

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 15 (1942-1943)

**Artikel:** Über Parallelinvarianten bei Eikörpern.  
**Autor:** Hadwiger, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-14877>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 04.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über Parallelinvarianten bei Eikörpern

H. HADWIGER, Bern

In einer kürzlich erschienenen Note<sup>1)</sup> habe ich die Parallelinvarianten ebener Eibereiche behandelt, und für diese einige geometrische Deutungen gegeben. Die hier vorliegende kurze Bemerkung bezieht sich auf die analog definierten Invarianten bei Eikörpern.

Wir gehen von zwei Eikörpern  $\mathfrak{G}_i$  ( $i = 1, 2$ ) aus. Es bezeichne wie üblich  $M_i$  das Integral der mittleren Krümmung,  $F_i$  die Oberfläche und  $V_i$  das Volumen von  $\mathfrak{G}_i$ .

Eine mit stetigen partiellen Ableitungen versehene Funktion  $\Phi$  von 6 Veränderlichen nennen wir eine *Parallelinvariante* für zwei Eikörper, wenn der Funktionswert

$$\Phi \{ M_1, F_1, V_1; M_2, F_2, V_2 \} \quad (1)$$

beim Übergang von den Eikörpern  $\mathfrak{G}_i$  zu den äußeren Parallelkörpern  $\mathfrak{G}_i(\xi)$  im Abstand  $\xi$  unverändert bleibt.

Nach den Formeln von *J. Steiner*<sup>2)</sup> gilt für die Parallelkörper

$$\begin{aligned} M_i(\xi) &= M_i + 4\pi\xi, \\ F_i(\xi) &= F_i + 2M_i\xi + 4\pi\xi^2, \\ V_i(\xi) &= V_i + F_i\xi + M_i\xi^2 + \frac{4\pi}{3}\xi^3, \end{aligned} \quad (2)$$

so daß die aufgestellte Invarianzforderung als Funktionalgleichung

$$\Phi \{ M_1(\xi), F_1(\xi), V_1(\xi); M_2(\xi), F_2(\xi), V_2(\xi) \} = C \quad (3)$$

geschrieben werden kann.

Aus dem Verschwinden des totalen Differentials von (3) folgert man die Gültigkeit der partiellen Differentialgleichung

$$F_1 \frac{\partial \Phi}{\partial V_1} + F_2 \frac{\partial \Phi}{\partial V_2} + 2M_1 \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} + 2M_2 \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} + 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial M_1} + 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial M_2} = 0. \quad (4)$$

---

<sup>1)</sup> *H. Hadwiger*, Über Parallelinvarianten bei Eibereichen. *Comment. math. helv.* **13**, 252—256 (1940/41).

<sup>2)</sup> *J. Steiner*, Über parallele Flächen, *Werke* **2**, 173—176.

## Die 5 Parallelinvarianten

$$\begin{aligned} X &= M_1 - M_2, \\ Y_i &= M_i^2 - 4\pi F_i \quad (i = 1, 2), \\ Z_i &= M_i^3 - 6\pi F_i M_i + 24\pi^2 V_i \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (5)$$

bilden ein Fundamentalsystem, da der Rang der Funktionalmatrix

$$\frac{\partial [X, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2]}{\partial [M_1, M_2, F_1, F_2, V_1, V_2]} \quad (6)$$

maximal ist, d. h. den Wert 5 aufweist. Jede Parallelinvariante (1) ist somit darstellbar als

$$\Phi = \chi \{ X, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 \}, \quad (7)$$

wo  $\chi$  eine mit stetigen partiellen Ableitungen versehene Funktion von 5 Veränderlichen ist.

Ein Beispiel eines parallelinvarianten Funktionalen wird durch das Zerfallsintegral

$$A = \int (\varkappa [\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2] - 1) \dot{\mathfrak{G}}_2 \quad (8)$$

der Durchdringung zweier Eiflächen geliefert. In (8) bezeichnet  $\varkappa[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2]$  die Anzahl der verschiedenen zusammenhängenden Kontinua, in welche der Durchschnitt der Oberflächen der beiden Eikörper  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  zerfällt;  $\mathfrak{G}_1$  wird als fest,  $\mathfrak{G}_2$  dagegen als beweglich angenommen,  $\dot{\mathfrak{G}}_2$  ist die kinematische Dichte<sup>3)</sup> von  $\mathfrak{G}_2$ , und die Integration ist über alle Lagen von  $\mathfrak{G}_2$  zu erstrecken, die einen nicht leeren Durchschnitt der Eikörper  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  ergeben.

Die Parallelinvarianz von (8) ergibt sich auf Grund der Tatsache, daß die Zerfallszahl  $\varkappa[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2]$  beim Übergang zu den Parallelkörpern

- a) keine Änderung erleidet, wenn  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  einen inneren Punkt gemeinsam haben,
- b) höchstens den Zuwachs 1 erfährt, wenn  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  keinen Punkt gemeinsam haben.

Dieser Satz stellt die Erweiterung eines früher<sup>4)</sup> für ebene Eibereiche festgestellten Sachverhaltes auf Eikörper dar<sup>5)</sup>. Die Parallelinvarianz von (8)

<sup>3)</sup> Vgl. *W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, 2. Heft, S. 63. B. G. Teubner; Leipzig und Berlin 1937.*

<sup>4)</sup> Die in Fußnote <sup>1)</sup> zitierte Arbeit, S. 255.

<sup>5)</sup> Für diesen Satz habe ich noch keinen einfachen Beweis finden können. Er wird aber im folgenden nicht gebraucht. Es schien mir immerhin zweckmäßig, doch auf die Parallelinvarianz des Zerfallsintegrals hinzuweisen, um eventuell weitere Studien in dieser Richtung anzuregen.

bedeutet noch nicht, daß das Zerfallsintegral eine Parallelinvariante in dem oben bezeichneten Sinne ist; es scheint im Gegenteil zweifelhaft, ob das Integral im allgemeinen Fall durch die Konstanten  $M_i$ ,  $F_i$  und  $V_i$  allein ausgedrückt werden kann.

Ich teile noch ein Resultat mit, das sich auf eine spezielle Klasse von Eiflächen bezieht.

$\mathfrak{G}_i$  sei äußerer Parallelbereich einer Strecke der Länge  $a_i$  im Abstand  $R_i$  (es handelt sich um einen wohlbekannten Eikörper, der aus einem Kreiszyylinder und zwei an den Kreisflächen angesetzten Halbkugeln besteht).

Für das Zerfallintegral (8) ergibt sich,  $R_1 \leq R_2$  vorausgesetzt,

$$A = \frac{4\pi^3}{3} (R_1 - R_2) \{ 8(R_1 - R_2)^2 + 6(a_1 - a_2)(R_1 - R_2) - 3a_1 a_2 \} . \quad (9)$$

Die Parallelinvarianz von  $A$  kann aus der Formel unmittelbar abgelesen werden, da die Abhängigkeit von den Radien  $R_1$  und  $R_2$  nur eine solche von der Differenz  $R_1 - R_2$  ist. Beiläufig bemerkt man noch, daß das Zerfallsintegral (8), das für zwei kongruente Körper stets einen nicht negativen Wert haben muß, nicht nur für die Kugel verschwindet, sondern auch für Eikörper der oben bezeichneten Art. Damit wird eine gelegentlich aufgeworfene Frage<sup>6)</sup>, ob die Kugel die einzige Eifläche ist, die mit einer kongruenten Eifläche einen stets zusammenhängenden Schnitt aufweist, im negativen Sinn entschieden.

Die Parallelinvarianten (5) der betrachteten speziellen Eikörper sind:

$$\begin{aligned} X &= \pi(a_1 - a_2) + 4\pi(R_1 - R_2) , \\ Y_i &= \pi^2 a_i^2 \quad (i = 1, 2) , \\ Z_i &= \pi^3 a_i^3 \quad (i = 1, 2) . \end{aligned} \quad (10)$$

Nach einiger Umrechnung kann (9) auf die Form

$$A = \frac{1}{6} \{ X^3 + 2(Z_1 - Z_2) - 3X(Y_1 + Y_2) \} \quad (11)$$

gebracht werden. Damit ist in diesem speziellen Fall eine Darstellung des Zerfallintegrals durch die 5 Parallelinvarianten gewonnen.

(Eingegangen den 3. Februar 1942.)

---

<sup>6)</sup> *T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, S. 141. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 3, 1934.*