

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Band:** 19 (1946-1947)

**Artikel:** Des systèmes de substitutions régulières indépendantes qui engendrent un groupe régulier.  
**Autor:** Piccard, Sophie  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17340>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 04.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Des systèmes de substitutions régulières indépendantes qui engendrent un groupe régulier

Par SOPHIE PICCARD, Neuchâtel

## 1. Notations.

1.1. Soient  $m \geq 1$  et  $n > 1$  deux entiers, soient 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  des substitutions régulières des éléments  $1, 2, \dots, n$ . Nous désignerons par le symbole  $(S_1, S_2, \dots, S_m)$  le groupe engendré par les substitutions 1).

1.2. Soit  $G$  un groupe de substitutions de degré  $n$  et soit  $S$  une substitution de degré  $n$  portant sur les mêmes éléments que les substitutions de  $G$  mais ne faisant pas partie du groupe  $G$ . Nous désignerons par le symbole  $GS$  l'ensemble des substitutions  $TS$ , où  $T$  est une substitution quelconque de  $G$ , la substitution  $S$  dans le produit  $TS$  étant à effectuer en premier lieu et la substitution  $T$  en second lieu.

1.3. Soit  $E$  un ensemble et soient  $a, b, c, \dots$  des éléments. Le symbole  $E = \{a, b, c, \dots\}$  exprime que l'ensemble  $E$  se compose des éléments  $a, b, c, \dots$  indiqués entre accolades.

1.4. Soient  $E$  un ensemble et  $a$  et  $a'$  deux éléments. Le symbole  $a \in E$  exprime que  $a$  est un élément de  $E$  et le symbole  $a' \notin E$  exprime que  $a'$  n'est pas un élément de  $E$ .

1.5. Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. Le symbole  $A \subset B$  exprime que  $A$  est un sous-ensemble de  $B$ , c'est-à-dire que tout élément de  $A$  fait partie de  $B$ .

1.6. Soit  $E$  un ensemble. Le symbole  $\overline{E}$  désigne la puissance de l'ensemble  $E$ .

## 2. Définitions.

2.1. Soient  $m > 1$  et  $n > 1$  deux entiers et soient 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$   $m$  substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$ . Nous dirons que les substitutions 1) sont *indépendantes* si, quel que soit l'entier  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $S_i \notin (S_1, S_2, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_m)$ .

Il résulte, en particulier, de cette définition que, si les substitutions 1) sont indépendantes, aucune substitution de la suite 1) n'est une itérée d'une seconde substitution de la dite suite.

2.2. Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système de  $m > 1$  substitutions indépendantes des éléments  $1, 2, \dots, n$  ( $n > 1$ ), soit  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ , soit  $k$  un entier, tel que  $1 \leq k < m$  et soit 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  un système

comprenant  $k$  substitutions distinctes quelconques de la suite 1). Nous appelons *domaine de connexion* des substitutions 2) tout sous-ensemble (propre ou impropre) non vide  $\mathfrak{C}$  de l'ensemble  $E$  qui se compose de la totalité des éléments de certains cycles de chacune des substitutions 2), alors qu'aucun sous-ensemble propre de  $\mathfrak{C}$  ne jouit de cette propriété. Quel que soit le système 2), on peut toujours décomposer l'ensemble  $E$  en un nombre fini  $l \geq 1$  de domaines de connexion  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_l$ , tous ces domaines de connexion étant disjoints deux à deux, et on a  $E = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \dots + \mathfrak{C}_l$  et  $\overline{E} = \overline{\mathfrak{C}}_1 + \overline{\mathfrak{C}}_2 + \dots + \overline{\mathfrak{C}}_l$ . S'il existe un seul domaine de connexion  $\mathfrak{C}$  des substitutions 2), on a évidemment  $\mathfrak{C} = E$  et nous dirons, dans ce cas, que *les substitutions 2) constituent un système connexe*.

2.3. Rappelons qu'on appelle *régulier* tout groupe transitif de substitutions dont l'ordre est égal au degré.

2.4. Soit  $n$  un entier  $> 1$ , soit  $G$  un groupe régulier d'ordre et de degré  $n$  et soient  $S_1, S_2, \dots, S_m$   $m \geq 1$  substitutions indépendantes de  $G$ . Nous dirons que ces substitutions constituent *une base* de  $G$  si  $(S_1, S_2, \dots, S_m) = G$  et si, quel que soit l'entier positif  $m' < m$ , aucun système de  $m'$  substitutions du groupe  $G$  n'est générateur de ce groupe. Le nombre  $m$  est un invariant du groupe  $G$  et nous dirons que *le groupe  $G$  est à base d'ordre  $m$* .

3. *Remarque 1.* Si un groupe régulier  $G$  est à base d'ordre  $m \geq 1$ , ce groupe peut contenir des systèmes de  $k > m$  substitutions indépendantes. En effet, soit  $\mathfrak{S}_4$  le groupe symétrique d'ordre 4. Ce groupe est, comme on sait, à base du second ordre. Ainsi, il admet pour base le couple de substitutions  $(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2)$ . Or, les trois substitutions  $(1\ 2), (1\ 3)$  et  $(1\ 4)$  de  $\mathfrak{S}_4$  sont indépendantes.

D'après le théorème de Jordan, il existe un groupe régulier  $G$  simplement isomorphe à  $\mathfrak{S}_4$ . Ce groupe  $G$  est à base du second ordre et les trois substitutions de  $G$  qui correspondent aux substitutions  $(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4)$  de  $\mathfrak{S}_4$  dans l'isomorphisme de  $\mathfrak{S}_4$  à  $G$  sont indépendantes.

4. Soit  $G$  un groupe régulier d'ordre et de degré  $n > 1$  dont les substitutions portent sur les éléments  $1, 2, \dots, n$ . Alors, quels que soient les entiers  $i$  et  $j$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ), il existe, comme on sait, une substitution et une seule du groupe  $G$  qui transforme  $i$  en  $j$ . D'autre part,  $G$  ne contient aucun sous-groupe propre transitif.

5. Soient  $m$  et  $n$  deux entiers  $> 1$ , soient 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$   $m$  substitutions régulières indépendantes des éléments  $1, 2, \dots, n$ . Le but de la pré-

sente *Note* est d'établir des conditions pour que le groupe  $(S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier.

6. *Proposition 1.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système de  $m$  substitutions régulières indépendantes. Une condition nécessaire pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier, c'est que les substitutions 1) constituent un système connexe.

*Démonstration.* En effet, si le groupe  $G$  est régulier, il est transitif et, si le système de substitutions 1) n'était pas connexe, il engendrerait évidemment un groupe intransitif. La condition énoncée est donc bien nécessaire.

7. *Remarque 2.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système connexe de substitutions régulières indépendantes qui engendrent un groupe régulier. Alors, quel que soit l'entier positif  $k < m$ ,  $k$  substitutions du système 1) ne sauraient jamais constituer un système connexe.

En effet, supposons le contraire et admettons qu'il existe  $k < m$  substitutions 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  du système 1) qui constituent un système connexe. Soit  $(S_1, S_2, \dots, S_m) = G$  et  $(S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}) = G_1$ . Comme, par hypothèse, le groupe  $G$  est régulier, il ne contient aucun sous-groupe propre transitif. Et comme les substitutions 2) forment un système connexe, elles engendrent évidemment un groupe transitif et, par conséquent on doit avoir  $G_1 = G$ . Or, nous avons supposé que  $k < m$ . Il existe donc au moins un indice  $i$  de la suite  $1, 2, \dots, n$  qui ne fait pas partie de la suite  $i_1, i_2, \dots, i_k$  et on a  $S_i \notin G_1$ , ce qui est contraire à notre hypothèse que les substitutions 1) sont indépendantes. On voit donc bien que, si le groupe  $G$  est régulier, il ne saurait exister  $k < m$  substitutions du système 1) qui constituent un système connexe.

8. *Remarque 3.* Soient  $m$  et  $n$  deux entiers  $> 1$ , soient 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$   $m$  substitutions de degré  $n$  qui constituent un système connexe. Une condition suffisante pour que les substitutions 1) soient indépendantes, c'est que, quel que soit l'indice  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), l'ensemble des substitutions  $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_m$  ne soit pas connexe.

En effet, supposons que cette condition est satisfaite. Donc, quel que soit l'indice  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), le groupe  $G_i = (S_1, S_2, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_m)$  est intransitif. Or, le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  est transitif, puisque les substitutions 1) constituent un système connexe. Donc  $G_i \neq G$ , quel que soit  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Mais alors  $S_i \notin G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , puisque si, pour un indice  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) on avait  $S_i \in G_i$ , il en résulterait que  $G_i = G$ , ce qui n'est pas. Donc les substitutions 1) sont bien indépendantes, c. q. f. d.



9. *Remarque 4.* La condition énoncée dans la remarque 3 est aussi nécessaire pour que les substitutions 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  soient indépendantes, si le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  est régulier, d'après la remarque 2.

10. *Définition.* Soient 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$   $m \geq 2$  substitutions indépendantes des éléments  $1, 2, \dots, n$ . Nous dirons que ces  $m$  substitutions jouissent de la *propriété  $\pi$*  si elles constituent un système connexe, alors qu'aucun système composé d'un nombre inférieur à  $m$  de substitutions de 1) n'est connexe.

11. D'après la proposition 1 et la remarque 2, une condition nécessaire pour que  $m$  substitutions indépendantes 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  engendrent un groupe régulier, c'est que les substitutions 1) jouissent de la propriété  $\pi$ .

12. *Proposition 2.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système de  $m \geq 2$  substitutions régulières indépendantes qui jouit de la propriété  $\pi$ . Alors, quel que soit l'entier  $k$  ( $1 \leq k < m$ ), quelles que soient les  $k$  substitutions 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  du système 1), quel que soit le domaine de connexion  $\mathfrak{E}$  de ces  $k$  substitutions et quelle que soit la substitution  $S_i$  du système 1) qui ne fait pas partie de 2), une condition nécessaire pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier, c'est que  $S_i$  ne transforme aucun élément de l'ensemble  $\mathfrak{E}$  en un élément du même ensemble.

*Démonstration.* En effet, soit 1) un système de substitutions indépendantes qui jouit de la propriété  $\pi$ , soit  $k$  un entier, tel que  $1 \leq k < m$ , soit 2) un ensemble formé de  $k$  substitutions quelconques du système 1) et soit  $\mathfrak{E}$  un domaine de connexion des substitutions 2). Alors, quels que soient les deux éléments (pas nécessairement distincts)  $a$  et  $b$  de  $\mathfrak{E}$ , il existe une substitution  $T$  du groupe  $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k})$  qui transforme  $a$  en  $b$ . Or, quelle que soit la substitution  $S_i$  de 1) que ne fait pas partie de 2), on a  $S_i \notin G_1$  puisque les substitutions 1) sont, par hypothèse, indépendantes. Donc  $S_i \neq T$ . Donc, s'il existait une substitution  $S_i$  de 1) que ne fasse pas partie de 2) et qui transforme  $a$  en  $b$ , deux substitutions distinctes (au moins) du groupe  $G$ , savoir  $T$  et  $S_i$ , transformeraient  $a$  en  $b$  et le groupe  $G$  ne serait pas régulier. La condition énoncée est donc bien nécessaire, c. q. f. d.

13. *Remarque 5.* Il résulte, en particulier, de la proposition 2 que, si le système de substitutions 1) dont il est question dans l'énoncé de cette proposition engendre un groupe régulier, quels que soient les indices  $i$  et  $j$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, i \neq j$ ), et quel que soit le cycle  $C$  de la sub-

stitution  $S_j$ , la substitution  $S_i$  ne saurait transformer un élément de  $C$  en un élément du même cycle.

14. *Proposition 3.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système de  $m \geq 2$  substitutions régulières indépendantes qui jouit de la propriété  $\pi$ . Alors quel que soit l'entier positif  $k < m$  et quelles que soient les  $k$  substitutions 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  du système 1), si le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  est régulier, tous les domaines de connexion du système 2) sont d'égale puissance.

*Démonstration.* Soit 1) un système de substitutions indépendantes qui jouit de la propriété  $\pi$  et supposons qu'il existe un entier positif  $k < m$  et  $k$  substitutions 2) du système 1), telles que deux domaines de connexion  $\mathfrak{E}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu\}$  et  $\mathfrak{E}_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu\}$  des substitutions 2) sont de puissances différentes. On a donc  $\mu = \overline{\mathfrak{E}}_1, \nu = \overline{\mathfrak{E}}_2$  et  $\mu \neq \nu$ . Soit, par exemple,  $\mu > \nu$ .

Comme  $\mathfrak{E}_1$  est un domaine de connexion des substitutions 2), quel que soit l'élément  $\alpha_i$  de  $\mathfrak{E}_1$ , il existe au moins une substitution du groupe  $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k})$  qui fait passer de  $\alpha_1$  à  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ). Soit  $T_i$  une telle substitution. Toute substitution du groupe  $G_1$  fait passer de  $\beta_1$  à un élément de  $\mathfrak{E}_2$ , puisque  $\mathfrak{E}_2$  est un domaine de connexion des substitutions 2). Donc, en particulier, chacune des substitutions  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ) fait passer de  $\beta_1$  à un élément de  $\mathfrak{E}_2$ . Et, comme  $\mu > \nu$ , il existe (au moins) un couple d'indices  $i'$  et  $i'' \neq i'$  de la suite  $1, 2, \dots, \mu$ , tels que  $T_{i'}$  et  $T_{i''}$  transforment  $\beta_1$  en un même élément  $\beta_j$  de  $\mathfrak{E}_2$ . Or,  $T_{i'} \neq T_{i''}$  puisque  $T_{i'}$  fait passer de  $\alpha_1$  à  $\alpha_{i'}$ ,  $T_{i''}$  fait passer de  $\alpha_1$  à  $\alpha_{i''}$  et que  $i' \neq i''$ . Donc deux substitutions différentes  $T_{i'}$  et  $T_{i''}$  du groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  transforment  $\beta_1$  en  $\beta_j$  et, par suite, le groupe  $G$  n'est pas régulier. On démontre de façon tout à fait analogue que le groupe  $G$  ne saurait être régulier si  $\mu < \nu$ . La condition énoncée est donc bien nécessaire, c. q. f. d.

### 15. Définitions.

15.1. Soient  $m$  et  $n$  deux entiers  $> 1$  et soient 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$   $m$  substitutions de degré  $n$  pour lesquelles il existe un entier  $\mu > 1$ , tel que tout domaine de connexion des substitutions 1) est d'ordre  $\mu$ . Nous dirons alors que les substitutions 1) ont un ordre de connexion fixe, égal à  $\mu$ .

*Exemple.* Soit  $S_1 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)$  et soit  $S_2 = (2\ 3)(4\ 5)(6\ 1)(8\ 9)(10\ 11)(12\ 7)$ . Ces deux substitutions ont pour domaines de connexion les deux ensembles  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Elles ont donc un ordre de connexion fixe égal à six.

15.2. Soient  $m$  et  $n$  deux entiers  $>1$  et soient 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$   $m$  substitutions régulières de degré  $n$ , qui constituent un système connexe. Nous dirons que le système de substitutions 1) est *régulièrement connexe* si, quel que soit l'entier  $k$  ( $1 \leq k < m$ ) et quelles que soient les  $k$  substitutions 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  du système 1), il existe un entier positif  $\mu$  dépendant de  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , diviseur de  $n$  et tel que tout domaine de connexion des substitutions 2) est d'ordre  $\mu$ .

16. Il ressort de la proposition 3 qu'une condition nécessaire pour qu'un système 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  de substitutions régulières de degré  $n$  jouissant de la propriété  $\pi$  engendre un groupe régulier, c'est que ce système 1) soit *régulièrement connexe*.

17. *Proposition 4.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système *régulièrement connexe* de substitutions régulières indépendantes de degré  $n$  qui jouit de la propriété  $\pi$ . Alors une condition nécessaire pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier, c'est que, quel que soit le système 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  formé de  $k$  ( $1 \leq k < m$ ) substitutions du système 1), dont les domaines de connexion sont les ensembles 3)  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_l$  ( $l > 1$ ), et quelle que soit la substitution  $S_i$  du système 1) qui ne fait pas partie de 2), si  $S_i$  transforme les éléments de l'un des domaines de connexion  $\mathfrak{C}_j$  ( $1 \leq j \leq l$ ) en éléments de  $r$  autres domaines 3), alors  $S_i$  transforme les éléments de chacun des domaines 3) en éléments de  $r$  autres domaines 3).

*Démonstration.* En effet, soit 1) un système *régulièrement connexe* de substitutions régulières indépendantes de degré  $n$  qui jouit de la propriété  $\pi$  et supposons que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  est régulier. Soit 2) un système de  $k < m$  substitutions de la suite 1), dont les domaines de connexion sont les ensembles 3).

D'après la proposition 3, on a  $\bar{\mathfrak{C}}_1 = \bar{\mathfrak{C}}_2 = \dots = \bar{\mathfrak{C}}_l$ .

Soit  $S_i$  une substitution quelconque du système 1) qui ne fait pas partie du système 2).

D'après la proposition 2, quel que soit l'indice  $j = 1, 2, \dots, l$ , la substitution  $S_i$  ne saurait transformer un élément de  $\mathfrak{C}_j$  en un élément du même ensemble.

Soit  $r$  un entier  $\geq 1$  et  $\leq l - 1$  et soit  $\mathfrak{C}_j$  ( $1 \leq j \leq l$ ) un ensemble de la suite 3), tel que  $S_i$  transforme les éléments de  $\mathfrak{C}_j$  en éléments de  $r$  ensembles de la suite 3), différente de  $\mathfrak{C}_j$ ; soit, d'autre part,  $\mathfrak{C}_{j'}$  ( $j' \neq j$ ) un ensemble quelconque du système 3), différent de  $\mathfrak{C}_j$ , et soit  $r'$  le nombre

d'ensembles ( $\neq \mathfrak{E}_j$ ) du système 3) en éléments desquels  $S_i$  transforme les éléments de  $\mathfrak{E}_j$ . Il s'agit de prouver que  $r = r'$ . Supposons le contraire et soit, par exemple,  $r' < r$ .

Transformons toutes les substitutions du système 2) par la substitution  $S_i$  et soit  $S'_{i_h} = S_i S_{i_h} S_i^{-1}$ ,  $h = 1, 2, \dots, k$ .

Les substitutions 2')  $S'_{i_1}, S'_{i_2}, \dots, S'_{i_k}$  ont pour domaines de connexion les ensembles 3')  $\mathfrak{E}'_1, \mathfrak{E}'_2, \dots, \mathfrak{E}'_l$ , tels que  $\mathfrak{E}'_h$  se compose des éléments que  $S_i$  substitue aux éléments de  $\mathfrak{E}_h$ , quel que soit  $h = 1, 2, \dots, l$ .

D'après l'hypothèse faite, l'ensemble  $\mathfrak{E}'_j$  comprend des éléments de  $r$  domaines 3), autres que  $\mathfrak{E}_j$ , et  $\mathfrak{E}'_j$  comprend des éléments de  $r'$  domaines 3), autres que  $\mathfrak{E}_j$ .

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_r$   $r$  éléments de  $\mathfrak{E}'_j$  appartenant à  $r$  ensembles différents du système 3) et soit  $b$  un élément quelconque de  $\mathfrak{E}'_j$ . Comme  $\mathfrak{E}'_j$  est un domaine de connexion des substitutions 2'), il existe, pour tout indice  $h$  ( $1 \leq h \leq r$ ), une substitution  $T_h$  du groupe engendré par les substitutions 2') qui transforme  $a_1$  en  $a_h$  et, comme  $\mathfrak{E}'_j$  est aussi un domaine de connexion des substitutions 2'), chacune des substitutions  $T_h$  transforme  $b$  en un élément de l'ensemble  $\mathfrak{E}'_j$ . Or, comme  $\mathfrak{E}'_j$  ne contient que des éléments de  $r'$  ensembles de la suite 3) et que  $r' < r$ , il existe au moins deux indices  $h'$  et  $h'' \neq h'$  de la suite  $1, 2, \dots, r$ , tels que  $T_{h'}$ , aussi bien que  $T_{h''}$  transforment  $b$  en éléments d'un même ensemble du système 3). Supposons que  $T_{h'}$  transforme  $b$  en  $b'$  et que  $T_{h''}$  transforme  $b$  en  $b''$  et soit  $\mathfrak{E}_s$  l'ensemble du système 3), tel que  $b' \in \mathfrak{E}_s$  et  $b'' \in \mathfrak{E}_s$ .

La substitution  $T = T_{h''} T_{h'}^{-1}$  transforme l'élément  $a_{h'}$ , d'un ensemble du système 3) en l'élément  $a_{h''}$ , d'un autre ensemble du système 3), alors qu'elle transforme l'élément  $b'$  de l'ensemble  $\mathfrak{E}_s$  du système 3) en l'élément  $b''$  du même ensemble. Donc la substitution  $T$  ne saurait appartenir au groupe  $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k})$ , car toute substitution de ce groupe transforme tous les éléments de chaque ensemble du système 3) en éléments du même ensemble et, par conséquent elles ne sauraient transformer  $a_{h'}$  en  $a_{h''}$ . Or, comme  $b'$  et  $b''$  font partie d'un même ensemble  $\mathfrak{E}_s$  du système 3) et que cet ensemble est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution  $U$  du groupe  $G_1$  qui fait passer de  $b'$  à  $b''$ . Il existe donc deux substitutions différentes  $U$  et  $T$  du groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  qui font passer de  $b'$  à  $b''$  et par suite, le groupe  $G$  ne saurait être régulier, ce qui est contraire à notre hypothèse sur  $G$ . On ne saurait donc avoir  $r' < r$ . Par un raisonnement tout à fait analogue, on démontre qu'on ne saurait avoir  $r' > r$ . Il s'ensuit que, si  $G$  est un groupe régulier, on a  $r = r'$ . Cela étant quel que soit l'ensemble  $\mathfrak{E}_j$ , de la suite 3), la condition énoncée est bien nécessaire, c. q. f. d.

## 18. Définitions.

18.1. Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système régulièrement connexe de  $m \geq 2$  substitutions indépendantes qui jouit de la propriété  $\pi$ . Nous dirons que le système 1) jouit de la propriété  $P$  si, quel que soit le système 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  formé de  $k < m$  substitutions du système 1) et quelle que soit la substitution  $S_i$  du système 1) que ne fait pas partie de 2), il existe un entier  $r$ , dépendant de  $i, i_1, i_2, \dots, i_k$ , tel que  $S_i$  transforme les éléments de chaque domaine de connexion  $\mathfrak{E}$  des substitutions 2) en éléments de  $r$  domaines de connexions des substitutions 2), autres que  $\mathfrak{E}$ , et nous dirons que la substitution  $S_i$  jouit par rapport au système des substitutions 2) de la propriété  $P_r$ .

18.2. Il ressort de la définition 18.1 que, si le système de substitutions 1) jouit de la propriété  $P$ , quels que soient les indices  $i$  et  $j$  ( $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $i \neq j$ ), il existe un entier  $r$  dépendant de  $i$  et de  $j$ , tel que  $S_i$  transforme les éléments de chaque cycle  $C$  de  $S_j$  en éléments de  $r$  cycles de  $S_j$ , autres que  $C$ . Nous dirons alors que  $S_i$  jouit par rapport à  $S_j$  de la propriété  $p_r$ .

19. D'après la proposition 4, une condition nécessaire pour qu'un système régulièrement connexe de substitutions régulières qui jouit de la propriété  $\pi$  engendre un groupe régulier, c'est que ce système jouisse également de la propriété  $P$ .

20. *Proposition 5.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système régulièrement connexe de  $m$  substitutions régulières indépendantes de degré  $n$ , jouissant des propriétés  $\pi$  et  $P$ . Une condition nécessaire pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier c'est que, quel que soit le système 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  formé de  $k < m$  substitutions de la suite 1) et quelle que soit la substitution  $S_i$  de 1) qui ne fait pas partie de 2), il existe un entier positif  $\rho$  dépendant de  $S_i$  et du système 2), tel que, quel que soit le domaine de connexion  $\mathfrak{E}$  des substitutions 2), si  $S_i$  transforme au moins un élément de  $\mathfrak{E}$  en un élément d'un second domaine de connexion  $\mathfrak{E}'$  des substitutions 2), alors  $S_i$  transforme  $\rho$  éléments de  $\mathfrak{E}$  et  $\rho$  seulement en éléments de  $\mathfrak{E}'$ .

*Démonstration.* Soit 1) un système de  $m$  substitutions qui satisfont aux conditions de la proposition 5 et qui engendrent un groupe régulier  $G$ , soit 2) un système quelconque de  $k < m$  substitutions de 1), soit  $S_i$  une substitution de 1) qui ne fait pas partie de 2), soient 3)  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_l$  les domaines de connexion des substitutions 2), soit  $\mathfrak{E}_j$  un ensemble du système 3), tel que  $S_i$  transforme au moins un élément de l'ensemble  $\mathfrak{E}_1$

en un élément de  $\mathfrak{E}_j$ , soit  $\rho$  le nombre total d'éléments de  $\mathfrak{E}_1$  que  $S_i$  transforme en éléments de  $\mathfrak{E}_j$  et soit  $j'$  un nombre quelconque de la suite  $1, 2, \dots, l$ . Comme le groupe  $G$  est régulier, d'après la proposition 2,  $S_i$  ne saurait transformer un élément de  $\mathfrak{E}_{j'}$  en un élément du même ensemble. Soit  $\mathfrak{E}_{j''}$  ( $j'' \neq j'$ ) un quelconque des domaines 3), tels que  $S_i$  transforme au moins un élément de  $\mathfrak{E}_{j'}$  en un élément de  $\mathfrak{E}_{j''}$  et soit  $\rho'$  le nombre total d'éléments de  $\mathfrak{E}_{j'}$  que  $S_i$  transforme en éléments de  $\mathfrak{E}_{j''}$ . Montrons que  $\rho' = \rho$ . En effet, supposons le contraire et soit, par exemple,  $\rho' < \rho$ .

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_\rho$  les éléments de  $\mathfrak{E}_1$  que  $S_i$  transforme en éléments de  $\mathfrak{E}_j$  et soit  $b_h$  l'élément de  $\mathfrak{E}_j$  que  $S_i$  substitue à  $a_h$ ,  $h = 1, 2, \dots, \rho$ . Soient, d'autre part,  $c_1, c_2, \dots, c_{\rho'}$  les éléments de  $\mathfrak{E}_{j'}$  que  $S_i$  transforme en éléments de  $\mathfrak{E}_{j''}$  et soit  $d_h$  l'élément de  $\mathfrak{E}_{j''}$  que  $S_i$  substitue à  $c_h$ ,  $h = 1, 2, \dots, \rho'$ .

Soit 2')  $S'_{i_1}, S'_{i_2}, \dots, S'_{i_k}$  la suite formée des substitutions  $S'_{i_h} = S_i S_{i_h} S_i^{-1}$ ,  $h = 1, 2, \dots, k$ , et soient 3')  $\mathfrak{E}'_1, \mathfrak{E}'_2, \dots, \mathfrak{E}'_l$  les domaines de connexion des substitutions 2'), où  $\mathfrak{E}'_h$  est l'ensemble des éléments que  $S_i$  substitue aux éléments de  $\mathfrak{E}_h$ , quel que soit  $h = 1, 2, \dots, l$ .

D'après ce qui précède,  $\mathfrak{E}'_1$  contient les éléments  $b_1, b_2, \dots, b_\rho$  de  $\mathfrak{E}_j$  et ne contient pas d'autres éléments de  $\mathfrak{E}_j$ , alors que  $\mathfrak{E}'_{j'}$  contient les éléments  $d_1, d_2, \dots, d_{\rho'}$  de  $\mathfrak{E}_{j''}$  et ne contient pas d'autres éléments de  $\mathfrak{E}_{j''}$ . Comme  $\mathfrak{E}'_1$  est un domaine de connexion des substitutions 2'), il existe, pour tout entier  $h$  de la suite  $1, 2, \dots, \rho$ , une substitution  $U_h$  du groupe  $G'_1 = (S'_{i_1}, S'_{i_2}, \dots, S'_{i_k})$  qui fait passer de  $b_1$  à  $b_h$  et, comme  $\mathfrak{E}'_{j'}$  est aussi un domaine de connexion des substitutions 2'), chacune des substitutions  $U_h$  transforme  $d_1$  en un élément de  $\mathfrak{E}'_{j'}$ . Comme le groupe  $G$  est régulier, il ne saurait contenir deux substitutions différentes qui transforment  $d_1$  en un même nombre de la suite  $1, 2, \dots, n$ . Et, comme  $\rho' < \rho$  et que  $d_1, d_2, \dots, d_{\rho'}$  sont les seuls éléments de l'ensemble  $\mathfrak{E}_{j''}$  qui appartiennent à  $\mathfrak{E}'_{j'}$ , il s'ensuit qu'il existe un indice  $h$  ( $1 \leq h \leq \rho$ ), tel que  $U_h$  transforme  $d_1$  en un élément  $e$  de la suite  $1, 2, \dots, n$  qui  $\bar{\in} \mathfrak{E}_{j''}$ .

Or, comme  $b_1 \in \mathfrak{E}_j$  et  $b_h \in \mathfrak{E}_j$  et que  $\mathfrak{E}_j$  est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution  $V$  du groupe  $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k})$  qui fait passer de  $b_1$  à  $b_h$ . Or, cette substitution  $V$  transforme l'élément  $d_1$  de  $\mathfrak{E}_{j''}$  en un élément  $d'_1$  de  $\mathfrak{E}_{j''}$  puisque  $\mathfrak{E}_{j''}$  est un domaine de connexion des substitutions 2). Mais alors  $V \neq U_h$  et il existe deux substitutions distinctes du groupe  $G$  qui transforment  $b_1$  en  $b_h$ , ce qui est impossible, si le groupe  $G$  est régulier. On ne saurait donc avoir  $\rho' < \rho$ . De façon tout à fait analogue, on démontre qu'on ne saurait



avoir  $\varrho' > \varrho$  et par conséquent, si le groupe  $G$  est régulier, on a bien  $\varrho = \varrho'$ . La condition énoncée est donc bien nécessaire, c. q. f. d.

21. *Remarque 5.* On voit sans peine que le nombre  $\varrho$  dont il est question dans l'énoncé de la proposition 5 est un diviseur du degré  $n$  des substitutions du système 1).

22. *Définition.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système régulièrement connexe de  $m > 1$  substitutions régulières de degré  $n$ , qui jouit des propriétés  $\pi$  et  $P$ . Si, quel que soit le système 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  formé de  $k < m$  substitutions du système 1) et quelle que soit la substitution  $S_i$  du système 1) qui ne fait pas partie de 2), il existe un entier fixe  $\varrho$  dépendant de  $i, i_1, i_2, \dots, i_k$  et tel que, si  $S_i$  transforme au moins un élément d'un domaine de connexion  $\mathfrak{E}$  du système 2) en un élément d'un autre domaine de connexion  $\mathfrak{E}'$  de 2), alors  $S_i$  transforme  $\varrho$  éléments et  $\varrho$  seulement de  $\mathfrak{E}$  en éléments de  $\mathfrak{E}'$ , nous dirons que le système 1) jouit de la propriété  $Q$  et que la substitution  $S_i$  jouit par rapport au système 2) de la propriété  $Q_\varrho$ .

23. Il ressort de la proposition 5 qu'une condition nécessaire pour qu'un système régulièrement connexe de substitutions qui jouit des propriétés  $\pi$  et  $P$  engendre un groupe régulier, c'est que ce système jouisse aussi de la propriété  $Q$ .

24. *Corollaire 1.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système de substitutions défini dans l'énoncé de la proposition 5 et qui jouit de la propriété  $Q$ . Alors, si le groupe  $G$  est régulier, quel que soit le système 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  formé de  $k < m$  substitutions de 1) et quelle que soit la substitution  $S_i$  de 1) qui ne fait pas partie de 2), il existe trois entiers positifs  $\mu, r$  et  $\varrho$ , tels que  $\mu = r\varrho$ , que  $\mu$  est l'ordre de connexion du système de substitutions 2) et que  $S_i$  jouit par rapport au système 2) des propriétés  $P_r$  et  $Q_\varrho$ .

25. *Proposition 6.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système régulièrement connexe de substitutions régulières indépendantes de degré  $n$  qui jouit des propriétés  $\pi, P$  et  $Q$ . Alors une condition nécessaire pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier, c'est que, quel que soit le système 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  formé de  $k < m$  substitutions du système 1), le groupe  $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k})$  soit d'ordre égal à la puissance commune à tous les domaines de connexion du système 2).

*Démonstration.* Soit 1) un système de substitutions jouissant des propriétés énumérées dans l'énoncé de la proposition 6 et supposons que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  est régulier. Soit 2) un système quelconque

formé de  $k < m$  substitutions de 1) et soient  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_l$  les domaines de connexion des substitutions 2). Alors, comme le système 1) jouit de la propriété  $\pi$  et que  $k < m$ , on a  $l > 1$  et, comme le système 1) est régulièrement connexe, il existe un entier  $\mu$ , tel que

$$\mu = \overline{\mathfrak{E}}_1 = \overline{\mathfrak{E}}_2 = \dots = \overline{\mathfrak{E}}_l .$$

Soit  $i$  un indice quelconque de la suite  $1, 2, \dots, l$  et soient  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i\mu}$  les éléments de  $\mathfrak{E}_i$ . Comme  $\mathfrak{E}_i$  est un domaine de connexion du système 2), il existe, pour tout indice  $j$ , tel que  $1 \leq j \leq \mu$ , au moins une substitution du groupe  $G_1 = (S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{i\mu})$  qui fait passer de  $a_{i1}$  à  $a_{ij}$ . Il s'ensuit que le groupe  $G_1$  est d'ordre  $\geq \mu$ . Montrons que l'ordre  $\mu'$  de  $G_1$  ne saurait être supérieur à  $\mu$ . En effet, supposons le contraire. Mais alors, comme  $\mathfrak{E}_i$  est un domaine de connexion des substitutions 2), toute substitution du groupe  $G_1$  transforme  $a_{i1}$  en un élément de l'ensemble  $\mathfrak{E}_i$  et, comme  $\overline{\mathfrak{E}}_i = \mu < \mu'$ , deux substitutions au moins du groupe  $G_1$  (donc aussi du groupe  $G$ , puisque  $G_1 \subset G$ ) transforment  $a_{i1}$  en un même élément de l'ensemble  $\mathfrak{E}_i$ , ce qui est impossible, si le groupe  $G$  est régulier. On a donc bien  $\mu' = \mu$ , si le groupe  $G$  est régulier, c. q. f. d.

26. *Remarque 6.* Il résulte de la proposition 6 que, si 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  est un système régulièrement connexe de substitutions indépendantes qui jouit des propriétés  $\pi$ ,  $P$  et  $Q$  et qui engendre un groupe régulier, quelles que soient les substitutions 2)  $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ik}$  ( $1 \leq k < m$ ) du système 1) et quel que soit le domaine de connexion  $\mathfrak{E}$  des substitutions 2), si l'on désigne par  $S'_{ih}$  la substitution comprenant l'ensemble des cycles de  $S_{ih}$  composés des éléments de  $\mathfrak{E}$ , quel que soit  $h = 1, 2, \dots, k$ , alors l'ensemble des substitutions  $S'_{i1}, S'_{i2}, \dots, S'_{ik}$  des éléments de  $\mathfrak{E}$  constitue un groupe régulier d'ordre et de degré égal à la puissance de  $\mathfrak{E}$ .

27. *Proposition 7.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système régulièrement connexe de substitutions régulières indépendantes qui jouit des propriétés  $\pi$ ,  $P$  et  $Q$ . Une condition nécessaire pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier, c'est que, quel que soit le système 2)  $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ik}$  formé de  $k < m$  substitutions du système 1), dont les domaines de connexion sont les ensembles 3)  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_l$ , et quelle que soit la substitution  $S_i$  du système 1) qui ne fait pas partie de 2):

a) Si un cycle de la substitution  $S_i$  contient au maximum un élément de l'ensemble  $\mathfrak{E}_j$ , quel que soit  $j = 1, 2, \dots, l$ , tout cycle de  $S_i$  contient au maximum un élément de  $\mathfrak{E}_j$ , quel que soit  $j = 1, 2, \dots, l$ .



b) Si un cycle  $C = (a_1, a_2, \dots, a_t)$  de  $S_i$  contient (au moins) deux éléments d'un même ensemble  $\mathfrak{E}_j$  ( $1 \leq j \leq l$ ) et si  $\lambda$  est le plus petit entier positif, tel que les deux éléments  $a_\alpha$  et  $a_{\alpha+\lambda}$  de  $C$  font partie d'un même ensemble de la famille 3) pour une valeur au moins de  $\alpha = 1, 2, \dots, t$ , alors quel que soit le cycle  $C' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_t)$  de  $S_i$  (distinct ou non de  $C$ ) et quel que soit l'indice  $\beta$  ( $1 \leq \beta \leq t$ ), les éléments  $a'_\beta, a'_{\beta+1}, \dots, a'_{\beta+\lambda-1}$  de  $C'$  font partie de  $\lambda$  ensembles différents du système 3), alors que  $a'_\beta$  et  $a'_{\beta+\lambda}$  \*) font partie d'un même ensemble de la famille 3).

*Démonstration.* Supposons que le groupe  $G$  est régulier.

a) Soit  $C = (a_1, a_2, \dots, a_t)$  un cycle de  $S_i$  qui contient au plus un élément de l'ensemble  $\mathfrak{E}_j$ , quel que soit  $j = 1, 2, \dots, l$ , et soit  $C' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_t)$  un cycle quelconque de  $S_i$  (différent de  $C$  ou non). Il s'agit de montrer que deux éléments de  $C'$  ne sauraient faire partie d'un même ensemble de la famille 3).

En effet, supposons le contraire et soient  $a'_\alpha$  et  $a'_\beta$  ( $1 \leq \alpha < \beta \leq t$ ) deux éléments de  $C'$  qui font partie d'un même ensemble  $\mathfrak{E}_j$  de la famille 3). Alors la substitution  $S_i^{\beta-\alpha}$  fait passer de l'élément  $a'_\alpha$  de  $\mathfrak{E}_j$  à l'élément  $a'_\beta$  du même ensemble  $\mathfrak{E}_j$ . Mais comme, par hypothèse, les éléments de  $C$  font partie de  $t$  ensembles différents de la famille 3), il existe deux indices  $j'$  et  $j''$ , tels que  $1 \leq j' \leq l$ ,  $1 \leq j'' \leq l$ ,  $j' \neq j''$ ,  $a_1 \in \mathfrak{E}_{j'}$ ,  $a_{1+\beta-\alpha} \in \mathfrak{E}_{j''}$ . Donc la substitution  $S_i^{\beta-\alpha}$  fait passer de l'élément  $a_1$  de  $\mathfrak{E}_{j'}$  à l'élément  $a_{1+\beta-\alpha}$  de  $\mathfrak{E}_{j''}$  et, par conséquent, la substitution  $S_i^{\beta-\alpha}$  ne fait pas partie du groupe  $G_1$  engendré par les substitutions 2) dont  $\mathfrak{E}_{j'}$  et  $\mathfrak{E}_{j''}$  sont deux domaines de connexion. Mais, comme  $\mathfrak{E}_j$  est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution  $T$  du groupe  $G_1$  qui fait passer de l'élément  $a'_\alpha$  de  $\mathfrak{E}_j$  à l'élément  $a'_\beta$  du même ensemble et, d'après ce qui précède,  $T \neq S_i^{\beta-\alpha}$ . Il existe donc deux substitutions distinctes  $S_i^{\beta-\alpha}$  et  $T$  du groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  qui transforment  $a'_\alpha$  en  $a'_\beta$ , ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que le groupe  $G$  est régulier.

Donc  $C'$  ne saurait contenir deux éléments d'un même ensemble  $\mathfrak{E}_j$ , quel que soit  $j = 1, 2, \dots, l$ , c. q. f. d.

b) Soit  $C = (a_1, a_2, \dots, a_t)$  un cycle de  $S_i$  qui contient deux éléments au moins d'un même ensemble du système 3). Soit  $\lambda$  le plus petit entier positif, tel qu'il existe un indice  $\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq t$ ) et un indice  $j$  ( $1 \leq j \leq l$ ), tels que les deux éléments  $a_\alpha$  et  $a_{\alpha+\lambda}$  de  $C$  font partie de l'ensemble  $\mathfrak{E}_j$  et soit  $C' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_t)$  un cycle quelconque de  $S_i$  (distinct ou non de  $C$ ).

La substitution  $S_i^\lambda$  transforme l'élément  $a_\alpha$  de  $\mathfrak{E}_j$  en l'élément  $a_{\alpha+\lambda}$  du

---

\*) où  $\beta + \lambda$  doit être remplacé par  $\beta + \lambda - t$ , si  $\beta + \lambda > t$ .

même ensemble et, comme  $\mathfrak{E}_j$  est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution  $T$  du groupe  $G_1$  qui transforme  $a_\alpha$  en  $a_{\alpha+\lambda}$ . Et comme le groupe  $G$  est, par hypothèse, régulier, on doit avoir  $S_i^\lambda = T$ . Donc  $S_i^\lambda \in G_1$ .

Or, quel que soit l'élément  $a'_\beta$  du cycle  $C'$ , la substitution  $S_i^\lambda$  transforme  $a'_\beta$  en  $a'_{\beta+\lambda}$  et, comme  $S_i^\lambda \in G_1$ , cette substitution transforme tout élément d'un ensemble 3) en un élément du même ensemble. Donc  $a'_\beta$  et  $a'_{\beta+\lambda}$  font nécessairement partie d'un même ensemble du système 3). Mais les éléments  $a'_\beta, a'_{\beta+1}, \dots, a'_{\beta+\lambda-1}$  font nécessairement partie de  $\lambda$  ensembles différents du système 3). En effet, supposons le contraire et supposons, par exemple, que  $a'_{\beta+\mu}$  et  $a'_{\beta+\nu}$  ( $\beta \leq \beta + \mu < \beta + \nu \leq \beta + \lambda - 1$ ) font partie d'un même ensemble  $\mathfrak{E}_{j'}$  du système 3). Alors la substitution  $S_i^{\nu-\mu}$  transforme l'élément  $a'_{\beta+\mu}$  de  $\mathfrak{E}_{j'}$  en l'élément  $a'_{\beta+\nu}$  du même ensemble, mais, d'après la définition du nombre  $\lambda$ ,  $S_i^{\nu-\mu}$  transforme l'élément  $a_\alpha$  de  $\mathfrak{E}_j$  en l'élément  $a_{\alpha+\nu-\mu}$  qui  $\bar{\in} \mathfrak{E}_j$ . Donc  $S_i^{\nu-\mu} \bar{\in} G_1$ . Or, comme  $\mathfrak{E}_{j'}$  est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution  $T$  du groupe  $G_1$  qui fait passer, elle aussi, de  $a'_{\beta+\mu}$  à  $a'_{\beta+\nu}$ . Mais  $T$  transforme  $a_\alpha$  en un élément de  $\mathfrak{E}_j$  de sorte que  $T \neq S_i^{\nu-\mu}$ . Ainsi deux substitutions différentes  $S_i^{\nu-\mu}$  et  $T$  du groupe  $G$  transforment  $a'_{\beta+\mu}$  en  $a'_{\beta+\nu}$ , ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que le groupe  $G$  est régulier. On voit donc que les nombres  $a'_\beta, a'_{\beta+1}, \dots, a'_{\beta+\lambda-1}$  font bien partie de  $\lambda$  ensembles différents de la suite 3). La condition énoncée est donc bien nécessaire, c. q. f. d.

28. *Proposition 8.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système régulièrement connexe de substitutions régulières indépendantes qui jouit des propriétés  $\pi$ ,  $P$  et  $Q$  et soient  $S_i$  et  $S_j$  deux substitutions quelconques du système 1). Une condition nécessaire pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier, c'est qu'il existe deux entiers positifs  $r$  et  $\mu^*$ ), tels que  $S_i S_j^r S_i^{-1} = S_j^\mu$ .

*Démonstration.* Supposons que le groupe  $G$  est régulier. Comme le système 1) jouit de la propriété  $P$ , quelles que soient les substitutions  $S_i$  et  $S_j$  de ce système, il existe un entier  $r \geq 1$ , tel que  $S_i$  jouit par rapport à  $S_j$  de la propriété  $p_r$ . Soit  $C = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$  un cycle quelconque de  $S_j$  et soit  $\beta_h$  le nombre que  $S_i$  substitue à  $\alpha_h$ , quel que soit  $h = 1, 2, \dots, t$ . Soit  $\alpha_h$  un élément quelconque de  $C$ . Alors les nombres  $\beta_h, \beta_{h+1}, \dots, \beta_{h+r-1}$  font partie de  $r$  cycles différents de  $S_j$ . En effet, supposons le contraire et admettons que  $\beta_h$  et  $\beta_{h+k}$  ( $1 \leq k \leq r - 1$ ) font partie d'un même cycle de  $S_j$ . La substitution  $S_i S_j S_i^{-1}$  contient le cycle  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$  et

---

\*) dépendant de  $i$  et de  $j$ .

$(S_i S_j S_i^{-1})^k$  transforme  $\beta_h$  en  $\beta_{h+k}$ . Comme les deux éléments  $\beta_h$  et  $\beta_{h+k}$  font partie d'un même cycle de  $S_j$ , il existe une itérée  $S_j^q$  de  $S_j$  qui transforme  $\beta_h$  en  $\beta_{h+k}$ . Et, comme le groupe  $G$  est régulier, on doit avoir  $(S_i S_j S_i^{-1})^k = S_j^q$ .

Mais alors, quel que soit le cycle  $C' = (\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_t)$  de  $S_j$ , si on appelle  $\beta'_h$  l'élément que  $S_i$  substitue à  $\alpha'_h$  ( $h = 1, 2, \dots, t$ ), quel que soit l'élément  $\alpha'_h$  de  $C'$ , les nombres  $\beta'_h$  et  $\beta'_{h+k}$  font partie d'un même cycle de  $S_j$ . Donc  $S_i$  transforme les éléments de chaque cycle de  $S_j$  au plus en éléments de  $k$  autres cycles de  $S_j$  et, par suite, comme  $k < r$ ,  $S_i$  ne jouit pas par rapport à  $S_j$  de la propriété  $p_r$ , ce qui est en contradiction avec le fait constaté au début de la démonstration que  $S_i$  jouit par rapport à  $S_j$  de la propriété  $p_r$ . Donc  $\beta_h, \beta_{h+1}, \dots, \beta_{h+r-1}$  font bien partie de  $r$  cycles différents de  $S_j$ . Par contre,  $\beta_h$  et  $\beta_{h+r}$  font nécessairement partie d'un même cycle de  $S_j$ . En effet, comme  $S_i$  jouit par rapport à  $S_j$  de la propriété  $p_r$ , les nombres  $\beta_h, \beta_{h+1}, \dots, \beta_{h+r}$  qui sont au nombre de  $r + 1 > r$  ne sauraient appartenir à  $r + 1$  cycles différents de  $S_j$  et, par conséquent, deux éléments au moins de cette suite font partie d'un même cycle de  $S_j$ . Or, d'après ce qui précède, les éléments  $\beta_h, \beta_{h+1}, \dots, \beta_{h+r-1}$  font nécessairement partie de  $r$  cycles différents de  $S_j$ . Il s'ensuit que  $\beta_h$  et  $\beta_{h+r}$  font bien partie d'un même cycle de  $S_j$ .

Cela étant quel que soit le cycle  $C$  de  $S_j$ , il s'ensuit que la substitution  $(S_i S_j S_i^{-1})^r = S_i S_j^r S_i^{-1}$  transforme tout élément de chaque cycle de  $S_j$  en un élément du même cycle.

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments quelconques d'un même cycle de  $S_j$ , tels que  $S_i S_j^r S_i^{-1}$  transforme  $a$  en  $b$  et soit  $\mu$  le plus petit entier positif, tel que  $S_j^\mu$  transforme  $a$  en  $b$ . Comme le groupe  $G$  est, par hypothèse, régulier, on doit nécessairement avoir  $S_i S_j^r S_i^{-1} = S_j^\mu$ .

La condition énoncée est donc bien nécessaire, c. q. f. d.

29. *Définition.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système de  $m$  substitutions régulières indépendantes de degré  $n$  qui satisfait aux conditions nécessaires pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier, énoncées dans les propositions 1—8. Nous dirons qu'un tel système de substitutions est *régulier*.

30. *Remarque 7.* Un système régulier de substitutions 1) (voir § 29) n'engendre pas forcément un groupe régulier.

En effet, considérons, par exemple, les substitutions

$$\begin{aligned} S_1 &= (1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 6)\ (7\ 8)\ (9\ 10)\ (11\ 12)\ (13\ 14)\ (15\ 16)\ (17\ 18)\ (19\ 20)\ (21\ 22)\ (23\ 24), \\ S_2 &= (2\ 3)\ (4\ 5)\ (6\ 1)\ (8\ 9)\ (10\ 11)\ (12\ 7)\ (14\ 15)\ (16\ 17)\ (18\ 13)\ (20\ 21)\ (22\ 23)\ (24\ 19), \\ S_3 &= (2\ 7)\ (8\ 13)\ (14\ 1)\ (10\ 15)\ (16\ 21)\ (22\ 9)\ (6\ 11)\ (12\ 19)\ (5\ 20)\ (4\ 17)\ (18\ 23)\ (3\ 24). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que le système formé de ces trois substitutions est régulier (quels que soient les indices distincts  $i$  et  $j$  de la suite 1, 2, 3, chacune des substitutions  $S_i, S_j$  jouit par rapport à l'autre de la propriété  $p_2$  et l'ordre de connexion des substitutions  $S_i, S_j$  est égal à 6, alors que le système formé des trois substitutions  $S_1, S_2, S_3$  est connexe, et chacune des substitutions  $S_1, S_2, S_3$  jouit par rapport aux deux autres des propriétés  $P_3$  et  $Q_2$ ).

Or, le groupe  $(S_1, S_2, S_3)$  n'est pas régulier. En effet, les deux substitutions  $S_3S_2$  et  $S_1S_2S_3S_1$  transforment 1 en 11. Mais  $S_3S_2$  transforme 2 en 24 alors que  $S_1S_2S_3S_1$  transforme 2 en  $16 \neq 24$ . Donc deux substitutions distinctes du groupe  $(S_1, S_2, S_3)$  transforment 1 en 11 et, par conséquent, ce groupe n'est pas régulier.

31. *Proposition 9.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système régulièrement connexe de  $m$  substitutions régulières indépendantes de degré  $n$  qui jouit des propriétés  $\pi, P$  et  $Q$ . Soit 2)  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  un système de  $k < m$  substitutions de la suite 1) dont les domaines de connexion sont les ensembles 3)  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_l$ , soit  $\overline{\mathfrak{E}}_1 = \overline{\mathfrak{E}}_2 = \dots = \overline{\mathfrak{E}}_l = \rho$  et soit  $S_i$  une substitution du système 1) qui ne fait pas partie de 2) et qui jouit par rapport à 2) de la propriété  $P_\rho$ . Alors une condition nécessaire pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier, c'est qu'aucun cycle de  $S_i$  ne contienne plus d'un élément d'un même ensemble 3).

*Démonstration.* En effet, supposons le contraire et soit  $C = (a_1 a_2 \dots a_t)$  un cycle de  $S_i$  qui contient deux éléments d'un même ensemble de la suite 3). Soient  $a_\lambda$  et  $a_\mu$  ( $1 \leq \lambda < \mu \leq t$ ) deux tels éléments de  $C$  et soit  $\mathfrak{E}_j$  l'ensemble de la famille 3) qui les contient tous les deux.

On ne saurait avoir  $\mu = \lambda + 1$  ni  $\lambda = \mu + 1 - t$  puisque  $S_i$  jouit par rapport à 2) de la propriété  $P_\rho$  et, par conséquent, transforme les éléments de  $\mathfrak{E}_j$  en éléments de  $\rho$  ensembles de la suite 3), autres que  $\mathfrak{E}_j$ . Mais alors  $a_{\lambda+1}$  et  $a_{\mu+1}$  font partie de deux ensembles différents de la suite 3), soit  $a_{\lambda+1} \in \mathfrak{E}_{j'}$ ,  $a_{\mu+1} \in \mathfrak{E}_{j''}$ ,  $j' \neq j''$ ,  $j' \neq j$ ,  $j'' \neq j$ . Considérons la substitution  $S_i^{\mu-\lambda}$ . Elle transforme l'élément  $a_\lambda$  de  $\mathfrak{E}_j$  en l'élément  $a_\mu$  de  $\mathfrak{E}_j$  et l'élément  $a_{\lambda+1}$  de  $\mathfrak{E}_{j'}$  en l'élément  $a_{\mu+1}$  de  $\mathfrak{E}_{j''} \neq \mathfrak{E}_{j'}$ . Donc  $S_i^{\mu-\lambda} \notin G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k})$ , car les ensembles 3) sont les domaines de connexion des substitutions 2) et, par conséquent, toute substitution du groupe  $G_1$  transforme  $a_{\lambda+1}$  en un élément de  $\mathfrak{E}_{j'}$ . Or, comme  $a_\lambda$  et  $a_\mu$  font partie de  $\mathfrak{E}_j$  et que  $\mathfrak{E}_j$  est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution  $T$  du groupe  $G_1$  qui fait passer de  $a_\lambda$  à  $a_\mu$  et on a  $T \neq S_i^{\mu-\lambda}$ . Donc deux substitutions distinctes du groupe

$G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  transforment  $a_\lambda$  en  $a_\mu$  et  $G$  n'est pas régulier. La condition énoncée est donc bien nécessaire.

32. *Corollaire 2.* Il résulte de la proposition 9 que, si  $S_i$  jouit par rapport au système 2) de la propriété  $P_\rho$ ,  $S_i$  est d'ordre  $\leq l$ . En effet, chaque cycle de  $S_i$  peut alors contenir au plus un élément de chaque ensemble de la famille 3) et le nombre de ces ensembles est égal à  $l$ .

33. *Proposition 10.* Soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système régulier de  $m \geq 2$  substitutions de degré  $n$ . Alors, s'il existe (au moins) une substitution  $S_i$  du système 1) qui jouit par rapport à l'ensemble des autres substitutions du système 1) de la propriété  $P_1$ , la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier, c'est que,  $h$  désignant le nombre de domaines de connexion des substitutions 2)  $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, S_{i+2}, \dots, S_m$ , on ait les relations

$$\text{I) } S_i^h \in G_1 = (S_1, S_2, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, S_{i+2}, \dots, S_m)$$

et

$$\text{II) } S_i^j S_j S_i^{-j} \in G_1, \text{ quels que soient } j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m \\ \text{et } f = 1, 2, \dots, h-1.$$

*Démonstration.* La condition est nécessaire. En effet, soit 1) un système régulier de substitutions de degré  $n$  qui engendre un groupe régulier  $G$ . Soit  $S_i$  une substitution de ce système qui jouit par rapport aux substitutions 2) de la propriété  $P_1$ . Soient 3)  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_h$  ( $h \geq 2$ ) les domaines de connexion du système 2).

Comme le système 1) est régulier, il est connexe et, par conséquent, comme  $S_i$  jouit par rapport au système 2) de la propriété  $P_1$ , il existe une permutation  $i_1, i_2, \dots, i_h$  des nombres  $1, 2, \dots, h$ , telle que  $S_i$  transforme  $\mathfrak{E}_{i_1}$  en  $\mathfrak{E}_{i_2}$ ,  $\mathfrak{E}_{i_2}$  en  $\mathfrak{E}_{i_3}$ ,  $\dots$ ,  $\mathfrak{E}_{i_{h-1}}$  en  $\mathfrak{E}_{i_h}$  et  $\mathfrak{E}_{i_h}$  en  $\mathfrak{E}_{i_1}$ . Donc  $S_i$  est d'ordre  $\geq h$ . Soit  $a_1$  un élément quelconque de l'ensemble  $\mathfrak{E}_{i_1}$  et soit  $a_2, a_3, \dots, a_h, a'_1$  la suite formée de nombres de la suite  $1, 2, \dots, n$ , tels que  $S_i$  transforme  $a_1$  en  $a_2$ ,  $a_2$  en  $a_3$ ,  $\dots$ ,  $a_{h-1}$  en  $a_h$  et  $a_h$  en  $a'_1$ . D'après ce qui précède,  $a_j \in \mathfrak{E}_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ , et  $a'_1 \in \mathfrak{E}_{i_1}$ .

Soit  $G_1 = (S_1, S_2, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_m)$ .

Comme  $S_i$  transforme chaque ensemble  $\mathfrak{E}_{i_l}$  ( $l = 1, 2, \dots, h$ ) de la suite 3) en l'ensemble  $\mathfrak{E}_{i_{l+1}}$  (l'indice  $l+1$  devant être remplacé par 1, si  $l = h$ ) et comme chaque ensemble de la suite 3) est un domaine de connexion des substitutions 2), chaque substitution de l'ensemble  $G_1 S_i^j$  transforme  $\mathfrak{E}_{i_1}$  en  $\mathfrak{E}_{i_{1+j}}$ , quel que soit  $j = 1, 2, \dots, h-1$ . Il s'ensuit que ces substitutions, qui sont toutes distinctes, diffèrent des substitutions

du groupe  $G_1$ , dont chacune transforme l'ensemble  $\mathfrak{E}_{i_1}$  en lui-même. Donc l'ensemble 4)  $G_1 + G_1 S_i + G_1 S_i^2 + \dots + G_1 S_i^{h-1}$  est d'ordre  $\mu h$ , où  $\mu$  est la puissance du groupe  $G_1$ . Or,  $\mu$  est aussi l'ordre de connexion des substitutions 2), puisque le système 1) est régulier. Donc  $\mu h = n$ . Toutes les substitutions de l'ensemble 4) font partie du groupe  $G$  qui est de degré  $n$ , de sorte que, comme  $G$  est régulier, il ne comprend pas d'autres substitutions. Donc les substitutions  $S_i^h$  et  $S_i^f S_j$  ( $f = 1, 2, \dots, h-1$ ,  $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ ) doivent toutes figurer parmi les substitutions 4). Or,  $S_i^h$  transforme l'élément  $a_1$  de  $\mathfrak{E}_{i_1}$  en l'élément  $a'_1$  du même ensemble qui est un domaine de connexion du système 2). Il existe donc une substitution  $T$  du groupe  $G_1$  qui transforme  $a_1$  en  $a'_1$  et, comme  $G$  est régulier, on doit avoir  $S_i^h = T$ , donc  $S_i^h \in G_1$ .

Soit, d'autre part,  $j$  un nombre quelconque de la suite  $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ , soit  $f$  un nombre quelconque de la suite  $1, 2, \dots, h-1$  et soit  $\alpha_j$  l'élément de la suite  $1, 2, \dots, n$  que  $S_j$  transforme en  $a_1$ . Comme  $\mathfrak{E}_{i_1}$  est un domaine de connexion des substitutions 2), que  $S_j$  est une substitution du système 2) et que  $a_1 \in \mathfrak{E}_{i_1}$ , on a aussi  $\alpha_j \in \mathfrak{E}_{i_1}$ . La substitution  $S_i^f S_j$  transforme  $\alpha_j$  en  $a_{1+f} \in \mathfrak{E}_{i_1+f}$ . D'autre part, la substitution  $S_i^f$  qui, d'après ce qui précède, transforme l'ensemble  $\mathfrak{E}_{i_1}$  en  $\mathfrak{E}_{i_1+f}$ , transforme l'élément  $\alpha_j$  de  $\mathfrak{E}_{i_1}$  en un certain élément  $\beta_j$  de  $\mathfrak{E}_{i_1+f}$  et, comme  $\mathfrak{E}_{i_1+f}$  est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution  $T$  du groupe  $G_1$  qui transforme  $\beta_j$  en  $a_{1+f}$ . Donc les deux substitutions  $S_i^f S_j$  et  $T S_i^f$  du groupe  $G$  transforment  $\alpha_j$  en  $a_{1+f}$  et, comme  $G$  est régulier, on doit avoir  $S_i^f S_j = T S_i^f$ , donc  $S_i^f S_j S_i^{-f} = T$  et, comme  $T \in G_1$ , on voit donc bien que II)  $S_i^f S_j S_i^{-f} \in G_1$ , quels que soient  $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$  et  $f = 1, 2, \dots, h-1$ .

La condition énoncée est donc bien nécessaire.

*La condition est suffisante.* En effet, supposons qu'elle est satisfaite. Comme le système 1) est connexe, le groupe  $G$  engendré par les substitutions 1) est transitif. Il est donc d'ordre  $\lambda \geq n$  ( $\dagger$ ). Et comme on a les relations I) et II), le groupe  $G$  ne comprend que des substitutions de l'ensemble 4)  $G_1 + G_1 S_i + G_1 S_i^2 + \dots + G_1 S_i^{h-1}$  qui est de puissance  $n$ , puisque le système 1) est régulier. Donc  $\lambda \leq n$  ( $\dagger\dagger$ ) et de ( $\dagger$ ) et ( $\dagger\dagger$ ) il résulte que  $\lambda = n$ . Donc  $G$  est régulier, c. q. f. d.

34. *Remarque 8.* Soit  $n$  un entier pair  $\geq 4$  et soient  $S$  et  $T$  deux substitutions régulières du second ordre et de degré  $n$  portant sur les éléments  $1, 2, \dots, n$ . Alors, si  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p_1$ ,  $S$  jouit à son tour par rapport à  $T$  de la propriété  $p_1$  et les deux substitutions  $S$  et  $T$  sont permutable.



En effet, soient  $S$  et  $T$  deux substitutions régulières du second ordre et de degré  $n \geq 4$ , telles que  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p_1$ . Soit  $(a b)$  un cycle quelconque de  $S$ . Comme  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p_1$ , il existe un second cycle  $(c d)$  de  $S$ , tel que  $T$  transforme  $a$  en  $c$  et  $b$  en  $d$  et, comme  $T$  est du second ordre,  $T$  contient les deux cycles  $(a c)$  et  $(b d)$ . On peut donc répartir tous les cycles de  $S$  en couples, tels que  $(a b)$ ,  $(c d)$ , et à chacun de ces couples correspond le couple  $(a c)$   $(b d)$  de cycles de la substitution  $T$ . Il s'ensuit que  $S$  jouit à son tour par rapport à  $T$  de la propriété  $p_1$  et que les deux substitutions  $S$  et  $T$  sont permutables, c. q. f. d.

35. *Proposition 11.* Soient  $m \geq 2$  et  $n = 2n' \geq 4$  deux entiers et soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système de  $m$  substitutions régulières indépendantes du second ordre et de degré  $n$  portant sur les éléments  $1, 2, \dots, n$  et supposons que, quels que soient les indices  $i$  et  $j$  ( $1 \leq i < j \leq m$ ), les deux substitutions  $S_i$  et  $S_j$  jouissent l'une par rapport à l'autre de la propriété  $p_1$ . Alors la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier c'est que le système 1) soit connexe et que  $n = 2^m$ .

*Démonstration. La condition est nécessaire.* En effet, supposons que le groupe  $G$  est régulier. Il est donc transitif, d'ordre et de degré  $n$ . Or, si le système 1) n'était pas connexe, le groupe qu'il engendre serait intransitif, ce qui est contradictoire. Donc le système 1) est nécessairement connexe. D'autre part, comme les substitutions 1) jouissent deux à deux de la propriété  $p_1$ , d'après la remarque 8, elles sont deux à deux permutables et, comme les substitutions 1) sont indépendantes, le groupe  $G$  se compose des substitutions  $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \dots S_m^{i_m}$ , où  $i_h = 1$  ou  $2$ , quel que soit  $h = 1, 2, \dots, m$ , substitutions qui sont toutes distinctes et qui sont au nombre de  $2^m$ . On a donc bien  $n = 2^m$  et la condition énoncée est nécessaire.

*La condition est suffisante.* En effet, supposons qu'elle est satisfaite, Comme le système 1) est connexe, le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  est transitif et comme ce groupe est de degré  $n$ , son ordre  $\lambda$  est  $\geq n$ . Montrons que  $\lambda = n$ . En effet, comme les substitutions 1) jouissent deux à deux de la propriété  $p_1$ , elles sont permutables deux à deux, d'après la remarque 8, et par conséquent le groupe qu'elles engendrent se compose des substitutions 2)  $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \dots S_m^{i_m}$ , où  $i_1, i_2, \dots, i_m$  ont la même signification que ci-dessus ; toutes ces substitutions sont distinctes puisque le système 1) est formé de substitutions indépendantes. Donc les substitutions 2) sont au nombre de  $2^m$  et, comme  $n = 2^m$ , le groupe  $G$

qui est transitif est d'ordre égal à son degré. Il est donc régulier, ce qui prouve que la condition est suffisante.

36. *Proposition 12.* Soient  $m \geq 2$  et  $n > 1$  deux entiers, soit 1)  $S_1, S_2, \dots, S_m$  un système de  $m$  substitutions indépendantes, permutable deux à deux, de degré  $n$  et telles que l'égalité I)  $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \dots S_m^{i_m} = S_1^{j_1} S_2^{j_2} \dots S_m^{j_m}$ , où  $i_1, i_2, \dots, i_m$  ainsi que  $j_1, j_2, \dots, j_m$  sont des entiers, implique les congruences II)  $i_h \equiv j_h \pmod{n_h}$ ,  $n_h$  désignant l'ordre de la substitution  $S_h$ , quel que soit  $h = 1, 2, \dots, m$ . La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe  $G = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  soit régulier c'est que le système 1) soit connexe et que  $n = n_1 n_2 \dots n_m$ .

*Démonstration.* La condition est nécessaire. En effet, soit 1) un système de substitutions indépendantes, permutable deux à deux et qui engendrent un groupe régulier  $G$ . Donc  $G$  est transitif, ce qui implique que le système 1) est connexe. D'autre part, comme  $G$  est régulier, l'ordre de ce groupe est égal à son degré  $n$ . Or, comme les substitutions 1) sont permutable deux à deux, qu'elles sont indépendantes et que I) implique II), les substitutions 2)  $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \dots S_m^{i_m}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots, n_1$ ;  $i_2 = 1, 2, \dots, n_2$ ;  $\dots$ ;  $i_m = 1, 2, \dots, n_m$ ) sont toutes distinctes et le groupe  $G$  ne comprend pas d'autres substitutions que celles de la suite 2). Or, les substitutions 2) sont au nombre de  $n_1 n_2 \dots n_m$ . On doit donc avoir  $n = n_1 n_2 \dots n_m$  et la condition énoncée est bien nécessaire.

*La condition est suffisante.* En effet, supposons qu'elle est satisfaite. Donc le système 1) est connexe et on a l'égalité  $n = n_1 n_2 \dots n_m$ . Comme le système 1) est connexe, il engendre un groupe transitif  $G$  dont l'ordre  $\lambda \geq n$ . D'autre part, comme les substitutions 1) sont indépendantes, qu'elles sont deux à deux permutable et que I) implique II), les substitutions  $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \dots S_m^{i_m}$ , où  $i_h$  prend les valeurs  $1, 2, \dots, n_h$ , quel que soit  $h = 1, 2, \dots, m$ , sont toutes distinctes et elles font toutes partie du groupe  $G$ . Donc  $\lambda = n$ . Ainsi le groupe  $G$  est transitif d'ordre et de degré  $n$ . Il est donc régulier et la condition est suffisante, c. q. f. d.

(Reçu le 10 mars 1946.)