}^n$ erst durch K^{n+1} bestimmt sind). — Man sieht übrigens leicht, daß $\mathfrak{S}^n$ und daher auch $\mathfrak{B}^n / \mathfrak{S}^n$ topologische Invarianten von K sind.

2. K heißt „asphärisch" in der Dimension r, wenn in K jedes stetige Bild einer r-dimensionalen Sphäre homotop 0 ist[2]). Wenn ein Komplex

[3]) *H. Whitney*, Annals of Math. **39** (1938), 397—432.

asphärisch in allen Dimensionen r mit $1 < r < n$ ist, so wollen wir sagen, daß er die Eigenschaft A_n hat ($n > 1$). Man beachte, daß die Eigenschaft A_2 nichtssagend ist, daß also jeder Komplex die Eigenschaft A_2 hat, und daß daher die nachstehenden Sätze für $n = 2$ eine besonders einfache Bedeutung und einen besonders allgemeinen Gültigkeitsbereich haben.

Es ist übrigens klar, daß, falls K asphärisch in der Dimension r ist, $\mathfrak{S}^r = 0$ ist (die Umkehrung hiervon gilt nicht).

3. Es seien: K, K_1 zwei Komplexe, jeder von ihnen zusammenhängend; K^n, K_1^n die Komplexe ihrer höchstens n-dimensionalen Simplexe; $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ ihre Fundamentalgruppen. $\mathfrak{Z}_1^n$, $\overline{\mathfrak{S}}_1^n$, $\mathfrak{Q}_1^n$, $\mathfrak{B}_1^n$, $\mathfrak{S}_1^n$ sollen die gleichen Bedeutungen für K_1 haben wie die analog bezeichneten Gruppen für K.

Eine Abbildung f von K^n in K_1^n, $n > 1$, bewirkt eine Homomorphismenklasse[2]) von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}_1$, sowie einen Homomorphismus von $\mathfrak{Z}^n$ in $\mathfrak{Z}_1^n$; ferner ist offenbar $f(\overline{\mathfrak{S}}^n) \subset \overline{\mathfrak{S}}_1^n$, und daher bewirkt f auch einen Homomorphismus von $\mathfrak{Q}^n$ in $\mathfrak{Q}_1^n$.

Wir setzen von jetzt an voraus: K_1 hat die Eigenschaft A_n.

Dann gelten die folgenden drei Hilfssätze:

3.1. Zu jeder Homomorphismenklasse H von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}_1$ gibt es eine Abbildung von K^n in K_1^n, welche H bewirkt.

3.2. f, g seien zwei Abbildungen von K^n in K_1^n, welche dieselbe Homomorphismenklasse von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}_1$ bewirken; dann gibt es eine mit f homotope Abbildung f' von K^n in K_1^n, welche auf K^{n-1} mit g identisch ist.

3.3. f, g seien zwei Abbildungen von K^n in K_1^n, welche dieselbe Homomorphismenklasse von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}_1$ bewirken; dann bewirken sie auch denselben Homomorphismus von $\mathfrak{Q}^n$ in $\mathfrak{Q}_1^n$.

Die Beweise von 3.1 und 3.2 dürfen als bekannt gelten[2]). — Beweis von 3.3: Ist f' die in 3.2 genannte Abbildung und ist x ein orientiertes n-dimensionales Simplex von K^n, so ist $f'(x) - g(x)$ ein Sphärenbild in K_1^n, also ein Element von $\overline{\mathfrak{S}}_1^n$; daher ist auch $f'(z) \equiv g(z)$ mod. $\mathfrak{S}_1^n$ für jeden $z \in \mathfrak{Z}^n$, und da f' mit f homotop ist, ist $f'(z) = f(z)$, also auch $f(z) \equiv g(z)$; das ist aber die Behauptung.

Aus 3.1 und 3.3 folgt: Unter der Voraussetzung, daß K_1 die Eigenschaft A_n besitzt, ist jeder Homomorphismenklasse H von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}_1$ ein bestimmter Homomorphismus Q_H von $\mathfrak{Q}^n$ in $\mathfrak{Q}_1^n$ zugeordnet, nämlich der durch diejenigen Abbildungen von K^n in K_1^n bewirkte, welche H bewirken.

Folgendes ist klar: falls $K = K_1$ und H die Klasse der identischen Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich ist, so ist auch Q_H die identische Abbildung von $\mathfrak{Q}^n$ auf sich; falls auch K_2 ein Komplex ist, der die Eigenschaft A_n besitzt, und falls H' eine Homomorphismenklasse von $\mathfrak{G}_1$ in die Fundamentalgruppe von K_2 und $Q_{H'}$ der dadurch bewirkte Homomorphismus von $\mathfrak{Q}_1^n$ ist, so gilt die Produktregel $Q_{H'H} = Q_{H'} Q_H$.

4. Wir setzen jetzt voraus, daß sowohl K als auch K_1 die Eigenschaft A_n besitzen und daß die Fundamentalgruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ miteinander isomorph sind. H sei eine Isomorphismenklasse von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}_1$, H^{-1} die Klasse der inversen Isomorphismen von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{G}$. Nach den Bemerkungen am Schluß von Nr. 3 ist dann $Q_{H^{-1}} Q_H$ der identische Isomorphismus von $\mathfrak{Q}^n$ und $Q_H Q_{H^{-1}}$ der identische Isomorphismus von $\mathfrak{Q}_1^n$. Daraus folgt, daß Q_H ein Isomorphismus von $\mathfrak{Q}^n$ auf $\mathfrak{Q}_1^n$ ist; $\mathfrak{Q}^n$ und $\mathfrak{Q}_1^n$ sind also isomorph. Fassen wir dieses Ergebnis mit der Isomorphie (1) in Nr. 1 zusammen, so haben wir den folgenden Satz, der für $n = 2$ das eingangs zitierte Korollar aus F. ist:

K, K_1 seien Komplexe beliebiger Dimensionen, jeder von ihnen zusammenhängend und asphärisch in allen Dimensionen r mit $1 < r < n$; ihre Fundamentalgruppen seien isomorph; dann ist auch $\mathfrak{B}^n / \mathfrak{S}^n \cong \mathfrak{B}_1^n / \mathfrak{S}_1^n$.

Mit anderen Worten: *Für die zusammenhängenden und in den Dimensionen r mit $1 < r < n$ asphärischen Komplexe sind die Strukturen der Gruppen $\mathfrak{B}^n / \mathfrak{S}^n$ durch die Strukturen der Fundamentalgruppen bestimmt.*[4])

Bezeichnen wir die zu einer Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ gehörige Gruppe $\mathfrak{B}^n / \mathfrak{S}^n$ mit $\mathfrak{G}^n$ — beide Gruppen als abstrakte Gruppen aufgefaßt[5]) —, so erheben sich die folgenden beiden Fragen: 1. Wie ist der gruppentheoretische Zusammenhang zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^n$? — 2. Da $\mathfrak{G}^n$ durch $\mathfrak{G}$ bestimmt ist, wird durch die Isomorphie $\mathfrak{B}^n / \mathfrak{S}^n \cong \mathfrak{G}^n$ ein Zusammenhang zwischen n-dimensionalen Zyklen und eindimensionalen Wegen in K vermittelt; wie ist die geometrische Bedeutung dieses Zusammenhanges? — Für den Fall $n = 2$ werden beide Fragen in den §§ 1 und 2 von F. beantwortet (die Gruppe $\mathfrak{G}^2$ heißt dort $\mathfrak{G}_1^*$); für $n > 2$ sind mir die Antworten nicht bekannt.

---

[4]) Cf. *H.*, 221.

[5]) Hier wäre allerdings erst noch festzustellen, ob bei gegebenem n jede Gruppe (mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen) als Fundamentalgruppe eines Komplexes auftritt, der die Eigenschaft A_n hat. Im Fall $n = 2$, in dem die Bedingung A_n leer ist, ist diese Frage bekanntlich zu bejahen.

5. Manche Gruppen $\mathfrak{G}^n$ kann man dadurch ermitteln, daß man einen Komplex K findet, der die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ hat, die Eigenschaft A_n besitzt und dessen Gruppe $\mathfrak{B}^n / \mathfrak{S}^n$ sich bestimmen läßt; diese Gruppe ist dann isomorph mit $\mathfrak{G}^n$; ferner ist in einem solchen Komplex $\mathfrak{S}^r = 0$, also $\mathfrak{B}^r \cong \mathfrak{G}^r$ für $1 < r < n$.

Beispiele für $n = 2$ sind in *F.*, Nr. 13, ausführlich behandelt[6]). Wir fügen hier noch einige einfache Beispiele mit speziellen Anwendungen hinzu.

5.1. Eine orientierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit M^n, die von der Sphäre S^n überlagert wird, möge „sphäroidal" heißen. Eine solche M^n besitzt die Eigenschaft A_n;[7]) daher ist, wenn $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe von M^n ist, $\mathfrak{B}^n / \mathfrak{S}^n \cong \mathfrak{G}^n$. Nun ist erstens $\mathfrak{B}^n$ die von dem Grundzyklus Z von M^n erzeugte unendliche zyklische Gruppe, und zweitens sieht man leicht, daß $\mathfrak{S}^n$ von dem Zyklus gZ erzeugt wird, wobei g die Ordnung von $\mathfrak{G}$ ist. Daraus folgt: *Ist die (endliche) Gruppe $\mathfrak{G}$ Fundamentalgruppe einer sphäroidalen M^n und von der Ordnung g, so ist $\mathfrak{G}^n$ zyklisch und von der Ordnung g*. Da ferner $\mathfrak{B}^{n-1} = 0$ ist (infolge der Endlichkeit von $\mathfrak{G}$ und der Orientierbarkeit von M^n), folgt außerdem: *es ist* $\mathfrak{G}^{n-1} = 0$.

5.2. Die zyklische Gruppe der Ordnung m soll immer $\mathfrak{A}_m$ heißen. Für jedes $m > 1$ und jedes ungerade $n > 1$ gibt es eine sphäroidale M^n mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{A}_m$ (nämlich einen Linsenraum). Aus 5. 1 ergibt sich daher: $\mathfrak{A}_m^n = \mathfrak{A}_m$ *für ungerades* n, $\mathfrak{A}_m^n = 0$ *für gerades* n. (Für die unendliche zyklische Gruppe $\mathfrak{A}_0$ gilt natürlich $\mathfrak{A}_0^n = 0$ bei beliebigem n; man erkennt dies durch Betrachtung einer Kreislinie M^1.)

5.3. Aus 5. 2 folgt die (für die Linsenräume bekannte) Tatsache: Ist M^n eine sphäroidale Mannigfaltigkeit mit zyklischer Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{B}^r \cong \mathfrak{G}$ für die ungeraden r, $\mathfrak{B}^r = 0$ für die geraden r; $(1 \leqq r < n)$.

5.4. Für jede Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit endlich vielen Erzeugenden) und für jedes n läßt sich $\mathfrak{G}^n$ folgendermaßen bestimmen: P sei ein solches topologisches Produkt von Kreislinien und Linsenräumen, daß es die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ hat; dabei sei die Dimension der Linsenräume $n' > n$; dann hat P die Eigenschaft $A_{n'}$, und es ist $\mathfrak{B}^n \cong \mathfrak{G}^n$. Die Gruppe $\mathfrak{B}^n$ aber läßt sich in bekannter Weise aus den Bettischen Gruppen der topologischen Faktoren ermitteln[8]), und die Bettischen Gruppen der Linsenräume sind nach 5. 3 bekannt. Ohne das allgemeine Ergebnis zu

[6]) Man vgl. auch *H.*, 222ff.

[7]) Cf. *H.*, 215—216.

[8]) *Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), 308, Formel (12).

formulieren, erwähne ich nur die folgende spezielle Tatsache, die man auf die angegebene Weise leicht bestätigt: Wenn $\mathfrak{G}$ ein direktes Produkt $\mathfrak{A}_m \times \mathfrak{A}_m$ ist, so enthält $\mathfrak{G}^n$ für $n > 2$ eine Untergruppe, die mit $\mathfrak{A}_m \times \mathfrak{A}_m$ isomorph ist; $\mathfrak{G}^n$ ist also in diesem Falle gewiß nicht zyklisch.

5.5. Für eine Gruppe $\mathfrak{G}$, welche Fundamentalgruppe einer sphäroidalen M^n ist, ist nach 5.1 $\mathfrak{G}^n$ zyklisch; nach 5.4 ist daher $\mathfrak{G}$ nicht ein direktes Produkt $\mathfrak{A}_m \times \mathfrak{A}_m$. Diese direkten Produkte treten also nicht als Fundamentalgruppen sphäroidaler Mannigfaltigkeiten auf. Da ferner einerseits jede endliche Abelsche Gruppe, welche nicht zyklisch ist, eine Untergruppe vom Typus $\mathfrak{A}_m \times \mathfrak{A}_m$ enthält, andererseits jede Untergruppe der Fundamentalgruppe einer sphäroidalen M^n selbst Fundamentalgruppe einer sphäroidalen Mannigfaltigkeit ist, gilt somit folgender Satz: *Eine Gruppe, welche Fundamentalgruppe einer sphäroidalen Mannigfaltigkeit ist, hat keine anderen Abelschen Untergruppen als die zyklischen.*[9]) Insbesondere sind daher die zyklischen Gruppen die einzigen Abelschen Fundamentalgruppen sphäroidaler Mannigfaltigkeiten.

[9]) Für die sphärischen Raumformen, d. h. für diejenigen sphäroidalen M^n, deren Decktransformationen Drehungen der S^n sind, ist dieser Satz sehr leicht auf algebraischem Wege zu bestätigen. Man weiß aber nicht, ob jede sphäroidale M^n einer Raumform homöomorph ist.

(Eingegangen den 19. Januar 1942.)