

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Band:** 19 (1946-1947)

**Artikel:** Beiträge zur Theorie der singulären Integrale bei Funktionen von mehreren Variablen. I.  
**Autor:** Conzelmann, Rolf  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17348>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 04.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Beiträge zur Theorie der singulären Integrale bei Funktionen von mehreren Variablen I

VON ROLF CONZELMANN, Basel

## § 1. Einleitung

1. Mit der Frage, eine in einem Intervall  $J$  gegebene Funktion  $f$  mit Hilfe eines „Kerns“  $K$  in der Gestalt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f(\xi) K(\xi, x; n) d\xi \quad (1.1)$$

darzustellen, befaßt sich die Theorie der singulären Integrale, die hauptsächlich von *H. Lebesgue*<sup>1)</sup> auf breiter Basis systematisch entwickelt und auch zu einem gewissen Abschluß gebracht worden ist. Weitere bedeutende Verallgemeinerungen und Vertiefungen verdankt man *I. W. Hobson*<sup>2)</sup> und *H. Hahn*<sup>3)</sup>. Letzterer hat insbesondere die Frage der „Differenzierbarkeit der Grenzrelation (1.1)“ eingehend untersucht, wobei wir (1.1) als  $s$ -mal differenzierbar bezeichnen wollen, wenn — unter  $x$  ein beliebiger Punkt aus dem offenen Intervall  $J$  verstanden, in welchem  $f$   $s$ -mal differenzierbar ist — die  $s + 1$  Relationen

$$\left( \frac{d^\sigma f(\xi)}{d\xi^\sigma} \right)_{\xi=x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f(\xi) \frac{\partial^\sigma K(\xi, x; n)}{\partial x^\sigma} d\xi \quad (\sigma = 0, 1, \dots, s) \quad (1.2)$$

gleichzeitig bestehen.

2. Es ist zu erwarten, daß die entsprechenden Probleme sich auf analoge Weise auch in mehreren Dimensionen behandeln lassen. *B. H. Camp*<sup>4)</sup> hat in großer Allgemeinheit eine Übertragung der auf (1.1) bezüglichen Sätze in den  $m$ -dimensionalen Raum ( $m > 1$ ) durchgeführt. Was die Relationen (1.2) anbetrifft, so werden naturgemäß partielle Ableitungen an die Stelle der gewöhnlichen treten müssen. Eine allgemeine Formulierung für  $m > 1$  Dimensionen findet sich meines Wissens nur in einer Arbeit von *Th. Radacovič*<sup>5)</sup>, allerdings unter sehr speziellen Annahmen.

---

<sup>1)</sup> *H. Lebesgue* (I). Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich jeweils auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

<sup>2)</sup> *I. W. Hobson* (II), pp. 422—475.

<sup>3)</sup> *H. Hahn* (I).

<sup>4)</sup> *B. H. Camp* (I).

<sup>5)</sup> *Th. Radacovič* (I).



Insbesondere wird dort von den mit ihren Ableitungen darzustellenden Funktionen  $f$  vorausgesetzt, daß sie selbst im ganzen  $m$ -dimensionalen Grundintervall  $J$  stetig seien und daß ihre sämtlichen partiellen Ableitungen bis zur  $s$ -ten Ordnung in der Umgebung des für die Darstellung gewählten Punktes ebenfalls stetig seien.

3. Unter Beschränkung auf die ersten partiellen Ableitungen verfolgt die vorliegende Arbeit das Ziel, nunmehr für möglichst allgemeine Funktionen  $f$  eine Übertragung von (1.2) in mehrere Dimensionen vorzunehmen.

Es mögen im folgenden  $P, Q$  Punkte im  $m$ -dimensionalen Raum bedeuten. Benutzen wir dann die Symbolik  $P(\xi_1, \dots, \xi_m)$  um die Charakterisierung von  $P$  durch die  $m$  rechtwinkligen karthesischen Koordinaten  $\xi_1, \dots, \xi_m$  zum Ausdruck zu bringen, und bezeichnet  $(J)$  die Gesamtheit der inneren Punkte des  $m$ -dimensionalen Intervalls  $J$ , so können wir unsere Aufgabe etwas präziser folgendermaßen formulieren: Es sind die Relationen von der Gestalt

$$f(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f(P) K(P, Q; n) dP \quad \left\{ \begin{array}{l} P = P(\xi_1, \dots, \xi_m) \\ Q = Q(x_1, \dots, x_m) \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

$$\left( \frac{\partial f(P)}{\partial \xi_\mu} \right)_{P=Q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f(P) \frac{\partial K(P, Q; n)}{\partial x_\mu} dP \quad \left\{ \begin{array}{l} Q < (J) \\ \mu = 1, 2, \dots, m \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

zu diskutieren, und zwar, indem für den Kern  $K$  notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß solche Relationen für alle Funktionen einer bestimmten Klasse richtig sind.

4. Von den verschiedenen seit *Lebesgue* in dieser Theorie üblicherweise betrachteten Funktionsklassen habe ich für die vorliegende Untersuchung jene beiden herausgegriffen, welche die interessantesten Resultate erwarten ließen. Nämlich

$F_1$ , die Klasse der im Grundintervall (nach *Lebesgue*) integrierbaren Funktionen und

$F_2$ , die Klasse der im Grundintervall beschränkten meßbaren Funktionen.

5. Für die Gültigkeit einer oder mehrerer der Relationen (1.4) für eine Funktion  $f$  aus der Klasse  $F_1$  oder  $F_2$  spielt die Wahl der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über  $f$  in  $Q$  eine entscheidende Rolle.

Zunächst ist man versucht, etwa die Stetigkeit von  $f$  und die bloße Existenz der partiellen Ableitungen  $f'_{\xi_\mu}$  ( $\mu = 1, \dots, m$ ) in  $Q$  vorauszusetzen. Eine Funktion mit diesen Eigenschaften, die außerdem zur Klasse  $F_2$  gehört, sei für den Augenblick mit  $f^*$  bezeichnet. Man erkennt aber sogleich, daß es keinen einzigen Kern  $K$  geben kann, so daß auch nur eine der Relationen (1.4) für jede Funktion  $f^*$  bestehen könnte.

Um dies einzusehen, wählen wir der Einfachheit halber  $m = 2$  Dimensionen und  $Q \equiv O$  als den Nullpunkt des rechtwinkligen  $\xi_1 \xi_2$ -Systems. Sodann betrachte man die Funktion  $f^*$ , die folgendermaßen definiert ist: Es sei  $f^* = \xi_1$  auf der  $\xi_1$ -Achse und  $f^* = \xi_2$  auf der  $\xi_2$ -Achse, und in allen übrigen Punkten der  $\xi_1 \xi_2$ -Ebene sei  $f^* = 0$ .  $f^*$  ist offenbar stetig im Nullpunkt, und es gilt  $f^*(O) = 0$ ,  $f_{\xi_1}^{*'}(O) = 1$ ,  $f_{\xi_2}^{*'}(O) = 1$ . Da aber  $f^*$  bis auf eine Nullmenge verschwindet in irgendeinem vorgegebenen Rechteck  $J$ , das den Nullpunkt im Inneren enthalten möge, sind alle in den Relationen (1.3), (1.4) auftretenden Integrale  $\equiv 0$  und daher auch die Grenzwerte für  $n \rightarrow \infty$ . Also gilt (1.3) aber keine einzige der Relationen (1.4). Und nach diesem Prinzip läßt sich natürlich auch im Falle  $m > 2$  und  $Q \neq O$  eine Funktion  $f^*$  mit den entsprechenden Eigenschaften konstruieren.

6. Dagegen werden wir zeigen, daß es, in allen von uns betrachteten Fällen, z. B. sicher ausreichend ist, für  $f$  die Existenz eines totalen Differentials in  $Q$  vorauszusetzen.

Man sagt bekanntlich von einer Funktion  $f(\xi_1, \dots, \xi_m)$ , sie besitze im Punkte  $Q(x_1, \dots, x_m)$  ein totales Differential, wenn für  $f$  die Darstellung gilt

$$f(\xi_1, \dots, \xi_m) = f(x_1, \dots, x_m) + \sum_{\mu=1}^m \alpha_\mu (\xi_\mu - x_\mu) + o(|PQ|), \quad (1.5)$$

wo  $|PQ|$  hier wie auch später die Distanz der Punkte  $P(\xi_1, \dots, \xi_m)$  und  $Q(x_1, \dots, x_m)$  bedeutet.  $\alpha_\mu$  bezeichnet die partielle Ableitung von  $f$  nach  $\xi_\mu$  in  $Q$ .

7. Von ganz besonderem Interesse ist nun der Fall, wo eine bestimmte Variable vor den anderen in dem Sinne ausgezeichnet wird, daß wir die Existenz bloß einer einzigen der  $m$  Relationen (1.4) fordern, z. B. jener, die sich auf  $\mu = 1$  bezieht.

Es ist klar, daß im letzten Fall für  $f$  die Annahme eines totalen Differentials, also einer bezüglich allen Variablen symmetrischen Bedingung, nicht mehr am Platze ist. Es liegt vielmehr im Wesen der Dinge, an Stelle des totalen Differentials einen geeigneten anderen, einseitigen, also im obigen

Beispiel die Koordinate  $\xi_1$  bevorzugenden Differentiationsbegriff einzuführen. Einer solchen Forderung entspricht der von Herrn *Ostrowski* geprägte<sup>6)</sup> und auch in diesem Zusammenhang<sup>7)</sup> benutzte Begriff der „gleichmäßigen Differenzierbarkeit“ nach einer Variablen. Um Mißverständnissen vorzubeugen, wollen wir im folgenden anstatt „gleichmäßige Differenzierbarkeit“ lieber die Bezeichnung „*O*-Differenzierbarkeit“ gebrauchen<sup>8)</sup>.

Wir sagen, eine Funktion  $f(\xi_1, \dots, \xi_m)$  habe im Punkt  $Q(x_1, \dots, x_m)$  eine *O*-Ableitung nach  $\xi_1$ , wenn

$$\frac{f(\xi_1, \dots, \xi_m) - f(x_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\xi_1 - x_1} \rightarrow f'_{\xi_1}(x_1, \dots, x_m) \quad (1.6)$$

unter der Voraussetzung

$$(\xi_1 - x_1) \rightarrow 0, \quad |\xi_\mu - x_\mu| \leq |\xi_1 - x_1| \quad (\mu = 2, \dots, m) \quad (1.7)$$

gilt. Und indem man  $\xi_1$  mit  $\xi_\mu$  vertauscht, erhält man die Definition für die *O*-Ableitung nach  $\xi_\mu$ .

8. Im Verlauf der Arbeit hatte es sich gezeigt, daß neben dieser *O*-Differenzierbarkeit ein noch stärker nach der Seite der Gleichmäßigkeit hin orientierter Differentiationsbegriff sich einzuführen lohnt, der von *I. W. Hobson*<sup>9)</sup> formuliert, jedoch mit keinem Namen bedacht wurde.

Wir wollen sagen, die Funktion  $f(\xi_1, \dots, \xi_m)$  besitze im Punkte  $Q(x_1, \dots, x_m)$  eine *H*-Ableitung nach  $\xi_1$ , wenn (1.6) unter der Voraussetzung

$$|PQ| \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

gilt. — Ist  $f$  in einem Punkt *H*-differenzierbar nach  $\xi_1$ , so ist offenbar  $f$  in diesem Punkt stets auch *O*-differenzierbar nach  $\xi_1$ . —

9. So werden denn im folgenden die Sätze über die Relationen (1.3), (1.4) verschieden ausfallen, je nachdem die darzustellende Funktion im „singulären Punkt“ ein totales Differential, eine *H*-Ableitung oder eine *O*-Ableitung nach einem  $\xi_\mu$  besitzt.

<sup>6)</sup> *A. Ostrowski* (II).

<sup>7)</sup> *A. Ostrowski* (I).

<sup>8)</sup> Über die Beziehung zwischen totalem Differential und *O*-Ableitung orientiert Fußnote 31.

<sup>9)</sup> *I. W. Hobson* (I), p. 419.

Nach Aufstellung einer geeigneten Definition für die Gleichmäßigkeit obiger Differentiationsbegriffe in einer Punktmenge werden die gewonnenen Sätze jeweils auch für die gleichmäßige Konvergenz der Relationen (1.3), (1.4) in dieser Menge formuliert.

Anwendungen der hier entwickelten Theorie auf die bekanntesten der bis heute untersuchten Kerne gebe ich im zweiten Teil dieser Beiträge.

Der Einfachheit halber sind im folgenden für die Darstellung stets  $m = 2$  Variable benutzt worden. Jedoch lassen sich unsere Sätze analog für beliebig viele Variable formulieren und beweisen.

Es sei noch bemerkt, daß die herangezogenen Beweismethoden im Bereich jener Hilfsmittel liegen, deren sich die übliche Theorie der singulären Integrale zu bedienen pflegt. An einigen Stellen konnten die von *H. Hahn* für eine Dimension angestellten Überlegungen direkt auf mehrere Dimensionen übertragen werden.

Die im folgenden aufgeführten Hauptsätze sind fortlaufend numeriert. Mit Ia), Ib) usw. bezeichnen wir der Kürze halber Voraussetzung a) bzw. b) des Satzes I.

Im Interesse einfacher und kurzer Formulierung der Sätze und Beweise sah ich mich zur Einführung einer Reihe von Bezeichnungen und Begriffen gezwungen. Ein Verzeichnis dieser besonderen Termini folgt am Ende des zweiten Teils.

Die vorliegende Arbeit entstand unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. *A. Ostrowski*. Für die Unterstützung, die mir dabei von meinem hochverehrten Lehrer zuteil geworden ist, möchte ich hier meinen herzlichsten Dank aussprechen.

## § 2. Fundamentallemma, Darstellung der Funktion

10. In diesem Paragraphen werden zwei bekannte Sätze angeführt. Um eine möglichst einfache Formulierung zu gewinnen, wollen wir uns der folgenden Begriffe und Bezeichnungen bedienen :

Unter einem (zweidimensionalen) Kern soll eine auf einem achsenparallelen, abgeschlossenen Grundrechteck  $R$  vorgegebene Folge von Funktionen des Punktes  $P$

$$\varphi(P, n) \quad n = 1, 2, \dots$$

verstanden werden, wobei  $\varphi(P, n)$  für jedes  $n$  als über  $R$  integrierbar<sup>10)</sup> vorausgesetzt ist und bloß bis auf eine Nullmenge  $\mathfrak{N}_n$  auf  $R$  definiert zu

---

<sup>10)</sup> Die Wörter „integrierbar, integrabel, summierbar“ sind im folgenden immer im Sinne von *Lebesgue* zu verstehen.

sein braucht. — Später werden wir neben  $R$  auch das Symbol  $(R)$  benutzen, worunter die Gesamtheit aller inneren Punkte des Rechtecks  $R$  verstanden wird. —

Der Kern  $\varphi$  heiÙe auf  $R$  fast beschränkt, wenn eine Konstante  $M$  existiert, so daÙ bis auf Nullmengen  $\mathfrak{N}_n$  für alle Punkte  $P$  von  $R$

$$|\varphi(P, n)| < M \quad (2.1)$$

für alle  $n$  gilt.

11. Bekanntlich besitzt das unbestimmte *Lebesguesche* Integral über eine integrierbare Funktion  $\varphi(P, n)$  die Eigenschaft der Totalstetigkeit; d. h.: zu jedem  $\mu > 0$  gibt es ein  $\lambda(\mu) > 0$ , so daÙ für jede abzählbare Menge  $J$  sich bis auf die Ränder nicht überdeckender, in  $R$  gelegener achsenparalleler Rechtecke, deren Gesamthalt  $\leq \lambda$  ist, die Ungleichung besteht:

$$\int_J |\varphi(P, n)| dP < \mu \quad (|J| \leq \lambda)^{11}).$$

LäÙt sich die positive GröÙe  $\lambda(\mu)$  so wählen, daÙ die letzte Ungleichung für alle  $\varphi(P, n)$   $n = 1, 2, \dots$  gilt, so wollen wir  $U(\varphi) = \int |\varphi| dP$  als auf  $R$  gleichgradig totalstetig bezeichnen.

12. Die Funktionenfolge  $\varphi(P, n)$   $n = 1, 2, \dots$  soll über  $R$  nullstrebzig heißen, wenn für jedes (echte oder unechte) Teilrechteck  $R'$ <sup>12)</sup> von  $R$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R'} \varphi(P, n) dP = 0 \quad (R' < R)$$

gilt.

Schließlichs wollen wir sagen, der Kern  $\varphi(P, n)$  sei in  $R$  limitär orthogonal auf  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ), wenn für jede Funktion  $f(P)$ , die auf dem Grundrechteck  $R$  zur Klasse  $F_1$  bzw.  $F_2$  gehört, die Relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f(P) \varphi(P, n) dP = 0 \quad (2.2)$$

besteht. Besitzt  $\varphi(P, n)$  diese Eigenschaft in  $R$ , so offenbar auch in jedem Teilrechteck  $R' < R$ .

<sup>11)</sup> Ich schlieÙe mich hier und im folgenden an eine Darstellungsweise von Herrn *Ostrowski* an, wonach hinter eine Relation in Klammern die (manchmal schon im Text angeführten) Bedingungen gesetzt werden, unter welchen die betreffende Relation gilt. Ebenso benutzen wir die *Ostrowskische* Bezeichnung  $|J|$  für den Inhalt der meÙbaren Menge  $J$ .

<sup>12)</sup> Wenn in dieser Arbeit von Rechtecken oder Quadraten die Rede ist, so soll es sich stets um achsenparallele Rechtecke bzw. Quadrate handeln.

13. Mit Hilfe der oben eingeführten Begriffe können wir nun zwei bekannte Sätze folgendermaßen formulieren :

**Satz I (Fundamentallema).** *Damit ein auf dem Grundrechteck  $R$  definierter Kern  $\varphi(P, n)$  in  $R$  limitär orthogonal auf  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) ist, ist notwendig und hinreichend :*

- a)  $\varphi$  ist über  $R$  null-strebig<sup>13</sup>).
- b) Für  $F_1$ :  $\varphi$  ist auf  $R$  fast beschränkt<sup>14</sup>).
- Für  $F_2$ :  $U(\varphi)$  ist auf  $R$  gleichgradig totalstetig.

*B.H.Camp*<sup>15</sup>) beweist dieses Lemma sowie auch den nächstfolgenden Satz II für den  $m$ -dimensionalen Raum ( $m > 1$ ) ganz analog wie *Lebesgue* die entsprechenden Sätze in einer Dimension.

14. Im folgenden möge unser Kern noch von einem Parameterpunkt  $Q$  abhängig sein : Es sei also  $\Phi(P, Q; n)$   $n = 1, 2, \dots$ , wenn nicht eine andere Festsetzung getroffen wird, für jeden inneren Punkt  $Q$  des Grundrechtecks  $R$  ein Kern im früher festgelegten Sinn.

Mit  $R_h(Q)$  bezeichnen wir von jetzt an ein um den Punkt  $Q$  als Zentrum gelegtes, achsenparalleles abgeschlossenes Quadrat von der Seitenlänge  $h$ , das in  $R$  enthalten ist. Der zu  $\Phi(P, Q; n)$  gehörige gelochte Kern  $\bar{\Phi}$  sei dann für jedes hinreichend kleine  $h > 0$  definiert als

$$\bar{\Phi}(P, Q; n; h) \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad P < R_h(Q) \quad Q < (R) \\ = \Phi(P, Q; n) \quad P < R - R_h(Q) . \end{array} \right.$$

Strebt für jedes hinreichend kleine  $h > 0$  für einen Punkt  $Q$  von  $(R)$  das Integral

$$\int_{R_h(Q)} \Phi(P, Q; n) dP \tag{2.3}$$

mit  $n \rightarrow \infty$  gegen die von  $h$  unabhängige Zahl  $\varrho$ , so soll  $\Phi$   $\varrho$ -strebig im Punkte  $Q$  heißen.

<sup>13</sup>) Wenn nichts weiter bemerkt wird, gelten die Voraussetzungen jeweils für beide Funktionsklassen  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ).

<sup>14</sup>) Da (2.2) eine infinitäre Eigenschaft zum Ausdruck bringt, würde es im Falle von  $F_1$  genügen, die Ungleichungen (2.1) erst von einem Index  $n_0$  an als erfüllt vorauszusetzen. Die Voraussetzung b) für  $F_1$  ist daher so zu verstehen, daß nach Weglassung endlich vieler Kernglieder und geeigneter Ummumerierung ein Kern erhalten werden kann, der auf  $R$  fast beschränkt ist. Und in diesem Sinn ist diese Voraussetzung auch zu verstehen, wenn wir uns später auf sie beziehen.

<sup>15</sup>) Vgl. *B.H.Camp* (I), pp. 43—50, 59 und *I.W.Hobson* (II), pp. 424, 445.

15. Endlich wollen wir sagen, es genüge  $\Phi(P, Q; n)$  einer  $N$ -Ungleichung in  $Q$ , wenn zwei positive Konstanten  $N$  und  $h$  existieren, so daß für alle  $n$

$$\int_{R_h(Q)} |\Phi(P, Q; n)| dP < N$$

ist. — Wenn im folgenden eine Diskussion unter der Voraussetzung dieser Eigenschaft geführt wird, so kommt der Buchstabe  $N$  im Laufe der Diskussion in keiner anderen Bedeutung vor. —

16. Mit Hilfe des Fundamentallemmas beweist *Camp* unmittelbar seinen Hauptsatz über die Darstellung einer Funktion in einem Stetigkeitspunkt, den wir jetzt wie folgt formulieren können :

**Satz II.** *Es sei  $\Phi(P, Q; n)$  ein Kern auf dem Grundrechteck  $R$  und  $Q_0$  ein beliebiger aber fester Punkt aus  $(R)$ .*

*Damit für jede Funktion  $f(P)$ , die auf  $R$  der Funktionsklasse  $F_i$  ( $i=1, 2$ ) angehört und in  $Q_0$  stetig ist, die Relation*

$$f(Q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f(P) \Phi(P, Q_0; n) dP \quad (Q_0 \in (R)) \quad (2.4)$$

*gilt, ist notwendig und hinreichend :*

a) *Für jedes hinreichend kleine  $h > 0$  ist der gelochte Kern  $\varphi(P, n) = \overline{\Phi}(P, Q_0; n; h)$  in  $R$  limitär orthogonal auf  $F_1$  bzw.  $F_2$ .*

b)  *$\Phi$  genügt einer  $N$ -Ungleichung in  $Q_0$ .*

c)  *$\Phi$  ist eins-strebig in  $Q_0$ <sup>16)</sup>.*

### § 3. Fundamentallemma und Darstellung der Funktion bei gleichmäßiger Konvergenz

17. Unter  $I^*$ ,  $II^*$  wollen wir die folgenden, den Sätzen I bzw. II entsprechenden, unter Berücksichtigung der gleichmäßigen Konvergenz formulierten Sätze anführen :

**Satz  $I^*$ .** *Für jeden Punkt  $Q$  einer beliebig vorgegebenen Menge  $\mathfrak{M}$  sei der Kern  $\Phi(P, Q; n)$  als Funktion von  $P$  auf dem Grundrechteck  $R$  definiert.*

---

<sup>16)</sup> *B.H.Camp* legt den Sätzen I und II einen beliebigen quadrierbaren Bereich zugrunde. Wenn hier insbesondere achsenparallele Rechtecke gewählt werden, so hängt dies mit der in § 4 zu treffenden Wahl von sogenannten Verschiebungskernen zusammen. Auch ist hier ein einziger, statt wie bei *Camp* ein  $m$ -tupel verschiedener, unabhängig voneinander nach unendlich wachsender Parameter  $n$  benutzt worden, da die *Campsche* Annahme durch die klassische Abzählbarkeitsumordnung auf die Annahme eines einzigen Parameters zurückgeführt werden kann.



Damit  $\Phi(P, Q; n)$  in  $R$  limitär orthogonal auf  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) ist, gleichmäßig für alle  $Q < \mathfrak{M}$ , ist notwendig und hinreichend,

a) und b) daß für den Kern  $\varphi(P, n) = \Phi(P, Q; n)$  die Voraussetzungen a) und b) des Fundamentallemmas gleichmäßig für alle Punkte  $Q < \mathfrak{M}$  erfüllt sind.

Beweis. Die Bedingungen sind notwendig. Für a) ist dies klar, wie man am Beispiel  $f(P) \equiv 1$  erkennt. — Wäre b) nicht erfüllt, so gäbe es eine Punktfolge  $Q_\nu < \mathfrak{M}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) und eine Indizesfolge  $n_\nu < n$  derart, daß für den Kern  $\Phi^*(P, \nu) = \Phi(P, Q_\nu; n_\nu)$  jene Bedingung b) von Satz I nicht erfüllt wäre, die sich auf  $F_1$  bzw.  $F_2$  bezieht. Es gäbe nach Satz I eine Funktion  $f(P)$  aus der Klasse  $F_1$  bzw.  $F_2$ , für welche

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_R f(P) \Phi^*(P, \nu) dP \neq 0$$

wäre, so daß für diese Funktion die Relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f(P) \Phi(P, Q; n) dP = 0$$

nicht gleichmäßig für alle  $Q < \mathfrak{M}$  gelten könnte.

Die Bedingungen sind auch hinreichend: Wenn sie nämlich zutreffen, so genügt für jede Folge  $Q_\nu < \mathfrak{M}$  und jede Indizesfolge  $n_\nu$  mit  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} n_\nu = \infty$

der Kern  $\Phi^*(P, \nu) = \Phi(P, Q_\nu; n_\nu)$  den bezüglich  $F_1$  bzw.  $F_2$  gemachten Voraussetzungen des Satzes I. Daher gilt für jede Funktion  $f(P)$  aus  $F_1$  bzw.  $F_2$ :

$$\int_R f(P) \Phi^*(P, \nu) dP \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty) .$$

Dies bedeutet, daß  $\Phi$  in  $R$  limitär orthogonal auf  $F_1$  bzw.  $F_2$  ist, gleichmäßig für alle  $Q < \mathfrak{M}$ .

18. **Satz II\*.** *Es sei  $\Phi(P, Q; n)$  ein Kern auf  $R$ , ( $R$ ) der Variabilitätsbereich von  $Q$  und  $A$  eine beliebige abgeschlossene in  $R$  enthaltene Punktmenge, die keinen Randpunkt von  $R$  enthält.*

*Damit für jede auf  $A$  stetige Funktion  $f(P)$ , die auf  $R$  zur Klasse  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehört, die Relation (2.4) gleichmäßig in  $A$  gilt, ist hinreichend, daß*

a), b), c) die Voraussetzungen a), b), c) von Satz II gleichmäßig für alle  $Q < A$  erfüllt sind.



Beweis. Es sei ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Sodann möge jedem Punkt  $Q$  von  $A$  eine (offene, kreisförmige) Umgebung  $U(Q) < R$  zugeordnet werden, so daß

$$|f(P) - f(Q)| < \frac{\varepsilon}{6N}, \quad P < U(Q) \quad (3.1)$$

gilt. Es möge  $u(Q)$  die zu  $U(Q)$  konzentrische Umgebung mit halb so großem Radius bezeichnen. Nach dem *Borelschen* Überdeckungssatz existieren endlich viele  $u(Q_\nu)$ , die  $A$  überdecken. Ihre (offene) Vereinigungsmenge heiße  $\mathfrak{A}$ .

Es bedeute jetzt  $\delta$  die Länge des kleinsten Radius, der bei den  $u(Q_\nu)$  vorkommt und  $\lambda > 0$  den Abstand zwischen den Punktmenge  $A$  und  $R - \mathfrak{A}$ . Schließlich sei  $h = \text{Min}(\delta, \lambda)$ . Dann können wir behaupten, daß

$$|f(P) - f(Q)| < \frac{\varepsilon}{3N}, \quad P < R_h(Q) \quad (3.2)$$

für alle Punkte  $Q$  von  $A$  gilt 16<sup>a</sup>).

In der Tat: Die Größe  $h$  ist so klein gewählt, daß alle Punkte von  $R_h(Q)$  ( $Q < A$ ) in  $\mathfrak{A}$  enthalten sind. Ist jetzt  $P < R_h(Q)$  ( $Q < A$ ), so sind die folgenden beiden Fälle möglich: Entweder liegen  $P$  und  $Q$  in ein und derselben Umgebung  $u(Q_\nu)$ ; oder es gilt  $Q < u(Q_\nu)$ ,  $P < \not< u(Q_\nu)$ . Im letztern Fall ist sicher  $P < U(Q_\nu)$ . In beiden Fällen folgt aus (3.1)

$$|f(Q) - f(Q_\nu)| < \frac{\varepsilon}{6N} \quad Q < u(Q_\nu) < U(Q_\nu),$$

$$|f(P) - f(Q_\nu)| < \frac{\varepsilon}{6N} \quad P < U(Q_\nu)$$

und damit die Richtigkeit der Behauptung (3.2).

19. Für diese Wahl von  $h$  schreiben wir die Identität

$$J_n(f, Q) \equiv \int_R f(P) \Phi(P, Q; n) dP \stackrel{17)}{=} f(Q) \int_{R_h(Q)} \Phi(P, Q; n) dP + \\ + \int_{R_h(Q)} [f(P) - f(Q)] \Phi(P, Q; n) dP + \int_R f(P) \bar{\Phi}(P, Q; n; h) dP. \quad (3.3)$$

<sup>16a)</sup> Man beachte, daß es sich hier nicht einfach um den klassischen Satz über die gleichmäßige Stetigkeit handelt, da  $P$  auch auf gewissen Punkten der Menge  $R - A$  variiert.

<sup>17)</sup> Die Existenz der Integrale von dieser Gestalt folgt aus dem Satz, daß ein Produkt von zwei in einem beschränkten meßbaren Bereich gegebenen summierbaren Funktionen stets summierbar ist, wenn einer der beiden Faktoren bis auf eine Nullmenge in jenem Bereich absolut gleichmäßig beschränkt ist (vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 438). Im Falle der Funktionsklasse  $F_2$  ist diese Voraussetzung bei  $J_n(f, Q)$  offenbar erfüllt. Handelt es sich um die Klasse  $F_1$ , so ist  $f(P)$  wegen der Stetigkeit in  $Q$  für ein hinreichend kleines  $h > 0$  auf  $R_h(Q)$  endlich, und auf dem Bereich  $R - R_h(Q)$  ist nach Voraussetzung a) zufolge des Satzes I\* der andere Faktor,  $\Phi$ , bis auf eine Nullmenge absolut beschränkt.

Der mittlere Term der rechten Seite ist absolut  $< \frac{\varepsilon}{3}$  für alle  $n$ , wie man aus der  $N$ -Ungleichung und der Relation (3.2) sofort erkennt.

Wegen der Eins-Strebigkeit von  $\Phi$  und der gleichmäßigen Beschränktheit von  $f$  auf  $A$ , kann ein Index  $n_0$  angegeben werden, so daß der erste Term rechts in (3.3) sich höchstens um  $\pm \frac{\varepsilon}{3}$  von  $f(Q)$  unterscheidet für alle  $Q < A$  und alle  $n > n_0$ . Zuzufolge der limitären Orthogonalität von  $\bar{\Phi}$  auf  $F_1$  bzw.  $F_2$  strebt der dritte Term in  $A$  gleichmäßig nach 0 und ist daher von einem  $n'_0$  an absolut  $< \frac{\varepsilon}{3}$ . Daher ergibt sich aus (3.3):

$$|J_n(f, Q) - f(Q)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (n \geq \text{Max}(n_0, n'_0))$$

für alle  $Q < A$ . Da  $\varepsilon$  beliebig klein angenommen werden kann, ist der Satz somit bewiesen.

#### § 4. Ein Hilfssatz von Camp

20. Wir führen in diesem Paragraphen einen Hilfssatz (Satz III) an, der sich in späteren Sätzen beim Beweis der Notwendigkeit gewisser Bedingungen immer wieder als das wichtigste Werkzeug erweisen wird.

**Satz III.** *Ist  $\varphi(P, n)$   $n = 1, 2, \dots$  eine auf einem ebenen (nach Peano-Jordan) quadrierbaren Bereich  $B$  gegebene Folge integrierbarer Funktionen des Punktes  $P$ , und ist die Menge der Zahlen*

$$\int_B |\varphi(P, n)| dP$$

für  $n \rightarrow \infty$  nicht beschränkt, so existiert eine auf  $B$  stetige Funktion  $f(P)$ , welche auf dem Rand von  $B$  verschwindet, wobei

ist. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f(P) \varphi(P, n) dP \neq 0$$

Dieser Satz, eine Verallgemeinerung eines entsprechenden eindimensionalen Haar-Lebesgueschen Satzes<sup>18)</sup>, wurde von Camp<sup>19)</sup> aufgestellt und bewiesen, so daß wir auf seinen Beweis nicht eingehen wollen.

<sup>18)</sup> Vgl. z. B. *H. Hahn* (I), pp. 593—596.

<sup>19)</sup> *B. H. Camp* (I), pp. 49—50.

## § 5. Darstellung der partiellen Ableitung im Falle des totalen Differentials

21. **Satz IV.** *Es sei  $\Psi(P, Q; n)$  ein Kern auf  $R$  und  $Q_0(x, y)$  ein beliebiger aber fester Punkt aus  $(R)$ .*

*Damit für jede Funktion  $f(P)$ , die auf  $R$  zu  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehört und in  $Q_0$  ein totales Differential besitzt, die Relation*

$$\left( \frac{\partial f(P)}{\partial \xi} \right)_{P=Q_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f(P) \Psi(P, Q_0; n) dP \quad (P = P(\xi, \eta)) \quad (5.1)$$

*gilt, ist notwendig und hinreichend:*

a) *Für jedes hinreichend kleine  $h > 0$  ist der gelochte Kern  $\varphi(P, n) = \bar{\Psi}(P, Q_0; n; h)$  in  $R$  limitär orthogonal auf  $F_1$  bzw.  $F_2$ .*

b) *Die Funktionenfolge  $|PQ_0| \cdot \Psi(P, Q_0; n)$  genügt einer  $N$ -Ungleichung in  $Q_0$ .*

c) *Die Funktionenfolgen  $(\eta - y)\Psi(P, Q_0; n)$ ,  $\Psi(P, Q_0; n)$  sind nullstrebend in  $Q_0$ .*

d) *Die Folge  $(\xi - x)\Psi(P, Q_0; n)$  ist einsstrebend in  $Q_0$ .*

22. **Beweis.** Unter Berücksichtigung von (1.5) kann für alle Punkte  $P(\xi, \eta) \in R$

$$f(P) = f(Q_0) + (\xi - x)f'_\xi(Q_0) + (\eta - y)f'_\eta(Q_0) + o(|PQ_0|) \quad (5.2)$$

gesetzt werden, wobei  $\frac{o(|PQ_0|)}{|PQ_0|}$  mit  $|PQ_0| \rightarrow 0$  nach 0 konvergiert.

Aus (5.2) folgt nun für kleine  $h > 0$  und alle  $n$ , wenn wir der Kürze halber  $\Psi_n$  für  $\Psi(P, Q_0; n)$  schreiben:

$$J'_n(f, Q_0) \equiv \int_R f(P) \Psi_n dP = \int_R f(P) \bar{\Psi}(P, Q_0; n; h) dP + f(Q_0) \int_{R_h(Q_0)} \Psi_n dP + \quad (5.3)$$

$$+ f'_\xi(Q_0) \int_{R_h(Q_0)} (\xi - x) \Psi_n dP + f'_\eta(Q_0) \int_{R_h(Q_0)} (\eta - y) \Psi_n dP + \int_{R_h(Q_0)} o(|PQ_0|) \Psi_n dP \quad ^{20}).$$

Es streben wegen der Voraussetzung a) der erste Term rechts in (5.3) für  $n \rightarrow \infty$  nach 0, der zweite und vierte Term wegen der Voraussetzung c) ebenfalls nach 0, und der dritte wegen Voraussetzung d) nach  $f'_\xi(Q_0)$ .

<sup>20)</sup> Für die Klärung der Frage nach der Existenz dieser Integrale konsultiere man die Fußnote 17.

Um zu beweisen, daß das letzte Integral rechts in (5.3) nach 0 strebt, wählen wir ein beliebiges  $\varepsilon > 0$ . Dann läßt sich ein  $h > 0$  angeben, so daß im Quadrat  $R_h(Q_0) < R$

$$\frac{|o(|PQ_0|)|}{|PQ_0|} < \frac{\varepsilon}{N}, \quad P(\xi, \eta) < R_h(Q_0) \quad (5.4)$$

ist. Es gilt daher wegen Voraussetzung b) für alle  $n$

$$\left| \int_{R_h(Q_0)} o(|PQ_0|) \Psi_n dP \right| < \varepsilon, \quad (5.5)$$

womit die Bedingungen als hinreichend nachgewiesen sind.

23. Die Voraussetzungen sind notwendig: Wäre nämlich a) nicht erfüllt, so existierte eine der Klasse  $F_1$  bzw.  $F_2$  angehörende Funktion  $g(P)$  und ein  $h > 0$ , so daß für ein gewisses Teilrechteck  $R^*$  von  $R$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R^*} g(P) \bar{\Psi}(P, Q_0; n; h) dP \neq 0 \quad (5.6)$$

wäre. — Hieraus folgt, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, es habe  $R^*$  mit  $R_h(Q_0)$  höchstens Randpunkte gemeinsam. — Definieren wir dann  $f(P)$  durch die Vorschrift

$$f(P) \begin{cases} = g(P) & P < (R^*) \\ = 0 & P < R - (R^*) \end{cases},$$

so gehört auch  $f$  auf  $R$  zur Klasse  $F_1$  bzw.  $F_2$ .  $f(P)$  hat im Punkt  $P = Q_0$  ein totales Differential, und es ist  $f'_\xi(Q_0) = 0$ , während andererseits aus (5.6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J'_n(f, Q_0) \neq 0$$

folgt. Dies steht im Widerspruch zu (5.1).

24. Für später wollen wir aus diesem letzten Beweis noch folgendes in Erinnerung behalten: Ist Voraussetzung a) nicht erfüllt, so existiert ein  $h > 0$  und eine Funktion  $f(P)$ , die auf  $R$  zu  $F_1$  bzw.  $F_2$  gehört und auf  $R_h(Q_0)$  identisch 0 ist (kurz: eine in  $Q_0$  gelochte Funktion), für welche (5.1) nicht gilt.

25. Wäre b) nicht erfüllt, so existierte nach Satz III ein  $h > 0$  und eine auf  $R_h(Q_0)$  stetige Funktion  $\omega(P, Q_0)$ , für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_h(Q_0)} \omega(P, Q_0) \cdot |PQ_0| \Psi_n dP \neq 0 \quad (5.7)$$

gelten müßte. Da wir den Punkt  $Q_0$  als einen Randpunkt unseres Bereichs auffassen können, kann man gemäß Satz III noch verlangen, daß  $\omega(P, Q_0) = 0$  ist für  $P = Q_0$ . Setzen wir

$$f(P) \begin{cases} = |PQ_0| \omega(P, Q_0) & P < R_h(Q_0) \\ = 0 & P < R - R_h(Q_0) \end{cases},$$

so besitzt  $f(P)$  in  $P = Q_0$  offenbar ein totales Differential, und es ist  $f'_\xi(Q_0) = 0$ . Da andererseits wegen (5.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J'_n(f, Q_0) \neq 0$$

gilt, stehen wir wieder im Widerspruch mit (5.1).

Die Bedingungen c) und d) erweisen sich als notwendig, wenn man für  $f$  insbesondere die Funktionen wählt, die in  $R - R_h(Q_0)$  identisch 0 und in  $R_h(Q_0)$  gleich  $\eta - y$ , 1 bzw.  $\xi - x$  sind. Damit ist Satz IV bewiesen.

26. Besitzt eine Funktion  $f$  in allen Punkten einer Menge  $\mathfrak{M}$  ein totales Differential, und sind ihre partiellen Ableitungen  $f'_\xi, f'_\eta$  daselbst gleichmäßig beschränkt, so wollen wir sagen,  $f$  besitze gleichmäßig in  $\mathfrak{M}$  ein totales Differential, wenn noch die folgende Bedingung erfüllt ist. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß — unter  $o(|PQ|)$  das „Restglied“ in (5.2) verstanden — für alle  $|PQ| < \delta$  die Ungleichung

$$\frac{|o(|PQ|)|}{|PQ|} < \varepsilon \quad (Q < \mathfrak{M})$$

gleichmäßig für alle  $Q < \mathfrak{M}$  gilt. — Ein dem Satz IV entsprechender, die gleichmäßige Konvergenz berücksichtigender Satz läßt sich jetzt wie folgt formulieren.

27. **Satz IV\*.** *Es sei  $\Psi(P, Q; n)$  ein Kern auf  $R$  und  $\mathfrak{M}$  eine beliebige aber fest gewählte Punktmenge aus irgend einem Rechteck  $R' < (R)$ .*

Damit für jede Funktion, die auf  $R$  zu  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehört und gleichmäßig in  $\mathfrak{M}$  ein totales Differential besitzt, die Relation (5.1) gleichmäßig in  $\mathfrak{M}$  gilt, ist hinreichend, daß

a) — d) die Voraussetzungen a) — d) von Satz IV gleichmäßig für alle Punkte  $Q < \mathfrak{M}$  erfüllt sind.

Der Beweis ergibt sich sofort daraus, daß jetzt sämtliche Grenzübergänge rechts in (5.3) gleichmäßig für alle  $Q < \mathfrak{M}$  erfolgen.

## § 6. Charakterisierung der Verschiebungskerne

28. Durch Kombination der Sätze II und IV werden wir in § 10 einen „Differentiationssatz“ aufstellen können, der über die „partielle Differenzierbarkeit“ der Relation (2.4) Aufschluß erteilt. Um möglichst einfache Kriterien zu erhalten, wollen wir annehmen, es habe der Kern die Gestalt

$$\Phi(P, Q; n) = \Phi(\xi - x, \eta - y; n) \quad (P = P(\xi, \eta), Q = Q(x, y)), \quad (6.1)$$

und es sei das Grundrechteck  $R$  insbesondere ein Quadrat  $R_l$  von der Seitenlänge  $l$ .

Wir setzen im folgenden

$$u = \xi - x, \quad v = \eta - y. \quad (6.2)$$

Bezeichnet  $O$  den Nullpunkt der  $uv$ -Ebene und  $Q(x, y)$  einen beliebigen inneren Punkt von  $R_l$ , so ist der Definitionsbereich des Kerns

$$\Phi(\xi - x, \eta - y; n) = \Phi(u, v; n)$$

in der  $uv$ -Ebene offenbar das Innere  $(R_{2l}(O))$  des Quadrates  $R_{2l}(O)$ . Einen solchen Kern  $\Phi$  wollen wir einen Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$  nennen, wenn die folgenden Voraussetzungen zutreffen. Dabei bedeute das Symbol  $(a, b)$  hier wie auch später das offene Intervall, dessen Endpunkte  $a, b$  ( $a < b$ ) sind.

29.  $\Phi(u, v; n)$  sei für alle  $n$  und jedes feste  $v < (-l, l)$  totalstetig bezüglich  $u$  in jedem abgeschlossenen  $u$ -Intervall  $L' < (-l, l)$  und für jedes feste  $u < (-l, l)$  in  $(-l, l)$  meßbar bezüglich  $v$ . Es seien  $\Phi(u, v; n)$  und  $\Phi'_u(u, v; n)$  integrierbar über jedes Rechteck  $R^* < (R_{2l}(O))$  für alle  $n$ . Schließlich gelte für jedes  $h' > 0$  in jedem abgeschlossenen Teilrechteck  $R^*$  von  $(R_{2l}(O))$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Phi}(u, v; n; h') = 0 \quad (P(u, v) < R^* < (R_{2l}(O))) \quad (6.3)$$

gleichmäßig für alle Punkte  $P(u, v) < R^*$ . Hierbei sei  $\bar{\Phi} = 0$  für  $P(u, v) < R_{h'}(O)$  und  $\bar{\Phi} = \Phi$  für  $P(u, v) < (R_{2l}(O)) - R_{h'}(O)$ .

Wir wollen in Analogie zur früheren Definition für  $\bar{\Phi}(u, v; n; h')$  wieder die Benennung „gelochter Kern“ benutzen. — Entsprechend werden wir sagen,  $\Phi(u, v; n)$  genüge einer  $N$ -Ungleichung im Nullpunkt bzw. sei  $\rho$ -strebzig im Nullpunkt, wenn  $\Phi(\xi - x, \eta - y; n)$  diese Eigenschaft im Punkt  $x = y = 0$  besitzt. —

30. Aus (6.3) läßt sich folgende Eigenschaft der Verschiebungskerne herleiten :

Für ein beliebiges positives  $l' < l$  betrachte man das Quadrat  $R_{2l'}(O)$ . Dann ist wegen (6.3) für jedes feste  $h > 0$ , jedes  $\varepsilon > 0$  und alle  $n > n_0(\varepsilon, h)$

$$|\bar{\Phi}(u, v; n; h)| < \varepsilon \quad (P(u, v) < R_{2l'}(O), n > n_0) . \quad (6.4)$$

Bezeichnet jetzt  $Q(x, y)$  irgendeinen Punkt im  $\xi\eta$ -System, so gilt folglich für alle Punkte  $P(\xi, \eta) < R_{2l'}(Q)$

$$|\bar{\Phi}(\xi - x, \eta - y; n; h)| < \varepsilon \quad (P(\xi, \eta) < R_{2l'}(Q), n > n_0) \quad (6.5)$$

und zwar gleichmäßig für alle Punkte  $Q$ . Der Schluß von (6.4) auf (6.5) beruht offenbar auf der in (6.1) zum Ausdruck kommenden Eigenschaft des Kerns, die wir im folgenden Verschiebungseigenschaft nennen wollen.

## § 7. Totalstetige Verschiebungskerne

31. Bevor wir uns mit weiteren Eigenschaften der Verschiebungskerne befassen, wollen wir die oben gegebene Charakterisierung dieser Kerne noch etwas genauer analysieren. Es ist unbefriedigend, daß die Existenz der Integrale

$$\int_{R^*} \Phi(u, v; n) du dv, \quad \int_{R^*} \Phi'_u(u, v; n) du dv \quad (R^* < (R_{2l}(O))) \quad (7.1)$$

sich nicht auf einfache Weise aus den übrigen, den Verschiebungskern definierenden Eigenschaften gewinnen läßt und daher vorausgesetzt

wurde. In einem besonderen Satz wird daher jetzt für den Fall von  $m=2$  Variablen dem Kern  $\Phi$  eine etwas schärfere Bedingung auferlegt, aus welcher die Existenz dieser Integrale ohne Schwierigkeit geschlossen werden kann.

32. **Satz.** Sind die Glieder  $\Phi(u, v; n)$   $n = 1, 2, \dots$  einer auf  $(R_{2l}(O))$  definierten Funktionenfolge als Funktionen der beiden Variablen  $u, v$  totalstetig auf jedem Rechteck  $R^* \subset (R_{2l}(O))$ , so ist diese Folge unter der Voraussetzung, daß (6.3) gilt, ein Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$ .

Dabei sagen wir, eine Funktion  $g(u, v)$  sei auf  $R^*$  totalstetig, wenn  $g$  für festes  $u$  in  $v$  und für festes  $v$  in  $u$  totalstetig ist, und wenn die zugehörige Intervallfunktion

$$\Psi(i) = g(u_2, v_2) - g(u_1, v_2) - g(u_2, v_1) + g(u_1, v_1) ,$$

wo  $i$  ein in  $R^*$  enthaltenes Rechteck mit den Eckpunkten  $P(u_\nu, v_\kappa)$  ( $\nu, \kappa = 1, 2$ ) bedeutet, selbst totalstetig auf  $R^*$  ist<sup>21</sup>).

Beim Beweis werden wir uns der folgenden bekannten Tatsache aus der Theorie der reellen Funktionen bedienen, wobei mit dem auch später benutzten Symbol  $\langle \alpha, \beta \rangle$  das abgeschlossene Intervall bezeichnet wird, dessen Endpunkte  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) sind :

Ist  $f(x)$  eine im Intervall  $\langle \alpha, \beta \rangle$  integrable Funktion und  $F(x)$  ein unbestimmtes Integral

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(x) dx \quad (\alpha \leq x \leq \beta) ,$$

so gilt für die Totalvariation  $T(\alpha, \beta)$  von  $F(x)$  in  $\langle \alpha, \beta \rangle$  :

$$T(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \quad ^{22} . \tag{7.2}$$

33. **Beweis.** Da jede totalstetige Funktion von zwei Variablen stetig ist im gewöhnlichen Sinne<sup>23</sup>, existiert das erste Integral (7.1).

<sup>21</sup>) Diese Definition der Totalstetigkeit ist äquivalent mit der in *C. Caratheodory* (I), p. 653, gegebenen, wie man mit Hilfe des dort auf p. 654 formulierten Satzes 3 sofort erkennt.

<sup>22</sup>) Vgl. *I. W. Hobson* (I), p. 605.

<sup>23</sup>) Vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 654.



$\Phi'_u$  ist eine meßbare Funktion <sup>24)</sup>. Um die Integrierbarkeit von  $\Phi'_u$  zu beweisen, genügt es, nachzuweisen, daß das iterierte Integral

$$\int dv \int | \Phi'_u(u, v; n) | du , \quad (7.3)$$

erstreckt über  $R^*$ , existiert <sup>25)</sup>. Seien etwa  $A, B$  ( $A < B$ ) die  $u$ - und  $C, D$  ( $C < D$ ) die  $v$ -Koordinaten der Eckpunkte von  $R^*$ . Dann ist nach (7.2)

$$\int_A^B | \Phi'_u(u, v; n) | du = T_n(v) ,$$

wo  $T_n(v)$  die Totalvariation der Funktion  $\Phi$  im Intervall  $\langle A, B \rangle$  für festes  $v$  bezeichnet. (7.3) existiert sicher, wenn  $T_n(v)$  in  $\langle C, D \rangle$  eine stetige Funktion ist. Daß dies tatsächlich der Fall ist, besagt der folgende Hilfssatz, mit dessen Beweis dann auch der obige Satz bewiesen sein wird.

**34. Hilfssatz 1.** *Ist  $g(u, v)$  totalstetig auf dem Rechteck  $R^*$ , dessen Ecken  $A, B$  als  $u$ - und  $C, D$  als  $v$ -Koordinaten haben mögen, und bezeichnet  $T(v)$  die Totalvariation von  $g$  für ein festes  $v \in \langle C, D \rangle$  auf dem  $u$ -Intervall  $\langle A, B \rangle$ , so ist  $T(v)$  im Intervall  $\langle C, D \rangle$  stetig.*

**Beweis.** Es sei ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wenn jetzt  $\Psi(i)$  die der Funktion  $g$  zugeordnete Intervallfunktion bedeutet, kann man ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  angeben, so daß stets

$$\sum_{\nu} | \Psi(i_{\nu}) | < \frac{\varepsilon}{3} \quad \left( \sum_{\nu} | i_{\nu} | < \delta(\varepsilon) \right) \quad (7.4)$$

gilt, wenn  $i_{\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) eine beliebige Menge von abzählbar vielen, punktfremden, in  $R^*$  enthaltenen Rechtecken ist, wobei die Summe ihrer Flächeninhalte  $| i_{\nu} |$  kleiner als  $\delta(\varepsilon)$  ist.

Sei jetzt  $v$  ein beliebiger aber fester Wert aus  $\langle C, D \rangle$  und  $h$  eine beliebige Größe mit

$$| h | < \frac{\delta(\varepsilon)}{B - A} .$$

Wir setzen  $v' = v + h$ , sofern  $v' \in \langle C, D \rangle$  gilt. Dann ist das Maß des Rechtecks  $i^*$  mit den Eckpunkten  $(A, v)$ ,  $(B, v)$ ,  $(B, v')$ ,  $(A, v')$  kleiner als  $\delta$ .

<sup>24)</sup> Vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 642.

<sup>25)</sup> Vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 637.

Nach unseren Voraussetzungen kann man eine Zahlenfolge  $u_\nu$  finden, für die

$$A = u_0 < u_1 < \dots < u_p = B ,$$

$$T(v) - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{\nu=1}^p |g(u_\nu, v) - g(u_{\nu-1}, v)| < T(v) \quad (7.5)$$

ist. Analog existiert eine Folge  $u'_\nu$ , für die

$$A = u'_0 < u'_1 < \dots < u'_{p'} = B ,$$

$$T(v') - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{\nu=1}^{p'} |g(u'_\nu, v') - g(u'_{\nu-1}, v')| < T(v') \quad (7.6)$$

ist. Die Ungleichungen (7.5) bleiben bekanntlich bestehen, wenn man noch weitere Teilpunkte, z. B. alle  $u'_\nu \neq u_\nu$  einführt. Analog gelten die Ungleichungen (7.6) immer noch, wenn man noch die Teilpunkte  $u_\nu \neq u'_\nu$  einführt. Wir können daher annehmen, es sei  $u_\nu = u'_\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, p$ ;  $p = p'$ .

Bezeichnen jetzt  $C, C'$  die mittleren Terme der Ungleichungen (7.5) bzw. (7.6), so folgt

$$\Delta \equiv |C - C'| \leq \sum_{\nu=1}^p |g(u_\nu, v) - g(u_{\nu-1}, v) - g(u_\nu, v') + g(u_{\nu-1}, v')| .$$

Da die Inhaltssumme der  $p$  Rechtecke mit den Eckpunkten

$$(u_\nu, v), (u_{\nu-1}, v), (u_\nu, v'), (u_{\nu-1}, v')$$

gleich  $|i^*|$  ist, folgt wegen (7.4) sofort:  $\Delta < \frac{\varepsilon}{3}$ . Aus den Ungleichungen (7.5), (7.6) ergibt sich daher

$$|T(v) - T(v')| < \Delta + 2\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon .$$

Dies gilt für jedes hinreichend kleine  $|v - v'| = |h|$  und bedeutet daher die Stetigkeit von  $T(v)$  im Punkte  $v$ .

## § 8. Ein Satz über Verschiebungskerne

35. Der nächste Satz (Satz V) bildet die Grundlage für eine Vereinigung der Sätze II und IV zu einem Differentiationssatz für Verschiebungskerne. Wir stellen den folgenden Hilfssatz voran:

**Hilfssatz 2.** *Es sei  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$ . Damit  $\bar{\Phi}'_u(u, v; n; h)$  für jedes hinreichend kleine  $h > 0$  in jedem Rechteck  $R^* \subset (R_{2l}(O))$  auf  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) limitär orthogonal ist, ist notwendig und hinreichend, daß die auf  $F_1$  bzw.  $F_2$  bezügliche Bedingung b) von Satz I für  $\varphi = \bar{\Phi}'_u(u, v; n; h)$  und  $R = R^*$  erfüllt ist.*

Aus den Eigenschaften des Verschiebungskerns läßt sich nämlich für  $\bar{\Phi}'_u$  die Null-Strebigkeit über  $R^*$  folgern, so daß sich zusammen mit Voraussetzung I b) für  $\bar{\Phi}'_u$  nach dem Fundamentallemma die limitäre Orthogonalität auf  $F_1$  bzw.  $F_2$  ergibt.

In der Tat: Es seien mit  $a, b$  ( $a < b$ ) die  $u$ - und mit  $c, d$  ( $c < d$ ) die  $v$ -Koordinaten der Eckpunkte eines beliebigen Rechtecks  $R' \subset R^*$  bezeichnet, das den Nullpunkt nicht enthält. Wegen der Lochung des Kerns ist die Beschränkung auf solche Rechtecke  $R'$  erlaubt. Durch Integration nach  $u$  erhält man wegen der Totalstetigkeit von  $\Phi$  in  $u$ :

$$\int_{R'} \Phi'_u(u, v; n) du dv = \int_c^d \{\Phi(b, v; n) - \Phi(a, v; n)\} dv \quad ^{26)} .$$

Das letzte Integral strebt mit  $n \rightarrow \infty$  nach 0, was sich aus (6.3) ergibt, wenn man beachtet, daß die Punkte  $(b, v), (a, v)$   $v \in \langle c, d \rangle$  für hinreichend kleine  $h' > 0$  nicht in  $R_{h'}(O)$  liegen. Dies bedeutet die Null-Strebigkeit von  $\bar{\Phi}'_u$  über  $R^*$ .

**36. Satz V.** *Es sei  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$ ,  $R_l$  ein beliebiges in einer  $\xi\eta$ -Ebene vorgegebenes Quadrat und  $Q_0(x, y) \in (R_l)$  ein beliebiger aber fester Punkt.*

*Damit auf  $R_l$  für  $\Phi(\xi - x, \eta - y; n)$  die Voraussetzungen von Satz II und für  $-\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$  jene von Satz IV erfüllt sind, ist hinreichend:*

a) *In jedem Teilrechteck  $R^*$  von  $(R_{2l}(O))$  und für jedes hinreichend kleine  $h > 0$  ist  $\bar{\Phi}'_u(u, v; n; h)$  limitär orthogonal auf  $F_1$  bzw.  $F_2$ .*

b<sub>1</sub>) und b<sub>2</sub>) *Die Funktionenfolgen  $u\Phi'_u(u, v; n), v\Phi'_u(u, v; n)$  genügen je einer  $N$ -Ungleichung im Ursprung.*

c)  *$\Phi(u, v; n)$  ist eins-strebig im Ursprung.*

*Insbesondere sind c) bezüglich Satz II und a), b<sub>1</sub>), b<sub>2</sub>) bezüglich Satz IV notwendige Bedingungen.*

---

<sup>26)</sup> Zufolge der Integrierbarkeit von  $\Phi'_u$  über  $R'$  kann das Integral linker Hand durch iterierte Integration berechnet werden (vgl. *I. W. Hobson* (I), p. 630). Ferner ist die Anwendung des Fundamentalsatzes der Infinitesimalrechnung wegen der Totalstetigkeit von  $\Phi$  in  $u$  erlaubt (vgl. *I. W. Hobson* (I), pp. 592, 593).

37. Unter Beachtung des Hilfssatzes 2 erhält man offenbar sofort den folgenden

**Zusatz zu Satz V.** Die Voraussetzung a) in Satz V kann ersetzt werden durch die weniger umfassende:

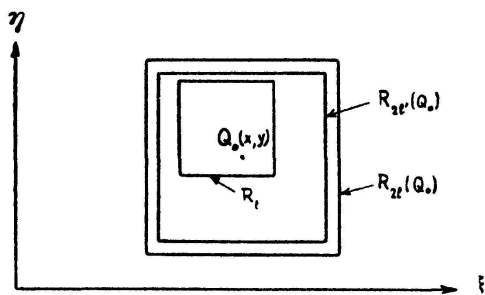
V. a°) Für jedes hinreichend kleine  $h > 0$  und jedes Rechteck  $R^* < (R_{2l}(O))$  gilt

für  $F_1$ :  $\bar{\Phi}'_u(u, v; n; h)$  ist auf  $R^*$  fast beschränkt.

für  $F_2$ :  $\int |\bar{\Phi}'_u(u, v; n; h)| du dv$  ist auf  $R^*$  gleichgradig totalstetig.

38. Beweis von Satz V. Wir zeigen zuerst, daß die Voraussetzungen hinreichend sind. Zu diesem Zweck bestimmen wir eine positive Größe  $l' < l$ , so daß

$$R_l < R_{2l'}(Q_0) \quad (8.1)$$



gilt (vgl. Figur).

Wir verifizieren jetzt für  $\Phi$  die Eigenschaften II a), b), c):

Unter Beachtung von (8.1) folgt aus (6.5), daß  $\bar{\Phi}$  auf  $R_l$  die Voraussetzungen des Fundamentalsatzes für  $F_1$  bzw.  $F_2$  erfüllt.  $\bar{\Phi}$  ist also in  $R_l$  limitär orthogonal auf  $F_1$  bzw.  $F_2$ . Dies wird gerade in II a) gefordert.

II b) verlangt, daß  $\Phi$  in  $Q_0$  einer  $N$ -Ungleichung genügt, was man durch partielle Integration nach  $\xi$  nachweist<sup>27)</sup>. Für jedes hinreichend kleine  $h > 0$  ist wegen der Integrierbarkeit von  $\Phi$  und der Totalstetigkeit von  $\Phi$  in  $u$ :

$$\begin{aligned} \int_{R_{2h}(Q_0)} |\Phi| d\xi d\eta &= \int_{y-h}^{y+h} \left\{ (\xi-x) |\Phi(\xi-x, \eta-y; n)| \Big|_{x-h}^{x+h} \right\} d\eta - \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi-x) \frac{\partial |\Phi|}{\partial \xi} d\xi d\eta = \\ &= h \int_{y-h}^{y+h} \left\{ |\Phi(h, \eta-y; n)| + |\Phi(-h, \eta-y; n)| \right\} d\eta - \\ &\quad - \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi-x) \Phi'_u(\xi-x, \eta-y; n) \operatorname{sgn} \Phi d\xi d\eta . \end{aligned} \quad (8.2)$$

<sup>27)</sup> Vgl. z. B. C. Caratheodory (I), p. 549, für die Bedingungen, unter denen die Formel der partiellen Integration gilt.

Dabei kann man etwa  $\operatorname{sgn} \Phi = 1$  für  $\Phi \geq 0$  und  $\operatorname{sgn} \Phi = -1$  für  $\Phi < 0$  setzen<sup>28)</sup>. Da die Punkte  $(h, \eta - y)$ ,  $(-h, \eta - y)$  ( $\eta < \langle y - h, y + h \rangle$ ) für ein  $h' < 2h$  nicht in  $R_{n'}(O)$  liegen, folgt aus der Meßbarkeit von  $\Phi$  und aus (6.3), daß in (8.2) das erste Integral rechts mit  $n \rightarrow \infty$  nach 0 strebt. Das zweite ist wegen Voraussetzung b<sub>1</sub>) absolut gleichmäßig beschränkt. Also trifft II b) zu. — Voraussetzung c) ist äquivalent mit II c).

Wir weisen jetzt IV a), b), c), d) für  $-\Phi'_u$  nach.

Setzt man in Voraussetzung a) insbesondere  $R^* = R_{2l'}(O)$  ( $0 < l' < l$ ), so ergibt sich, da auch  $-\Phi'_u$  die Verschiebungseigenschaft besitzt, unter Beachtung von (8.1) sofort, daß  $-\Phi'_u$  in  $R_l$  limitär orthogonal auf  $F_1$  bzw.  $F_2$  ist. Dies besagt, daß IV a) zutrifft.

39. IV b) ist offenbar äquivalent mit den beiden Voraussetzungen b<sub>1</sub>) und b<sub>2</sub>). — Für später wollen wir uns noch merken, daß im Beweis von Satz V Voraussetzung b<sub>2</sub>) hier ein einziges Mal, und zwar zum Nachweis von IV b) benötigt wird

40. Wir haben jetzt IV c), d. h. die Null-Strebigkeit der Funktionen  $-\Phi'_u$ ,  $-(\eta - y) \Phi'_u$  in  $Q_0$  nachzuweisen. Es soll unter  $g(\eta - y)$  nach Belieben eine der Funktionen  $-1$ ,  $-(\eta - y)$  verstanden werden. So dann bemerken wir, daß man für kleine  $h > 0$  durch Integration nach  $\xi$  unter Beachtung der Totalstetigkeit von  $\Phi$  in  $u$

$$\begin{aligned} & \int_{R_{2h}(Q_0)} g(\eta - y) \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta = \\ & = \int_{y-h}^{y+h} \left\{ g(\eta - y) [\Phi(h, \eta - y; n) - \Phi(-h, \eta - y; n)] \right\} d\eta \end{aligned}$$

erhält, was wegen (6.3) mit  $n \rightarrow \infty$  nach 0 konvergiert. Damit ist IV c) verifiziert.

IV d), d. h. die Eigenschaft der Eins-Strebigkeit von  $-(\xi - x) \Phi'_u$  in  $Q_0$  weisen wir durch partielle Integration nach :

$$\begin{aligned} & \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta = \\ & = h \int_{y-h}^{y+h} \left\{ \Phi(h, \eta - y; n) + \Phi(-h, \eta - y; n) \right\} d\eta - \int_{R_{2h}(Q_0)} \Phi d\xi d\eta . \end{aligned} \tag{8.3}$$

<sup>28)</sup> Für  $\Phi \geq 0$  ist diese Festsetzung klar. Für alle inneren Punkte der Menge  $\mathfrak{M}(\Phi = 0)$  ist  $|\Phi|'_u = 0$ , so daß man dort z. B.  $\operatorname{sgn} \Phi = 1$  setzen kann, da der Integrand ohnehin verschwindet. Wegen der Integrierbarkeit von  $\Phi$  ist die Menge  $\mathfrak{M}(\Phi = 0)$  und deren Rand  $\mathfrak{R}$  meßbar, und  $\mathfrak{R}$  hat das Maß 0. Die Festsetzung  $\operatorname{sgn} \Phi = 1$  für die Nullmenge  $\mathfrak{R}$  ist für den Wert des letzten Integrals ohne Einfluß.

Das erste Integral rechts strebt wegen (6.3) mit  $n \rightarrow \infty$  nach 0 und das zweite wegen Voraussetzung c) nach 1. Daher ist IV d) erfüllt. — Somit sind die Voraussetzungen als hinreichend erkannt.

41. Voraussetzung c) ist offenbar für die Gültigkeit von II c) notwendig; ebenso Voraussetzungen  $b_1)$  und  $b_2)$  für die Gültigkeit von IV b). Was schließlich Voraussetzung a) anbetrifft, so ist ihre Notwendigkeit für die Eigenschaft IV a) folgendermaßen einzusehen.

Zunächst wissen wir, daß eine Funktionenfolge in jedem Teilrechteck eines Rechtecks  $R^*$  auf  $F_1$  bzw.  $F_2$  limitär orthogonal ist, wenn sie diese Eigenschaft in  $R^*$  besitzt. Bezeichnet daher  $R^* \prec (R_{2l}(O))$  ein Rechteck, in welchem  $\overline{\Phi}'_u(u, v; n; h)$  für ein gewisses  $h > 0$  auf  $F_1$  bzw.  $F_2$  nicht limitär orthogonal ist, so darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, die Seiten von  $R^*$  seien  $< l$ . Ferner kann man wegen der Lochung des Kerns annehmen,  $R^*$  habe mit  $R_h(O)$  höchstens Randpunkte gemeinsam. Dann existiert ein Punkt  $Q_0(x, y) \prec (R_l)$  mit der Eigenschaft, daß die Transformation (6.2) das Rechteck  $R^*$  der  $uv$ -Ebene in ein Rechteck  $\mathfrak{R}$  der  $\xi\eta$ -Ebene überführt, für welches

$$\mathfrak{R} \prec R_l, \quad Q_0 \prec \mathfrak{R}$$

gilt. Für diesen Punkt  $Q_0$  kann daher  $-\overline{\Phi}'_u(\xi - x, \eta - y; n; h)$  in  $R_l$  auf  $F_1$  bzw.  $F_2$  nicht limitär orthogonal sein und also Voraussetzung IV a) nicht erfüllen. Damit ist der Satz bewiesen.

## § 9. Verallgemeinerung auf gleichmäßige Konvergenz

42. **Satz V\*.** *Es sei  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$  und  $A$  eine beliebige in einem vorgegebenen Quadrat  $R_l$  der  $\xi\eta$ -Ebene gelegene abgeschlossene Punktmenge, die keine Randpunkte von  $R_l$  enthält.*

*Dann sind die Voraussetzungen von Satz V hinreichend dafür, daß für  $\Phi(\xi - x, \eta - y; n)$  die Voraussetzungen von Satz II\* und für  $-\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$  jene von Satz IV\* mit  $\mathfrak{M} = A$  und  $R = R_l$  erfüllt sind.*

**Beweis.** Wir greifen auf den Beweis des Satzes V zurück. Das Quadrat  $R_{2l}(Q)$  werde nunmehr so groß gewählt, daß (8.1) für alle Punkte  $Q \prec A$  gilt.

Zunächst weisen wir II\* a) für  $\overline{\Phi}$  und IV\* a) für  $-\overline{\Phi}'_u$  in dieser Reihenfolge nach.

Daß  $\overline{\Phi}$  in  $R_l$  limitär orthogonal auf  $F_1$  bzw.  $F_2$  ist, und zwar gleichmäßig für alle  $Q \prec A$ , folgt aus Satz I\*, dessen Voraussetzungen wegen (6.5) und (8.1) für  $\varphi = \overline{\Phi}$ ,  $R = R_l$  und  $\mathfrak{M} = A$  erfüllt sind. Also trifft II\* a) zu.

Um die entsprechende Eigenschaft für  $-\overline{\Phi}'_u$ , also IV\* a) nachzuweisen, zeigen wir, daß für  $-\overline{\Phi}'_u$  auf  $R_l$  die Voraussetzungen a) und b) von Satz I\* zutreffen, wobei wieder  $\mathfrak{M}$  mit  $A$  zu identifizieren ist.

Die Richtigkeit der auf I\* b) bezüglichen Behauptung ergibt sich sofort etwa unter Benutzung von V a<sup>o</sup>) aus der Verschiebungseigenschaft von  $\Phi'_u$ . Wir haben also noch I\* a), d. h. für  $-\overline{\Phi}'_u(\xi - x, \eta - y; n; h)$  die Eigenschaft der gleichmäßigen Null-Strebigkeit über  $R_l$  nachzuweisen.

Es bedeute  $Q(x, y)$  einen beliebigen Punkt aus  $A$  und  $\mathfrak{R}$  ein beliebiges für ein festes  $h > 0$  in  $R_l - (R_h(Q))$  gelegenes Rechteck, dessen Ecken  $a, b$  als  $\xi$ - und  $c, d$  als  $\eta$ -Koordinaten haben mögen. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{R}} \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta = \int_c^d \{ \Phi(b - x, \eta - y; n) - \Phi(a - x, \eta - y; n) \} d\eta . \quad (9.1)$$

Für die im Integranden rechts auftretenden Argumente gilt wegen (6.3):

$$| \Phi(b - x, \eta - y; n) | < \varepsilon , \quad | \Phi(a - x, \eta - y; n) | < \varepsilon \quad (n > n_0)$$

und zwar gleichmäßig für alle Rechtecke  $\mathfrak{R}$  und alle Punkte  $Q < A$ . Ist jetzt  $R'$  ein beliebiges Teilrechteck von  $R_l$ , so läßt es sich stets aus höchstens 8 Rechtecken vom Typus  $\mathfrak{R}$  und eventuell  $R_h(Q)$  zusammensetzen. Daher folgt aus (9.1), daß das Integral

$$\int_{R'} \overline{\Phi}'_u(\xi - x, \eta - y; n; h) d\xi d\eta$$

mit  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig nach 0 strebt für alle  $Q < A$ . Dies bedeutet, daß IV\* a) erfüllt ist.

43. Was schließlich die übrigen Voraussetzungen, also II\* b), II\* c), IV\* b), IV\* c), IV\* d) anbetrifft, so ist wieder wegen der Verschiebungseigenschaft der betreffenden Kerne sofort klar, daß sie erfüllt sind. Wir zeigen dies ausführlicher etwa am Beispiel von IV\* b). Für einen beliebigen Punkt  $Q_0(x, y) < (R_l)$  ist wegen der Gültigkeit des Satzes V die Eigenschaft IV b) erfüllt, d. h. es ist

$$\int_{R_h(Q_0)} \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} | \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) | d\xi d\eta < N .$$

Da der Integrand aber eine reine „Verschiebungsfunktion“ ist, hängt offenbar  $N$  nicht von  $Q_0$  ab. Damit ist der Satz bewiesen.

44. Für später wollen wir noch folgendes anmerken: Alle Voraussetzungen von Satz II\* und — bis auf IV\* b) — alle Voraussetzungen von Satz IV\* lassen sich für  $\Phi$  bzw.  $-\Phi'_u$  aus den Voraussetzungen von Satz V nachweisen, aber ohne Benutzung von Vb<sub>2</sub>). Dies ergibt sich sofort unter Beachtung der Bemerkung, die in Nummer 39 bezüglich Vb<sub>2</sub>) gemacht wurde.

## § 10. Differentiationssatz im Falle des totalen Differentials

45. Unmittelbare Folgerungen aus den Sätzen V, V\* und dem Zusatz sind jetzt die folgenden Differentiationssätze:

**Satz VI.** *Es sei  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$  und  $Q_0(x, y)$  ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates  $R_l$  der  $\xi\eta$ -Ebene.*

*Damit für jede Funktion  $f(\xi, \eta)$ , die auf  $R_l$  zu  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehört und in  $Q_0$  ein totales Differential<sup>29)</sup> hat, die Relationen*

$$f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \Phi(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta, \quad (10.1)$$

$$f'_\xi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi(\xi - x, \eta - y; n)}{\partial x} d\xi d\eta \quad (10.2)$$

*gelten, ist notwendig und hinreichend, daß die Voraussetzungen Va) (oder a°)) b<sub>1</sub>), b<sub>2</sub>), c) erfüllt sind.*

**Satz VI\*.** *Es sei  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$  und  $A$  eine beliebige in einem vorgegebenen Quadrat  $R_l$  der  $\xi\eta$ -Ebene gelegene abgeschlossene Punktmenge, die keine Randpunkte von  $R_l$  enthält.*

*Dann sind die Voraussetzungen von Satz V hinreichend dafür, daß die Relationen (10.1), (10.2) gleichmäßig in  $A$  gelten für alle Funktionen, die auf  $R_l$  zu  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehören und gleichmäßig in  $A$  ein totales Differential haben.*

## § 11. Differentiationssatz im Falle der $H$ -Ableitung

46. Der nächste Satz illustriert die in der Einleitung gemachte Bemerkung, daß bei Differentiationssätzen mit Auszeichnung einer Variablen die Annahme eines totalen Differentials für  $f(P)$  dem Wesen dieser Unsymmetrie nicht genügend Rechnung trägt. Der folgende Diffe-

<sup>29)</sup> Die Stetigkeit von  $f$  in  $Q_0$  braucht nicht vorausgesetzt zu werden, da sie aus der Eigenschaft des totalen Differentials folgt.



rentiationssatz im Falle einer  $H$ -Ableitung gilt nämlich unter geringeren Annahmen über den Kern als im Satz VI, obwohl die Existenz einer  $H$ -Ableitung in einem Stetigkeitspunkt für die betreffende Funktion keineswegs die Existenz eines totalen Differentials nach sich zieht, was beispielsweise die Funktion  $f(\xi, \eta) \equiv |\eta|$  zeigt, welche im Nullpunkt eine  $H$ -Ableitung nach  $\xi$ , nicht aber ein totales Differential besitzt.

Daß umgekehrt die Existenz eines totalen Differentials im allgemeinen auch nicht die  $H$ -Differenzierbarkeit zur Folge hat, ergibt sich daraus, daß wir im zweiten Teil dieser Beiträge einen Kern angeben werden, welcher die Voraussetzungen von Satz VII, nicht aber jene von Satz VI erfüllt.

47. **Satz VII.** *Es sei  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$  und  $Q_0(x, y)$  ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrats  $R_l$  der  $\xi\eta$ -Ebene.*

*Damit für jede Funktion  $f(\xi, \eta)$ , die auf  $R_l$  zu  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehört und in  $Q_0$  stetig<sup>30)</sup> und  $H$ -differenzierbar nach  $\xi$  ist, die Relationen (10.1), (10.2) gelten, ist notwendig und hinreichend, daß  $Va)$  (oder  $a^\circ$ ),  $b_1)$ ,  $c)$  erfüllt sind.*

**Beweis.** Daß (10.1) zutrifft ist klar, da die Voraussetzungen II a), b), c), wie sich aus der Bemerkung in Nummer 39 ergibt, sich aus Va),  $b_1)$ , c) folgern lassen. — Wir zeigen jetzt, daß diese Bedingungen für das Erfülltsein von (10.2) hinreichen.

Aus (1.6) und (1.8), den Relationen zur Definition der  $H$ -Ableitung nach der ersten Variablen, erhält man für  $f$  in  $R_l$  die Darstellung

$$f(\xi, \eta) = f(x, \eta) + (\xi - x) f'_\xi(x, \eta) + (\xi - x) \varepsilon(\xi, \eta; x, \eta) \quad (P(\xi, \eta) < R_l), \quad (11.1)$$

wo  $\varepsilon(\xi, \eta; x, \eta) \rightarrow 0$  ( $P(\xi, \eta) \rightarrow Q_0(x, \eta)$ ) gilt. Schreiben wir der Kürze halber  $\Phi'_u$  anstatt  $\Phi'_u(\xi - x, \eta - \eta; n)$ , so gilt identisch für jedes hinreichend kleine  $h > 0$

$$\begin{aligned} - J_n(f, Q_0) &\equiv \int_{R_l} f(\xi, \eta) \Phi'_u d\xi d\eta = \int_{R_l} f(\xi, \eta) \bar{\Phi}'_u(\xi - x, \eta - \eta; n; 2h) d\xi d\eta + \\ &+ \int_{R_{2h}(Q_0)} f(x, \eta) \Phi'_u d\xi d\eta + f'_\xi(x, \eta) \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u d\xi d\eta + \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u \varepsilon d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (11.2)$$

<sup>30)</sup> Es würde genügen, an Stelle der Stetigkeit von  $f$  in  $Q_0$  bloß die gleichmäßige Beschränktheit von  $f$  in  $R_{h'}(Q_0)$  für ein beliebiges  $h' > 0$  vorauszusetzen, sofern die Aussage des Satzes nur auf die eine Relation (10.2) beschränkt wird. Dies wird sich im Beweis bei der Diskussion von (11.3) ergeben.

In Nummer 39 wurde bereits darauf hingewiesen, daß für den Kern  $\Psi = -\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$  die Eigenschaften IV a) und d) beweisbar sind aus V a), b<sub>1</sub>), c). Aus IV a) folgt jetzt, daß das erste Integral rechts in (11.2) nach 0 und aus IV d), daß das dritte nach  $-1$  strebt.

Wegen Voraussetzung V b<sub>1</sub>) kann das vierte Integral mit  $h$  absolut beliebig klein gemacht werden. Beim zweiten Integral führen wir die Integration nach  $\xi$  aus und erhalten, da  $f(x, \eta)$  von  $\xi$  unabhängig ist:

$$\int_{R_{2h}(Q_0)} f(x, \eta) \Phi'_u d\xi d\eta = \int_{y-h}^{y+h} f(x, \eta) \{ \Phi(h, \eta - y; n) - \Phi(-h, \eta - y; n) \} d\eta. \quad (11.3)$$

Zufolge (6.3) und der gleichmäßigen Beschränktheit von  $f$  in  $R_{2h}(Q_0)$  strebt der letzte Integrand mit wachsendem  $n$  für alle in Frage kommenden Argumente gleichmäßig nach 0. Daher strebt auch das Integral nach 0. Die Voraussetzungen sind also hinreichend.

48. Die Voraussetzungen V a), b<sub>1</sub>), c) sind notwendig: Wäre V a) nicht erfüllt, so könnte IV a) nach Satz V nicht zutreffen. Zufolge der in Nummer 24 bezüglich IV a) gemachten Bemerkung gäbe es dann eine in  $Q_0$  gelochte Funktion aus  $F_1$  bzw.  $F_2$ , für welche (10.2) nicht gelten könnte. Diese Funktion wäre offenbar in  $Q_0$  stetig und  $H$ -differenzierbar nach  $\xi$ , was zu einem Widerspruch führt.

Wäre V b<sub>1</sub>) nicht erfüllt, so existierte nach Satz III eine auf  $R_h(O)$  stetige Funktion  $g(u, v)$ , die im Nullpunkt verschwände und für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_h(O)} g(u, v) u \Phi'_u(u, v; n) du dv \neq 0 \quad (11.4)$$

wäre. Wählt man jetzt insbesondere eine Funktion  $f(u, v)$  von der Gestalt

$$f(u, v) \left\{ \begin{array}{ll} = u g(u, v) & P(u, v) < R_h(O) \\ = 0 & P(u, v) \not< R_h(O) \end{array} \right. ,$$

so besitzt diese Funktion im Nullpunkt eine  $H$ -Ableitung nach  $u$ , und es ist

$$\left( \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right)_{\substack{u=0 \\ v=0}} = 0. \quad (11.5)$$

Aus (11.4) folgt für die Funktion  $F(\xi, \eta) = f(\xi - x, \eta - y)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{R_l} F(\xi, \eta) \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta \neq 0 ,$$

und wegen (11.5) kann die Relation (10.2) für  $F(\xi, \eta)$  nicht gelten, womit wir einen Widerspruch erhalten.

Die Notwendigkeit von V c) für die Gültigkeit von (10.1), ist auf Grund des Satzes V klar. Damit ist der Satz bewiesen. —

49. Gilt für  $f(\xi, \eta)$  in jedem Punkt  $Q(x, y)$  einer Menge  $\mathfrak{M}$  die Darstellung von der Gestalt (11.1), wobei  $\varepsilon(\xi, \eta; x, y)$  in  $\mathfrak{M}$  gleichmäßig nach 0 strebt für  $P(\xi, \eta) \rightarrow Q(x, y)$ , und ist  $f'_\xi(Q)$  gleichmäßig beschränkt auf  $\mathfrak{M}$ , so sagen wir,  $f$  besitze gleichmäßig in  $\mathfrak{M}$  eine  $H$ -Ableitung nach  $\xi$ .

50. Ein VII entsprechender Satz unter Berücksichtigung der gleichmäßigen Konvergenz lautet sodann :

**Satz VII\*.** *Es sei  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$ ,  $R_l$  ein vorgegebenes Quadrat der  $\xi\eta$ -Ebene und  $A \subset (R)$  eine beliebige abgeschlossene Punktmenge.*

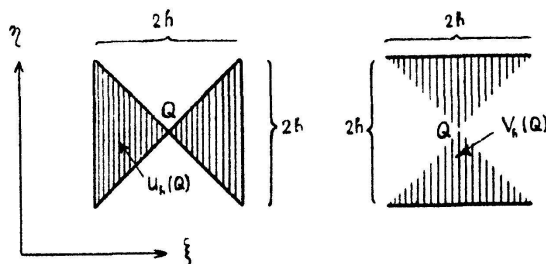
*Dann sind die Voraussetzungen von Satz VII hinreichend dafür, daß die Relationen (10.1), (10.2) gleichmäßig in  $A$  gelten für jede Funktion  $f(\xi, \eta)$ , die auf  $R_l$  zu  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehört, auf  $A$  stetig ist und gleichmäßig in  $A$  eine  $H$ -Ableitung nach  $\xi$  besitzt.*

**Beweis.** Auf Grund der am Ende des Beweises zu Satz V\* in Nummer 44 gemachten Bemerkung ist zunächst klar, daß die bezüglich (10.1) aufgestellte Behauptung wahr ist; ferner, daß die Voraussetzungen IV\* a) und d) für  $\Psi = -\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$  zutreffen und daß daher rechts in (11.2) der erste Term für  $n \rightarrow \infty$  nach 0 und der dritte nach  $-f'_\xi(x, y)$  strebt, beides gleichmäßig für alle  $Q \in A$ .

Daß der vierte Term rechts in (11.2) absolut beliebig klein gemacht werden kann, gleichmäßig für alle  $Q \in A$ , folgt wegen der Verschiebungseigenschaft aus V b<sub>1</sub>), und dasselbe folgern wir für das zweite Integral aus der Betrachtung von (11.3). Somit ergibt sich die Behauptung aus (11.2).

## § 12. Differentiationssatz im Falle der $O$ -Ableitung

51. Bei der Formulierung des nächsten Satzes werden wir es mit „doppeldreieckigen“ Bereichen zu tun haben, die wir zur Veranschaulichung in zwei Figuren schraffiert wiedergeben wollen :



Es sei nämlich für einen festen Punkt  $Q(x, y)$  der  $\xi\eta$ -Ebene und ein beliebiges  $h > 0$  mit  $U_h(Q)$  jener Bereich bezeichnet, für dessen Punkte  $|\xi - x|, |\eta - y| \leq h$ ;  $|\eta - y| \leq |\xi - x|$  ist.  $V_h(Q)$  bezeichne den Bereich  $R_{2h}(Q) - U_h(Q)$ , also hier im Falle von zwei Variablen den Bereich, für dessen Punkte  $|\xi - x|, |\eta - y| \leq h$ ;  $|\eta - y| > |\xi - x|$  ist.

Sodann wollen wir sagen, die Funktionenfolge  $\Phi(u, v; n)$  genüge im Nullpunkt  $O$  einer  $U$ -Ungleichung oder einer  $V$ -Ungleichung, wenn eine Konstante  $U$  bzw.  $V$  und ein  $h > 0$  existiert, so daß für alle  $n$

$$\int_{U_h(O)} |\Phi(u, v; n)| du dv < U \quad \text{bzw.} \quad \int_{V_h(O)} |\Phi(u, v; n)| du dv < V$$

gilt.

52. **Satz VIII.** *Es sei  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$  und  $Q_0(x, y)$  ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrats  $R_l$  der  $\xi\eta$ -Ebene.*

*Damit für jede Funktion  $f(\xi, \eta)$ , die auf  $R_l$  zu  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehört und in  $Q_0$  stetig und  $O$ -differenzierbar nach  $\xi$ <sup>31)</sup> ist, die Relationen (10.1), (10.2) gelten, ist notwendig und hinreichend:*

- a) *Voraussetzung Va) (oder  $a^\circ$ ) ist erfüllt.*
- b) *Die Folge  $u\Phi'_u(u, v; n)$  genügt im Ursprung einer  $U$ -Ungleichung.*
- c)  *$\Phi(u, v; n)$  ist eins-strebig im Ursprung.*
- d)  *$\Phi'_u(u, v; n)$  genügt im Ursprung einer  $V$ -Ungleichung.*

53. **Beweis.** Die Voraussetzungen sind hinreichend: Für die Gültigkeit von (10.1) folgt dies analog wie in Satz VII, da mit obigen Voraussetzungen für den Kern auch jene von Satz VII erfüllt sind.

Um (10.2) nachzuweisen, setzen wir für  $f$  in  $R_l$ , gemäß den Relationen (1.6), (1.7) für die Definition der  $O$ -Differenzierbarkeit nach der ersten Variablen:

$$f(\xi, \eta) = f(x, \eta) + (\xi - x) f'_\xi(x, \eta) + (\xi - x) \varepsilon(\xi, \eta; x, \eta), \quad (12.1)$$

wobei  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $P(\xi, \eta) \rightarrow Q_0(x, \eta), |\eta - \eta| \leq |\xi - x|$ ) gilt.

Es ist, wenn wiederum  $\Phi'_u$  anstatt  $\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$  geschrieben wird, für jedes hinreichend kleine  $h > 0$  identisch

---

<sup>31)</sup> Es hätte wenig Sinn,  $f$  in  $Q_0$  nach beiden Variablen  $O$ -differenzierbar vorauszusetzen. Die letztere Annahme ist nämlich notwendig und hinreichend dafür, daß  $f$  in  $Q_0$  ein totales Differential besitzt (vgl. *A. Ostrowski* (II), p. 223), und mit diesem Fall haben wir uns bereits in Satz VI befaßt.

$$\begin{aligned}
- J'_n(f, Q_0) &\equiv \int_{R_l} f(\xi, \eta) \Phi'_u d\xi d\eta = \int_{R_l} f(\xi, \eta) \bar{\Phi}'_u(\xi - x, \eta - y; n; 2h) d\xi d\eta + \\
&+ \int_{R_{2h}(Q_0)} f(x, \eta) \Phi'_u d\xi d\eta + f'_\xi(x, y) \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u d\xi d\eta + \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u \varepsilon d\xi d\eta .
\end{aligned} \tag{12.2}$$

Das letzte Integral auf der rechten Seite zerlegen wir, indem wir den Integrationsbereich  $R_{2h}(Q_0)$  in die beiden Stücke  $U_h(Q_0)$ ,  $V_h(Q_0)$  aufspalten. Gleichzeitig legen wir die Größe  $h$  folgendermaßen fest: Für ein beliebiges  $\delta > 0$  bestimmen wir  $h' > 0$ , so daß

$$|\varepsilon(\xi, \eta; x, y)| < \delta \quad (P(\xi, \eta) < U_{h'}(Q_0)) \tag{12.3}$$

ist. — Da  $(\xi - x)\varepsilon$  nach der Definitionsformel (12.1) im Punkt  $P = Q_0$  stetig ist und verschwindet, kann zu jedem hinreichend kleinen  $\delta^* > 0$  eine Größe  $h^* > 0$  angegeben werden, so daß

$$|(\xi - x)\varepsilon(\xi, \eta; x, y)| < \delta^* \quad (P(\xi, \eta) < V_{h^*}(Q_0)) \tag{12.4}$$

ist. Jetzt setzen wir  $h \leq \text{Min}(h', h^*)$ . Für solche  $h$  gilt

$$\left| \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u \varepsilon d\xi d\eta \right| \leq \delta \int_{U_h(Q_0)} |(\xi - x) \Phi'_u| d\xi d\eta + \delta^* \int_{V_h(Q_0)} |\Phi'_u| d\xi d\eta .$$
(12.5)

Zufolge der Voraussetzungen b) und d) kann die rechte und also auch die linke Seite dieser Ungleichung für geeignete  $\delta, \delta^*$  absolut beliebig klein gemacht werden.

Wie bereits bemerkt wurde, sind mit den Voraussetzungen von Satz VIII auch Va), b<sub>1</sub>), c) erfüllt. Daher ergibt sich, analog wie bei (11,2), daß mit  $n \rightarrow \infty$  das erste Integral rechts in (12.2) nach 0 und das dritte nach  $-1$  strebt. Daß das zweite Integral mit  $n \rightarrow \infty$  nach 0 strebt, wurde bereits in Satz VII im Anschluß an (11.3) bewiesen, da hierzu von  $f$  bloß die gleichmäßige Beschränktheit in  $R_{h'}(Q_0)$  für ein hinreichend kleines  $h' > 0$  benötigt wurde. — Es unterscheidet sich also  $J'_n(f, Q_0)$  von  $f'_\xi(x, y)$  um beliebig wenig; die Bedingungen sind daher hinreichend.

54. Die Voraussetzungen sind notwendig: Da jede  $H$ -Ableitung auch eine  $O$ -Ableitung ist, ergibt sich die Notwendigkeit der Voraussetzungen a) und c) aus der Notwendigkeit dieser Voraussetzungen für Satz VII.

Wäre b) nicht erfüllt, so existierte nach Satz III eine Funktion  $g(u, v)$ , die auf  $U_h(O)$  stetig wäre, auf dem Rand von  $U_h(O)$  verschwände und für die sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_h(O)} g(u, v) u \Phi'_u(u, v; n) du dv \neq 0 \quad (12.6)$$

ergäbe. Dann definiere man eine Funktion  $f(u, v)$  von der Gestalt

$$f(u, v) \begin{cases} = u g(u, v) & P < U_h(O) \\ = 0 & P \notin U_h(O) . \end{cases}$$

$f(u, v)$  ist im Nullpunkt stetig, besitzt dort eine  $O$ -Ableitung nach  $u$ , weil

$$\lim_{|u| \geq |v|, u \rightarrow 0} \frac{f(u, v) - f(0, v)}{u} = \lim_{|u| \geq |v|, u \rightarrow 0} \frac{u g(u, v) - 0}{u} = 0$$

existiert, und es ist daher

$$\left( \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right)_{\substack{u=0 \\ v=0}} = 0 . \quad (12.7)$$

Aus (12.6) folgt aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{R_l} f(\xi - x, \eta - y) \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta \neq 0 ,$$

was wegen (12.7) einen Widerspruch zu (10.2) bedeutet. Also ist b) notwendig.

Um schließlich die Notwendigkeit von d) einzusehen, nehmen wir an, d) sei nicht erfüllt. Wieder nach Satz III existiert dann eine auf  $V_h(O)$  und dem Rand  $\mathfrak{R}$  von  $V_h(O)$  stetige, auf  $\mathfrak{R}$  und auf der  $v$ -Achse verschwindende Funktion  $g(u, v)$ , für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{V_h(O)} g(u, v) \Phi'_u(u, v; n) du dv \neq 0 \quad (12.8)$$

ist. Wir definieren eine Funktion  $f$  zu

$$f(u, v) \begin{cases} = g(u, v) & P(u, v) < V_h(O) \\ = 0 & P(u, v) \notin V_h(O) . \end{cases}$$

$f$  ist im Nullpunkt stetig und hat dort eine  $O$ -Ableitung nach  $u$ , weil

$$\lim_{|u| \geq |v|, u \rightarrow 0} \frac{f(u, v) - f(0, v)}{u} = 0 = f'_u(0, 0)$$

gilt. Aus (12.8) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{R_l} f(\xi - x, \eta - y) \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta \neq 0,$$

und dies widerspricht der Relation (10.2). — Damit ist der Satz bewiesen. —

55. Es sei noch besonders hervorgehoben, daß die soeben unter der Voraussetzung des Nichterfülltseins von VIII d) konstruierte Funktion  $f(\xi - x, \eta - y)$ , für welche (10.2) nicht gilt, auf dem ganzen Quadrat  $R_l$  stetig ist. —

56. Besitzt die Funktion  $f(\xi, \eta)$  in allen Punkten einer Menge  $\mathfrak{M}$  eine  $O$ -Ableitung nach  $\xi$ , wobei in der Darstellung (12.1) die Funktion  $\varepsilon(\xi, \eta; x, y)$  gleichmäßig für alle  $Q(x, y) < \mathfrak{M}$  mit  $P(\xi, \eta) \rightarrow Q$ ,  $P < U_h(Q)$  nach 0 strebt, und ist  $f'_\xi(x, y)$  auf  $\mathfrak{M}$  gleichmäßig beschränkt, so sagen wir,  $f$  habe gleichmäßig in  $\mathfrak{M}$  eine  $O$ -Ableitung nach  $\xi$ .

57. Ist jetzt  $f(\xi, \eta)$  stetig und in diesem Sinne gleichmäßig  $O$ -differenzierbar nach  $\xi$  in einer abgeschlossenen Punktmenge  $A < (R_l)$ , so erkennen wir, daß die Limites der vier Integrale rechter Hand in (12.2) gleichmäßig für alle  $Q < A$  existieren. Für die ersten drei Integrale ergibt sich dies nämlich analog wie bei den entsprechenden Integralen im Beweis zu Satz VII\*. Wegen der gleichmäßigen  $O$ -Differenzierbarkeit von  $f$  in  $A$  kann (12.3), und wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  und der gleichmäßigen Beschränktheit von  $f'_\xi$  kann (12.4) gleichmäßig für alle  $Q < A$  erfüllt werden, so daß auch das vierte Integral rechts in (12.2) absolut beliebig klein ausfällt, gleichmäßig für alle  $Q < A$ . Wir erhalten also den Satz:

**Satz VIII\*.** *Es sei  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf  $(R_{2l}(O))$ ,  $R_l$  ein vorgegebenes Quadrat der  $\xi\eta$ -Ebene und  $A < (R_l)$  eine beliebige abgeschlossene Punktmenge.*

*Dann sind die Voraussetzungen von Satz VIII hinreichend dafür, daß die Relationen (10.1), (10.2) gleichmäßig in  $A$  gelten für jede Funktion  $f(\xi, \eta)$ , die auf  $R_l$  zu  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehört, auf  $A$  stetig ist und gleichmäßig in  $A$  eine  $O$ -Ableitung nach  $\xi$  besitzt.*

### § 13. Vertauschbarkeitskriterien

58. Zum Abschluß unserer allgemeinen Theorie wollen wir noch eine Frage erörtern, die im Hinblick auf Anwendungen für alle hier aufgestellten Differentiationssätze von Bedeutung sein kann. Wann sind in Relation (10.2) Integration und Differentiation vertauschbar? Hinreichende Bedingungen dafür geben die beiden folgenden Kriterien:

**Kriterium I.** Ist  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf einem Quadrat  $(R_{2l}(O))$  und  $f(\xi, \eta)$  eine beliebige Funktion, die auf einem Quadrat  $R_l$  zu  $F_1$  gehört, so gilt für jeden Punkt  $Q_0(x, y) \in (R_l)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \Phi(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi(\xi - x, \eta - y; n)}{\partial x} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (13.1)$$

wenn die Integrale linker Hand für alle Punkte  $Q$  aus einer Umgebung von  $Q_0$  existieren und wenn zu jedem Rechteck  $R' \subset (R_{2l}(O))$  und zu jedem Index  $n$  eine Konstante  $C_n$  existiert, so daß fast überall auf  $R'$

$$|\Phi'_u(u, v; n)| < C_n \quad (n = 1, 2, \dots; P(u, v) \subset R') \quad (13.2)$$

gilt. — Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich offenbar aus dem folgenden Hilfssatz:

59. **Hilfssatz 3.**  $f(\xi, \eta)$  sei eine beliebige über  $R_l$  integrable Funktion und  $\varphi(u, v)$  eine meßbare Funktion, die für jedes feste  $v$  totalstetig ist in  $u$  auf jedem Rechteck  $R' \subset (R_{2l}(O))$  der  $uv$ -Ebene.

Existiert dann zu jedem  $R'$  eine Konstante  $C'$ , so daß fast überall auf  $R'$

$$|\varphi'_u(u, v)| < C' \quad (13.3)$$

gilt, dann ist für jeden beliebigen aber festen Punkt  $Q_0(x, y) \in (R_l)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \varphi(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta = \int_{R_l} f(\xi, \eta) \varphi'_x(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta, \quad (13.4)$$

sofern das Integral linker Hand etwa für alle Punkte  $Q$  aus einer Umgebung von  $Q_0$  existiert.



60. Beweis. Für eine beliebige Zahlenfolge  $x_\nu \rightarrow x$  ( $\nu \rightarrow \infty$ ) betrachten wir die von einem  $\nu_0$  an sicher existierende Folge der Integrale

$$A_\nu = \int_{R_\nu} f(\xi, \eta) \beta_\nu(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\nu \geq \nu_0), \quad (13.5)$$

wobei

$$\beta_\nu(\xi, \eta) = \frac{\varphi(\xi - x_\nu, \eta - y) - \varphi(\xi - x, \eta - y)}{x_\nu - x} \quad (13.6)$$

gesetzt ist. Wegen der Totalstetigkeit von  $\varphi$  in  $u$  erhält man für alle Punkte  $P(\xi, \eta) < R_\nu$ :

$$\varphi(\xi - x_\nu, \eta - y) - \varphi(\xi - x, \eta - y) = \int_{\xi - x}^{\xi - x_\nu} \varphi'_u(u, \eta - y) du. \quad (13.7)$$

Aus (13.3) folgt, daß für alle  $\xi$  und fast alle  $\eta$ , welche als Argumente von  $\varphi'_u(\xi - x, \eta - y)$  in Betracht kommen:

$$\left| \int_{\xi - x}^{\xi - x_\nu} |\varphi'_u(u, \eta - y)| du \right| < \left| \int_{\xi - x}^{\xi - x_\nu} C' du \right| = C' |x_\nu - x| \quad (32)$$

ist. Daher ergibt sich aus (13.7) für fast alle Punkte  $P(\xi, \eta) < R_\nu$

$$|\beta_\nu(\xi, \eta)| < C' \quad (\nu \geq \nu_0),$$

und folglich existiert eine über  $R'$  integrable Funktion  $\chi(\xi, \eta)$ , so daß für die integrierbaren Funktionen  $f \cdot \beta_\nu$  fast überall auf  $R_\nu$

$$|f(\xi, \eta) \beta_\nu(\xi, \eta)| < \chi(\xi, \eta) \quad (\nu \geq \nu_0) \quad (13.8)$$

gilt. Unter Beachtung dieser Ungleichungen erhält man zufolge des klassischen *Lebesgueschen* Konvergenzsatzes<sup>33)</sup>

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} A_\nu = \int_{R'} f(\xi, \eta) \lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta_\nu(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

<sup>32)</sup> Dabei wird von der folgenden, auf dem Satze von *Fubini* beruhenden Tatsache Gebrauch gemacht: Ist  $R'$  ein achsenparalleles Rechteck bezüglich eines  $uv$ -Koordinatensystems und  $M$  eine in  $R'$  enthaltene (zweidimensionale) Nullmenge, dann existiert eine (lineare) Nullmenge  $\mathfrak{N}$  von  $v$ -Werten, so daß jede  $R'$  schneidende Gerade  $v = \text{const.}$ ,  $v \notin \mathfrak{N}$  die Menge  $M$  höchstens in einer (linearen) Nullmenge trifft. (Vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 627, Satz 2.)

<sup>33)</sup> Vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 444.

und da dies für jede Folge  $x_\nu \rightarrow x$  gilt, ergibt sich hieraus unsere Behauptung.

61. **Kriterium II.** Ist  $\Phi(u, v; n)$  ein Verschiebungskern auf einem Quadrat  $(R_{2l}(O))$  und  $f(\xi, \eta)$  eine beliebige Funktion, die auf einem Quadrat  $R_l$  zu  $F_2$  gehört, so gilt für jeden Punkt  $Q_0(x, y) \in (R_l)$  die Relation (13.1), wenn zu jedem Rechteck  $R' \in (R_{2l}(O))$  und zu jedem Index  $n$  zwei Konstanten  $p_n \in (0, 1)$  und  $C_n$  existieren, so daß fast überall auf  $R'$

$$|\Phi'_u(u, v; n)| < \frac{C_n}{|u|^{1-p_n}} \quad (n = 1, 2, \dots; P(u, v) \in R'; p_n \in (0, 1)) \quad (13.9)$$

gilt. — Der Beweis dafür ergibt sich offenbar sofort auf Grund des folgenden Hilfssatzes:

62. **Hilfssatz 4.**  $f(\xi, \eta)$  sei eine beliebige Funktion, die auf  $R_l$  meßbar ist und für welche fast überall

$$|f(\xi, \eta)| < M \quad (P(\xi, \eta) \in R_l, M = \text{Const.}) \quad (13.10)$$

gilt, und  $\varphi(u, v)$  eine meßbare Funktion, welche für jedes feste  $v$  totalstetig ist in  $u$  auf jedem Rechteck  $R' \in (R_{2l}(O))$  der  $uv$ -Ebene.

Existiert dann zu jedem  $R'$  eine Konstante  $C''$ , so daß fast überall auf  $R'$  für ein beliebiges  $p \in (0, 1)$

$$|\varphi'_u(u, v)| < \frac{C''}{|u|^{1-p}} \quad (13.11)$$

gilt, dann ist (13.4) für jeden beliebigen aber festen Punkt  $Q_0(x, y) \in (R_l)$  erfüllt, sofern das Integral links in (13.4) für alle Punkte  $Q$  aus einer Umgebung von  $Q_0$  existiert.

63. **Beweis.** Wiederum betrachten wir für eine beliebige Zahlenfolge  $x_\nu \rightarrow x$  ( $\nu \rightarrow \infty$ ) die von einem  $\nu_0$  an existierende Folge der Integrale (13.5).

Wegen Voraussetzung (13.11) ist für alle  $\xi$  und fast alle  $\eta$ , welche als Argumente von  $\varphi'_u(\xi - x, \eta - y)$  in Betracht kommen:

$$\left| \int_{\xi-x}^{\xi-x_\nu} |\varphi'_u(u, \eta - y)| du \right| < \left| \int_{\xi-x}^{\xi-x_\nu} \frac{C''}{|u|^{1-p}} du \right| = \frac{C''}{p} \left| |\xi - x_\nu|^p + \varepsilon |\xi - x|^p \right|^{32},$$

wobei

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi < \langle x, x_\nu \rangle \\ -1 & \text{für } \xi < \langle x, x_\nu \rangle \end{cases}$$

ist. Zuzolge (13.7) gilt daher für fast alle Punkte  $P(\xi, \eta) \in R_i$

$$|\beta_\nu(\xi, \eta)| < \frac{C''}{p} \left| \frac{|\xi - x_\nu|^p + \varepsilon |\xi - x|^p}{x_\nu - x} \right| \equiv \frac{C''}{p} \cdot \Delta . \quad (13.12)$$

Zur Abschätzung des letzten Ausdrucks führen wir in  $\Delta$  die Variablen  $\xi - x_\nu = u$ ,  $\xi - x = v$  ein und beweisen sodann die Ungleichung

$$\Delta = \left| \frac{|u|^p + \eta |v|^p}{v - u} \right| < \frac{2}{|v|^{1-p}} \quad (u \neq v) , \quad (13.13)$$

wobei

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{für } uv \leq 0 \\ -1 & \text{für } uv > 0 \end{cases}$$

ist.

Zum Beweis setzen wir  $|u| = U$ ,  $|v| = V$ . Dann können wir die behauptete Ungleichung in der Gestalt schreiben

$$\frac{U^p + \eta V^p}{U + \eta V} < \frac{2}{V^{1-p}} \quad (U, V \geq 0; U + V > 0; U \neq V \text{ für } \eta = -1)$$

oder, wenn mit  $V^{1-p}$  multipliziert und  $\frac{U}{V} = z$  gesetzt wird,

$$\frac{z^p + \eta}{z + \eta} < 2 \quad (z \geq 0, z \neq 1 \text{ für } \eta = -1, 0 < p < 1) . \quad (13.14)$$

Unter Benutzung der Relationen  $1 \geq z^p \geq z$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) und  $z^p \leq z$  ( $z \geq 1$ ) zeigt man jetzt sofort, daß (13.14) in jedem der Fälle  $\eta = 1$ ,  $\eta = -1$  richtig ist, womit (13.13) bewiesen ist.

Mit Hilfe von (13.13) gewinnt man jetzt aus (13.12) die für fast alle Punkte  $P(\xi, \eta) \in R_i$  gültige Ungleichung

$$|\beta_\nu(\xi, \eta)| < \frac{2C''}{p} \cdot \frac{1}{|\xi - x|^{1-p}} .$$

Hieraus ergibt sich im Verein mit (13.10) wiederum die Existenz einer integrierbaren Majoranten  $\chi(\xi, \eta)$  für die Funktionen  $f \cdot \beta_\nu$ , so daß (13.8) gilt. Das Ende des Beweises kann jetzt analog geführt werden wie im Falle des Kriteriums I.

## L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- B.H.Camp* (I). Singular Multiple Integrals with Applications to Series, Transactions of the American Math. Society, Vol. 14 Nr. 1 (1913), pp. 42—64.
- C.Caratheodory* (I). Vorlesungen über reelle Funktionen, (1918).
- H.Hahn* (I). Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale, Denkschr. der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. 93 (1917), pp. 585 bis 692.
- O.Haupt* und *G.Aumann* (I). Differential- und Integralrechnung, Bd. III (1938), pp. 164—169.
- I.W.Hobson* (I) und (II). The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series:  
 (I) Vol.I, 3rd ed. (1927),  
 (II) Vol.II, 2nd ed. (1926).
- H.Lebesgue* (I). Sur les Intégrales Singulières, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, (3), t.I (1909), pp. 25—117.
- A.Ostrowski* (I). Sur les conditions de validité d'une classe de relations entre les expressions différentielles linéaires, Comm. Math. Helv. Vol. 15 (1942/43), Fasc. III, pp. 269—286.
- A.Ostrowski* (II). Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales, Comm. Math. Helv. Vol. 15 (1942/43), Fasc. III, p. 222—223.
- Th.Radacovič* (I). Über die Interpolation von Funktionen mehrerer Veränderlicher, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, Math. Nat. Klasse, Abt. 2a, Bd. 136 (1927), Fasc. 1—10, pp. 87—113.

(Eingegangen den 15. Juli 1946.)