Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Expression du produit de deux indéterminées en fonction de la somme.

Autor: Mirimanoff, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14879

Expression du produit de deux indéterminées en fonction de la somme

Par D. Mirimanoff, Genève

Introduction

Nous avons fait connaître récemment[1]) un procédé permettant de former les expressions les plus simples de la somme $p = x_1 + x_2$ en fonction du produit $q = x_1 x_2$, ainsi que celles de p et q en fonction de $G = q + cp$, c étant une constante. Nous nous occuperons maintenant des problèmes inverses (expressions de q en fonction de p et expressions de G en fonction de p et en fonction de q). Pour les résoudre, il suffit de savoir former, outre les expressions déjà indiquées, celles de q en fonction de p (premier problème inverse). En remplaçant, en effet, dans $G = q + cp$, le produit q par ces expressions, on en tire celles de G en fonction de p. On en tire de même celles de G en fonction de q, en remplaçant p par les expressions indiquées dans mon premier article. Nous pouvons donc nous borner à la recherche des expressions les plus simples de q en fonction de p. Nous ferons voir qu'on peut obtenir la solution de ce problème en partant soit des polynômes R_i (première méthode), soit de l'expression de q en fonction de G (deuxième méthode).

Chose curieuse: tandis que l'expression réduite de p en fonction de q n'avait été obtenue, dans mon premier article, que par l'intermédiaire de certaines expressions moins simples (expressions canoniques), nous verrons que chacune de nos méthodes fournit directement la solution réduite, c'est-à-dire l'expression la plus simple de q en fonction de p.

Désignons par $\mathfrak{P}$ le domaine d'intégrité $F[p]$ (ensemble de tous les polynômes en p dont les coefficients font partie de F). Je montrerai qu'on peut établir les trois théorèmes suivants:

Théorème 1. Il existe, pour tout $n \geqslant 3$, une expression de q en fonction de p, sous forme d'un quotient de deux polynômes $\mathfrak{N}_n$ et $\mathfrak{D}_n$ faisant partie de $\mathfrak{P}$, dans laquelle le dénominateur $\mathfrak{D}_n$ est du degré $\frac{(n-2)\,(n-3)}{2}$ par rapport à p et par rapport à l'ensemble $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Théorème 2. Dans cette expression, le dénominateur $\mathfrak{D}_n$ est égal, pour $n \geqslant 4$, à

$$\prod_{i,j} (x_1 + x_2 - x_i - x_j) \;,$$

[1]) C. M. H., t. 14, p. 1 et 310.

le produit Π étant étendu à toutes les combinaisons x_i, x_j deux à deux des $n - 2$ indéterminées $x_3, x_4, \ldots, x_n$.

Théorème 3. Il n'existe pas d'expression de q en fonction de p, sous forme d'un quotient de deux polynômes de $\mathfrak{P}$, dans laquelle le degré du dénominateur par rapport aux $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soit inférieur à $\frac{(n-2)\,(n-3)}{2}$.

Le degré $\frac{(n-2)\,(n-3)}{2}$ est donc le plus petit possible.

Première méthode

§ 1. Structure des polynômes R_i.

Au lieu de former les polynômes R_i, pour $i > 2$, à partir de R_1 et R_2, à l'aide de la relation de récurrence

$$R_i = -qR_{i-2} + pR_{i-1} \tag{1}$$

il est plus simple de les définir directement par la formule

$$R_i = \left(\frac{f(x_1)}{x_1^{i-1}} - \frac{f(x_2)}{x_2^{i-1}}\right) \times \frac{q^{i-1}}{x_1 - x_2}, \tag{2}$$

que je regrette de n'avoir pas indiquée dans mon premier article. Les deux définitions sont équivalentes. Pour le voir, il suffit de montrer que l'expression (2) coïncide avec celle du § 1 de l'article cité pour $i = 1$ et $i = 2$ et que les R_i définis par (2) vérifient la relation (1).

On déduit de (2) l'expression suivante de R_i

$$\begin{aligned} R_i = q^{i-1}(\alpha_{n-i} - f_1\alpha_{n-i-1} + \cdots + (-1)^{n-i} f_{n-i}) + (-1)^{n-i+1} f_{n-i+2}\, q^{i-2} + \\ + (-1)^{n-i+2} f_{n-i+3}\, q^{i-3}\, \alpha_1 + \cdots + (-1)^{n-1} f_n\, \alpha_{i-2} \end{aligned} \tag{3}$$

qui nous sera très utile.

§ 2. Expression des polynômes α_i en fonction de p et q.

Pour tout $i \geqslant 1$, α_i est un polynôme en p et q dont le degré par rapport à p est égal à i, mais dont le degré par rapport à q est $E\left(\frac{i}{2}\right)$[2].

---

[2]) $E(x)$, pour $x \geq 0$, est la partie entière de x (Legendre).

On a, quel que soit $i \geqslant 1$,

$$\alpha_i = \gamma_0^{(i)} p^i - \gamma_1^{(i)} p^{i-2} q + \gamma_2^{(i)} p^{i-4} q^2 - \cdots \tag{4}$$

les coefficients $\gamma_0^{(i)} = 1, \gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}, \ldots$ étant les nombres du triangle arithmétique de Pascal d'ordre i rangés le long de la bissectrice de l'angle droit. On a, en effet,

$$\gamma_k^{(i)} = \binom{i-k}{k} . \tag{5}$$

Pour le voir, il suffit de montrer que la formule (5) est vraie pour i, si elle est vraie pour $i-1$ et $i-2$. J'omets la démonstration, qui est élémentaire.

Voici les expressions des α_i pour $i = 1, 2, \ldots, 6$:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = p\,;\ \ \alpha_2 = p^2 - q\,;\ \ \alpha_3 = p^3 - 2pq\,;\ \ \alpha_4 = p^4 - 3p^2q + q^2\,; \\ \alpha_5 = p^5 - 4p^3q + 3pq^2\,;\ \ \alpha_6 = p^6 - 5p^4q + 6p^2q^2 - q^3 \text{ [3]}\,. \end{gathered} \tag{6}$$

§ 3. Choix des inconnues et indication de la méthode.

Soit d'abord $n = 3$.

En remplaçant dans

$$R_1 = \alpha_2 - f_1\alpha_1 + f_2 = 0$$

les polynômes α_2 et α_1 par leurs expressions (6), il vient

$$p^2 - q - f_1 p + f_2 = 0\,,$$

par suite

$$q = \frac{p^2 - f_1 p + f_2}{p^0} \,.$$

Supposons maintenant $n \geqslant 4$.

Les coefficients des α dans R_i étant des polynômes en q, qui est l'inconnue dont il s'agit précisément d'obtenir l'expression, la méthode dont nous nous sommes servi dans notre premier travail, n'est plus applicable. Mais remplaçons, dans R_i, les α par leurs expressions (4); R_i devient un polynôme en p et q, et il résulte alors des formules (3) et (4) que la puissance la plus élevée de q dans R_i est fournie par son premier terme $q^{i-1}\alpha_{n-i}$; son exposant étant égal à $i - 1 + E\left(\frac{n-i}{2}\right)$, on voit que le

[3]) Cf. *P. Bachmann*, Niedere Zahlentheorie, zweiter Teil (additive Zahlentheorie), Chap. 2.

degré de R_i par rapport à q est une fonction croissante ou plutôt non décroissante de i. Or le degré de R_{n-3} par rapport à q est égal à son indice $n-3$, puisque $n-3-1+E\left(\frac{n-n+3}{2}\right)=n-3$. Si donc l'on égale à 0 les $n-3$ polynômes R_i, on obtiendra un système de $n-3$ équations linéaires à $n-3$ inconnues $q, q^2, \ldots, q^{n-3}$. Ce système nous fournira en particulier l'expression cherchée de q en fonction de p.

Il est préférable du reste de changer les signes des polynômes R_i et de les ordonner ensuite suivant les puissances croissantes de q. L'utilité de cette transformation élémentaire apparaîtra plus tard.

En désignant par $\mathfrak{D}_n$ le déterminant des coefficients de $q, q^2, \ldots, q^{n-3}$ et par $\mathfrak{N}_n$ le déterminant de Cramer correspondant à l'inconnue q, l'expression cherchée de q s'écrira

$$q=\frac{\mathfrak{N}_n}{\mathfrak{D}_n}, \tag{7}$$

$\mathfrak{D}_n$ et $\mathfrak{N}_n$ étant deux polynômes en p faisant partie de $\mathfrak{P}$.

Exemples.

Soit d'abord $n=4$.

On n'a qu'une seule équation $-R_1=0$, qui s'écrit

$$-\alpha_3+f_1\alpha_2-f_2\alpha_1+f_3=0$$

et en remplaçant les α_i par leurs expressions (6)

$$-p^3+f_1p^2-f_2p+f_3+q(2p-f_1)=0$$

d'où

$$q=\frac{p^3-f_1p^2+f_2p-f_3}{2p-f_1}.$$

On voit donc que

$$\mathfrak{D}_4=2p-f_1\,;\qquad \mathfrak{N}_4=p^3-f_1p^2+f_2p-f_3\,.$$

Soit maintenant $n=5$.

Le nombre des équations est égal à 2. Or,

$$\begin{aligned}-R_1 &= -p^4+f_1p^3-f_2p^2+f_3p-f_4+(3p^2-2f_1p+f_2)q-q^2\\ -R_2 &= \qquad\qquad\qquad -f_5-(p^3-f_1p^2+f_2p-f_3)q+(2p-f_1)q^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_5 &= \begin{vmatrix} 3p^2-2f_1p+f_2 & -1\\ -p^3+f_1p^2-f_2p+f_3 & 2p-f_1\end{vmatrix}\\ &= 5p^3-6f_1p^2+(2f_1^2+f_2)p-f_1f_2+f_3\end{aligned}$$

et

$$\mathfrak{N}_5 = \begin{vmatrix} p^4 - f_1 p^3 + f_2 p^2 - f_3 p + f_4 & -1 \\ f_5 & 2p - f_1 \end{vmatrix}$$

$$= 2p^5 - 3f_1 p^4 + (f_1^2 + 2f_2)p^3 - (f_1 f_2 + 2f_3)p^2 + (f_1 f_3 + 2f_4)p - f_1 f_4 + f_5 \, .$$

§ 4. Démonstration du théorème 1.

La première partie de ce théorème étant déjà établie, il reste à montrer que le degré de $\mathfrak{D}_n$ par rapport à p et par rapport à l'ensemble $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est égal à $\dfrac{(n-2)\ (n-3)}{2}$.

Egalons à zéro $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dans $\mathfrak{D}_n$. Nous montrerons que $\mathfrak{D}_n$ se réduit à

$$a_n \, p^{\frac{(n-2)\ (n-3)}{2}} \, ,$$

a_n étant un nombre entier positif et que par conséquent le degré de $\mathfrak{D}_n$ par rapport à p est bien égal à $\dfrac{(n-2)\ (n-3)}{2}$. Or, $\mathfrak{D}_n$ étant une fonction homogène par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et le degré de p dans X_n étant égal à 1, nous en conclurons que le degré de $\mathfrak{D}_n$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est aussi égal à $\dfrac{(n-2)\ (n-3)}{2}$ et le théorème 1 sera établi.

Mais, pour $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$, $-R_i$ se réduit, en vertu de (3), à son premier terme $-q^{i-1}\alpha_{n-i}$, qui s'écrit

$$-p^{n-i}q^{i-1} + \gamma_1^{(n-i)} p^{n-i-2} q^i - \gamma_2^{(n-i)} p^{n-i-4} q^{i+1} + \cdots$$

et par suite

$$\begin{aligned}
-R_1 &= -p^{n-1} + \binom{n-2}{1} p^{n-3} q - \binom{n-3}{2} p^{n-5} q^2 + \cdots \\
-R_2 &= \qquad\qquad -p^{n-2} q + \binom{n-3}{1} p^{n-4} q^2 - \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-R_{n-4} &= \qquad\qquad\qquad -p^4 q^{n-5} + 3p^2 q^{n-4} - q^{n-3} \\
-R_{n-3} &= \qquad\qquad\qquad\qquad - p^3 q^{n-4} + 2p\, q^{n-3}
\end{aligned}$$

et $\mathfrak{D}_n$ se réduit à

$$\begin{vmatrix}
\binom{n-2}{1} p^{n-3} & -\binom{n-3}{2} p^{n-5} & \cdots\ \cdots\ \cdots & 0 \\
-\ p^{n-2} & \binom{n-3}{1} p^{n-4} & \cdots\ \cdots\ \cdots & 0 \\
 & -\ p^{n-3} & \cdots\ \cdots\ \cdots & 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
 & & -p^4 \quad 3p^2 & -1 \\
 & & -p^3 & 2p
\end{vmatrix}$$

que je désignerai par $\mathfrak{D}_n(0)$.

Or, le degré du terme principal de $\mathfrak{D}_n(0)$ par rapport à p tant égal à la somme

$$(n-3)+(n-4)+\cdots+2+1=\frac{(n-2)\,(n-3)}{2},$$

il en résulte que

$$\mathfrak{D}_n(0)=a_n\,p^{\frac{(n-2)\,(n-3)}{2}}, \tag{8}$$

a_n étant un nombre entier.

Mais rien jusqu'à présent ne nous permet d'affirmer que a_n n'est pas nul. Je ferai voir que a_n est positif.

Supposons que les a_i soient différents de 0 pour $i<n$. Je dis que cette hypothèse entraîne $a_i>0$ pour $i\leqslant n$. Commençons par faire remarquer que les sous déterminants principaux tirés de $\mathfrak{D}_n(0)$ en supprimant $1, 2, \ldots, n-4$ premières lignes et premières colonnes sont égaux respectivement à $\mathfrak{D}_{n-1}(0)$, $\mathfrak{D}_{n-2}(0), \ldots, \mathfrak{D}_1(0)=2$.

Multiplions les éléments de la 1^e, 2^e, ..., $(n-4)^e$ colonne par $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_4=2$, ce qui a pour effet de multiplier $\mathfrak{D}_n(0)$ par le produit $a_{n-1}\cdot a_{n-2}\ldots a_4\neq 0$.

Effectuons ensuite les opérations suivantes, qui ne changent pas la valeur du déterminant:

1) ajoutons aux éléments de la $(n-4)^e$ (avant dernière) colonne les éléments correspondants de la $(n-3)^e$ (dernière) colonne multipliés par p^2,

2) ajoutons aux éléments de la $(n-5)^e$ colonne les éléments correspondants de la $(n-4)^e$ colonne ainsi transformée après les avoir multipliés par p^2,

3) appliquons la même opération aux éléments de la $(n-6)^e$, $(n-7)^e$,... 1^e colonne et soient

$$\varepsilon_n p^{n-3},\quad \varepsilon_{n-1}p^{n-4},\ldots,\quad \varepsilon_4 p=2p$$

les éléments rangés le long de la diagonale principale dans l'expression finale du déterminant.

Comme la valeur de ce déterminant est fournie par son terme principal, nous obtenons la relation

$$a_{n-1}\,a_{n-2}\ldots a_n\,\mathfrak{D}_n(0)=\varepsilon_n\,\varepsilon_{n-1}\ldots\varepsilon_4\,p^{\frac{(n-2)\,(n-3)}{2}}$$

et par suite, en vertu de (8)

$$a_n a_{n-1}\ldots a_4=\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}\ldots\varepsilon_4\,.$$

Je dis que $a_i=\varepsilon_i$.

En effet $a_4 = \varepsilon_4 = 2$. Donc en faisant $n = 5$, il vient $a_5 = \varepsilon_5$, etc. Or,

$$\varepsilon_i = \binom{i-2}{1} a_{i-1} - \binom{i-3}{2} a_{i-2} + \cdots .$$

Nous obtenons donc les relations

$$\begin{array}{rr}
a_n - \binom{n-2}{1} a_{n-1} + \binom{n-3}{2} a_{n-2} - \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & = 0 \\
a_{n-1} - \binom{n-3}{1} a_{n-2} + \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & = 0 \\
a_{n-2} - \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & = 0 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
a_6 - 4a_5 + 3a_4 & = 0 \\
a_5 - 3a_4 + 1 & = 0 \\
a_4 - 2 & = 0
\end{array}$$

Il est préférable, en introduisant $a_3 = 1$, d'écrire les deux dernières équations de la manière suivante

$$\begin{aligned} a_5 - 3a_4 + \ a_3 &= 0 \\ a_4 - 2a_3 &= 0 \end{aligned}$$

et de compléter ensuite le système par l'adjonction des deux égalités

$$\begin{aligned} a_3 - 1 &= 0 \\ 1 &= 1 . \end{aligned}$$

Dans les équations de notre système ainsi complété, que j'appellerai le système S_1, les coefficients de $a_i, a_{i-1}, \ldots,$ abstraction faite de leurs signes, sont les nombres du triangle arithmétique de Pascal d'ordre $i - 1$ rangés le long de la bissectrice de l'angle droit, pour tous les i compris au sens large entre 3 et n.

Je ferai voir que les a_i vérifiant le système S_1, et en particulier le coefficient a_n, sont positifs.

A partir de S_1 formons un système nouveau S_2 de la manière suivante: remplaçons la première équation de S_1 par la somme de toutes les équations de ce système, la deuxième par la somme de celles qui suivent la première, etc.

En vertu de la relation

$$1 - \binom{i}{1} + \binom{i}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{i}{k} = (-1)^k \binom{i-1}{k}, \tag{9}$$

pour tout $k \leqslant i$,

les coefficients de la première équation de S_2 sont ceux de la seconde de S_1, les coefficients de la seconde équation de S_2 sont ceux de la troisième de S_1, etc. Le nombre des équations diminue d'une unité et leurs seconds membres sont tous égaux à 1, donc positifs. Les dernières équations de S_2 s'écrivent

$$\begin{aligned} a_5 - 2\,a_4 \quad &= 1 \\ a_4 - a_3 &= 1 \\ a_3 &= 1 \;. \end{aligned}$$

Appliquons la même transformation à S_2. On obtiendra un système de $n-3$ équations dont les seconds membres sont $n-2$, $n-3$, ..., 2 ; la dernière s'écrira $a_4 = 2$.

En appliquant toujours la même opération, on formera S_4, S_5, ..., S_{n-1}.

Le système S_{n-2} s'écrit

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= g_1 \\ a_{n-1} &= g_2 \;, \end{aligned}$$

g_1 et g_2 étant deux nombres positifs. Enfin

$$a_n = g_1 + g_2 \;.$$

Donc $a_n > 0$, et comme n est un nombre quelconque $\geqslant 3$, cette inégalité a lieu pour tout $n \geqslant 3$ et le théorème 1 est établi.

Exemples.

Soit $n = 4$.

Les systèmes S_1, S_2, S_3 s'écrivent

$$\begin{aligned} a_4 - 2a_3 \quad &= 0 \\ a_3 - 1 &= 0 \\ 1 &= 1 \end{aligned} \qquad (S_1)$$

$$\begin{aligned} a_4 - a_3 &= 1 \\ a_3 &= 1 \end{aligned} \qquad (S_2)$$

$$a_4 = 2 \qquad (S_3)$$

Soit maintenant $n = 5$.

Les systèmes S_1, S_2, S_3, S_4 s'écrivent

$$\begin{aligned} a_5 - 3a_4 + a_3 \quad &= 0 \\ a_4 - 2a_3 \quad &= 0 \\ a_3 - 1 &= 0 \\ 1 &= 1 \end{aligned} \qquad (S_1)$$

$$
\begin{aligned}
a_5 - 2a_4 &= 1 \\
a_4 - a_3 &= 1 \\
a_3 &= 1
\end{aligned}
\qquad (S_2)
$$

$$
\begin{aligned}
a_5 - a_4 &= 3 \\
a_4 &= 2
\end{aligned}
\qquad (S_3)
$$

$$
a_5 = 5 \qquad (S_4)
$$

Voici les valeurs des a_n pour $n \leqslant 10$: $a_3 = 1$; $a_4 = 2$; $a_5 = 5$; $a_6 = 14$; $a_7 = 42$; $a_8 = 132$; $a_9 = 429$; $a_{10} = 1430$.

Il résulte de la loi de formation des systèmes $S_1, S_2, \ldots$ que a_n croît rapidement avec n.

§ 5. Démonstration du théorème 2.

En raisonnant comme dans le § 4 de mon premier article, on démontre que le dénominateur $\mathfrak{D}_n$ est divisible par $\Pi_n = \underset{i,j}{\Pi}(x_1 + x_2 - x_i - x_j)$.

Le degré de $\mathfrak{D}_n$ dans X_n étant égal à celui du produit Π_n, on en conclut que

$$\mathfrak{D}_n = k\Pi_n$$

k étant un nombre rationnel.

Je dis que $k = 1$.

En effet, égalons $x_2, x_3, \ldots, x_n$ à 0.

$-R_i$ se réduit à $-q^{i-1}(\alpha_{n-i} - f_1\alpha_{n-i-1})$, c'est-à-dire à $q^i\alpha_{n-i-2}$, puisque $f_1 = x_i = p$.

Le déterminant $\mathfrak{D}_n$ se réduit donc à

$$
\begin{vmatrix}
p^{n-3} & -\gamma_1^{(n-3)} & p^{n-5} \ldots & \\
0 & & p^{n-4} \ldots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & & 0 \;\ldots\ldots & p
\end{vmatrix}
$$

c'est-à-dire à

$$p^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} = x_1^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}.$$

Or, le produit Π_n se réduit aussi à $x_1^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}$, d'où $k = 1$ et le théorème 2 est démontré.

§ 6. Démonstration du théorème 3.

Elle est immédiate. En effet, un dénominateur $\mathfrak{D}_n$ dont le degré est inférieur à $\dfrac{(n-2)\,(n-3)}{2}$ ne saurait être divisible par Π_n.

Deuxième méthode

§ 7. Expression de q en fonction de q'.

Partons de l'expression canonique de p en fonction de G ou plutôt de $q' = G + c^2 = q + pc + c^2$.

Je rappelle qu'on obtient cette expression en remplaçant dans celle de p en fonction de q, la somme p, le produit q et les f_i par la somme p', le produit q' et les f'_i relatifs aux indéterminées x'_i liées aux x_i par les relations

$$x'_i = x_i + c\ .$$

De l'expression ainsi obtenue

$$p' = \frac{N'_n}{D'_n}$$

on tire

$$p = \frac{N'_n}{D'_n} - 2c\ . \tag{10}$$

Or,

$$q = q' - pc - c^2\ .$$

Par suite

$$q = q' + c^2 - \frac{N'_n c}{D'_n} = \frac{(q' + c^2)\, D'_n - N'_n c}{D'_n}\ . \tag{11}$$

C'est à partir de cette formule que nous obtiendrons l'expression cherchée de q en fonction de p.

§ 8. Degrés du numérateur et du dénominateur de (11) par rapport à c.

Je dis que le numérateur et le dénominateur de (11) sont tous les deux du degré $\frac{(n+2)\ (n-3)}{2}$ par rapport à c.

Démonstration. Il est évident d'abord que le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur. Si, en effet, il lui était inférieur ou supérieur, on obtiendrait, en faisant $c = \infty$, $q = 0$ ou $q = \infty$, conclusions absurdes. Il suffit donc de déterminer le degré de D'_n.

Or, d'après le théorème 2 de mon premier article, D'_n a pour expression

$$(x'_1\, x'_2)^{n-3} \prod_{i,j} (x'_1\, x'_2 - x'_i\, x'_j)$$

$$= \{(x_1 + c)\ (x_2 + c)\}^{n-3} \prod_{i,j} \{x_1 x_2 - x_i x_j + (x_1 + x_2 - x_i - x_j)\, c\}\ . \tag{12}$$

Comme le degré du premier facteur est égal à $2(n-3)$ et celui du second à $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, on voit que le degré de D'_n est bien égal à $\frac{(n+2)(n-3)}{2}$, que je désignerai par m.

§ 9. Posons

$$(q' + c^2) D'_n - N'_n c = \nu_0 + \nu_1 c + \nu_2 c^2 + \cdots + \nu_m c^m$$
$$D'_n = \delta_0 + \delta_1 c + \delta_2 c^2 + \cdots + \delta_m c_m$$

et faisons $c = \infty$ dans (11). Il vient

$$q = \frac{\nu_m}{\delta_m} . \tag{13}$$

Or, on tire immédiatement de (12) les expressions de δ_m et ν_m dans X_n. En effet, en vertu de (12)

$$\delta_m = \prod_{i,j} (x_1 + x_2 - x_i - x_j) = \Pi_n$$

et par suite

$$\nu_m = x_1 x_2 \Pi_n .$$

Il reste à montrer que δ_m et ν_m calculés à partir de (11) sont des polynômes en p. Or, les coefficients δ_i étant des polynômes en p et q, il suffit de faire voir que

$$\frac{\partial \delta_m}{\partial q} = 0 , \quad \frac{\partial \nu_m}{\partial q} = 0 .$$

La démonstration est immédiate. On a, en effet,

$$\frac{\partial D'_n}{\partial p} = \frac{\partial D'_n}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial p} = \frac{\partial D'_n}{\partial q'} c$$

$$\frac{\partial D'_n}{\partial q} = \frac{\partial D'_n}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial q} = \frac{\partial D'_n}{\partial q'}$$

d'où

$$\frac{\partial D'_n}{\partial p} = \frac{\partial D'_n}{\partial q} c$$

et par suite

$$\frac{\partial \delta_0}{\partial p} + \frac{\partial \delta_1}{\partial p} c + \cdots + \frac{\partial \delta_m}{\partial p} c^m = \frac{\partial \delta_0}{\partial q} c + \frac{\partial \delta_1}{\partial q} c^2 + \cdots + \frac{\partial \delta_m}{\partial q} c^{m+1} . \tag{14}$$

On a donc bien

$$\frac{\partial \delta_m}{\partial q} = 0$$

et comme le même raisonnement s'applique au numérateur de (11), on a aussi

$$\frac{\partial \nu_m}{\partial q} = 0$$

et par conséquent δ_m et ν_m sont bien des polynômes en p.

Je dis maintenant qu'on a identiquement

$$\delta_m = \mathfrak{D}_n \qquad \text{et} \qquad \nu_m = \mathfrak{N}_n \, .$$

En effet, les degrés de δ_m et de $\mathfrak{D}_n$ par rapport à p ne dépassent pas $\frac{(n-2)\,(n-3)}{2}$, nombre inférieur au degré $\frac{n(n-1)}{2}$ de l'équation vérifiée par p. La même remarque s'applique aux polynômes ν_m, $\mathfrak{N}_n$.

§ 10. Calcul de q à partir de (11).

Pour obtenir l'expression de q à l'aide de la deuxième méthode, on peut, en vertu de la propriété qui vient d'être établie, faire $q = 0$ dans (11). Il suffit alors de calculer les coefficients de c^m dans le numérateur et le dénominateur de (11) ainsi simplifiés.

Supposons $n = 4$.

En faisant $q = 0$, N'_4 et D'_4 se réduisent respectivement à

$$(f_1 + 4c)\,(pc + c^2)^2 - (f_3 + 2\,f_2 c + 3\,f_1 c^2 + 4\,c^3)\,(pc + c^2)$$

et

$$(pc + c^2)^2 - (f_4 + f_3 c + f_2 c^2 + f_1 c^3 + c^4)\,.$$

L'exposant m étant égal à 3, ν_m et δ_m sont les coefficients de c^3 dans

$$(pc + 2c^2)\,D'_4 - cN'_4$$

et

$$D'_4$$

ainsi simplifiés, et l'on retrouve l'expression de q fournie par la première méthode

$$q = \frac{p^3 - f_1\,p^2 + f_2\,p - f_3}{2p - f_1}\,.$$

Remarque. En faisant $c = 0$ dans (11), on obtient

$$q = \frac{\nu_0}{\delta_0}$$

ou

$$q\,\delta_0 - \nu_0 = 0\,. \tag{15}$$

Or, en vertu de (14), δ_0 et ν_0 sont des polynômes en q et comme le degré du premier membre de (15) est inférieur à $\frac{n(n-1)}{2}$, cette égalité est une identité.

Pour $n = 4$, par exemple,

$$\nu_0 = q^3 - f_4 q\ ; \qquad \delta_0 = q^2 - f_4\,.$$

Une remarque analogue s'applique à la formule

$$p = \frac{N'_n}{D'_n} - 2c = \frac{N'_n - 2c\,D'_n}{D'_n}\,.$$

Elle se réduit à une identité, si l'on fait $c = \infty$. Pour $n = 4$ elle se réduit à

$$p = \frac{2p^2 - f_1 p}{2p - f_1}\,.$$

Corollaires.

§ 11. Expressions de $p^k (k > 1)$ en fonction de q.

Ces expressions s'obtiennent immédiatement, si l'exposant k est $\leqslant n - 3$. En effet, le procédé indiqué dans mon premier travail permet d'obtenir les expressions de α_k pour $k \leqslant n - 3$. Et comme

$$\alpha_k = p^k - \cdots\,, \tag{16}$$

on en tire p^k.

Pour calculer p^k, lorsque l'exposant k est supérieur à $n - 3$, on peut procéder de la manière suivante:

Pour $k = n - 2$ et $k = n - 1$, on calculera p^k à partir de $R_2 = 0$ et $R_1 = 0$. On peut, en effet, tirer de ces équations α_{n-2} et α_{n-1} en fonction des α_k d'indices $k \leqslant n - 3$ et finalement p^{n-2} et p^{n-1} à l'aide de (16).

Si $k > n - 1$, on partira de la relation

$$\alpha_k - f_1\alpha_{k-1} + f_2\alpha_{k-2} - \cdots + (-1)^n f_n \alpha_{k-n} = 0 , \tag{17}$$

dont le premier membre est

$$f(x_1)\, x^{k-n+1} - f(x_2)\, x_2^{k-n+1} .$$

On en tirera de proche en proche $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots$ et par suite, en vertu de (16), $p^n, p^{n+1}, \ldots$.

§ 12. Expressions de $q^k (k > 1)$ en fonction de p.

Les procédés indiqués dans ce travail permettent d'obtenir ces expressions pour $k \leqslant n - 3$.

Si k est supérieur à $n - 3$, on envisagera α_{2k} qui contient le terme $(-1)^k q^k$ (puissance la plus élevée de q dans α_{2k}). Le calcul de q^k se ramène alors à celui de $q^{k-1}, q^{k-2}, \ldots$.

§ 13. Expressions de p^k, q^k et de $p^k q^l$ en fonction de $q' = G + c^2$.

Comme $p = p' - 2c$, les expressions de p^k se calculent à partir de celles des puissances de p' inférieures ou égales à k qu'on obtient de celles du § 11, en remplaçant p et q par p' et q'.

Et comme $q = q' - pc - c^2$, pour calculer q^k on n'aura qu'à remplacer dans $(q' - pc - c^2)^k$ les puissances de p par leurs expressions en fonction de q'.

Quant aux expressions de $p^k q^l$, on remplacera dans $p^k q^l$ le facteur q^l par $(q' - pc - c^2)^l$.

En faisant $q' = G + c^2$, on obtiendra les expressions de p^k, q^k et de $p^k q^l$ en fonction de G.

§ 14. Expressions d'une fonction symétrique entière de x_1, x_2.

Soit S une fonction symétrique entière de deux indéterminées x_1, x_2.

On sait que S est un polynôme en p et q dont les coefficients font partie de F_n.

Le problème se ramène donc à ceux des paragraphes 11, 12 et 13.

On en tire aussi les expressions d'une fonction symétrique rationnelle de x_1, x_2 à coefficients faisant partie de F_n.

(Reçu le 26 février 1942.)