Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1949)

Artikel: Ein geometrisches Minimumproblem.
Autor: Bieri, Hans
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19192

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein geometrisches Minimumproblem

Von Hans Bieri, Bern

Ein Problem von Steiner lautet:

„Zu drei Punkten A_1, A_2, A_3 soll ein vierter Punkt P so gefunden werden, daß die Summe der Entfernungen $PA_1 + PA_2 + PA_3$ möglichst klein wird."[1])

Diese schöne Aufgabe ruft nach einer Verallgemeinerung. Wir erweitern die Zahl der Punkte auf n und lassen auch Geraden und Ebenen zu. *Gesucht wird also ein Punkt, dessen Gesamtentfernung von n_1 festen Punkten, n_2 festen Geraden und n_3 festen Ebenen möglichst klein wird.*

Die vorliegende Arbeit fußt auf der Theorie der Extrema einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen[2]). Der Satz von Weierstraß gestattet zum vornherein weitgehende Aussagen. Es wird bewiesen, daß die Abstandsfunktion im allgemeinen genau ein relatives Minimum besitzt. Dieses Minimum ist hier auch ein absolutes. Auf das Punktproblem wird genauer eingegangen.

Eine elementare Überlegung gestattet, diejenigen Fälle aufzufinden, wo sich jegliche Rechnung erübrigt. Die Verwendung von Vektoren macht es möglich, die Bedingungen für das Extrem in ein geometrisches Gewand zu kleiden. Aus der Differentialgeometrie brauche ich einige elementare Formeln[3]). Die Bezeichnungen stammen aus W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie I[3]).

---

[1]) Vergleiche *R. Courant* und *D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik I, 2. Auflage, S. 141 und *E. Czuber*, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I, 4. Auflage, S. 288—291. *Lösung:* Erreicht kein Innenwinkel des Dreiecks $A_1A_2A_3$ den Wert $2\pi/3$, so fällt das Minimum in denjenigen Punkt im Innern, von dem aus die Seiten unter dem Winkel $2\pi/3$ gesehen werden. Andernfalls liefert derjenige Eckpunkt den kleinsten Funktionswert, für welchen die Summe der anstoßenden Dreieckseiten am kleinsten ausfällt.

[2]) Vollständig dargestellt in *C. Carathéodory*, Variationsrechnung, 1. Teil, S. 6—7, 2. Teil, S. 164—189.

[3]) 4. Kapitel, S. 85—89, S. 114—115. Dazu tritt noch die Indexrechnung.

§ 1. Die Abstandsfunktion und der Weierstraßsche Satz

Die Herleitung der Abstandsfunktion ist elementar und mag deshalb unterbleiben. Man findet[4]:

I. n_1 *Punkte.*

$$\mathfrak{d}_i^{(1)} = \mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i\,; \quad S^{(1)} = \sum_{i=1}^{n_1} \sqrt{(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i)^2} \tag{1}$$

$\mathfrak{a}_i$ = Stützvektor des i-ten Punktes.

II. n_2 *Geraden.*

$$\mathfrak{d}_i^{(2)} = \mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i - \frac{\mathfrak{b}_i\,\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}_i^2} \cdot \mathfrak{b}_i\,; \qquad S^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{[\mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i\,, \mathfrak{b}_i]^2} \tag{2}$$

$\mathfrak{a}_i$ = Stützvektor der i-ten Geraden.

$\mathfrak{b}_i$ = Einheitsvektor in Richtung der i-ten Geraden.

III. n_3-*Ebenen.*

$$\mathfrak{d}_i^{(3)} = \mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i - \frac{\mathfrak{b}_i\,\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}_i^{(2)}} \cdot \mathfrak{b}_i - \frac{\mathfrak{c}_i\,\mathfrak{x}}{\mathfrak{c}_i^2} \cdot \mathfrak{c}_i \qquad S^{(3)} = \sum_{i=1}^{n_3} \sqrt{([\mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i\,, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2} \tag{3}$$

$\mathfrak{a}_i$ = Stützvektor der i-ten Ebene.

$\mathfrak{b}_i, \mathfrak{c}_i$ = orthogonale Einheitsvektoren in der i-ten Ebene.

$$S = \sum \sqrt{(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i)^2} + \sum \sqrt{[\mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]^2} + \sum \sqrt{([\mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2} \tag{4}$$

Wir fassen eine Kugel ins Auge, welche alle n_1 Punkte im Innern enthält. Auf dieser beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{K}$ ist S stetig und nimmt nach dem erwähnten Satz mindestens ein Minimum und ein Maximum an. Indem man die Kugel hinreichend groß wählt, kann erzwungen werden, daß auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ kein Minimum liegt. S ist ferner nur auf $\mathfrak{K} - \mathfrak{E}$ stetig differentierbar, wo $\mathfrak{E}$ aus den gegebenen Punkten, Geraden und Ebenen besteht. Dieser Umstand muß scharf im Auge behalten werden.

§ 2. Die elementaren Fälle

Die vorgegebenen n Elemente verteilen wir auf zwei Klassen. Es bedeuten:

---

[4]) Zur Entlastung des Druckes werden die verschiedenen Stütz- und Einheitsvektoren nur dann gesondert bezeichnet, wenn es unvermeidlich ist. Aus dem gleichen Grunde wird die Summationsbezeichnung künftig vereinfacht.

$\mathfrak{M}_1$ Abgeschlossene Menge der Punkte, für welche S seine untere Grenze bezüglich der Elemente der ersten Klasse erreicht.

$\mathfrak{M}_2$ Dito für die zweite Klasse.

$\mathfrak{D}$ Durchschnitt von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$.

$\mathfrak{V}$ Vereinigungsmenge von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$.

Man kann folgende Klassifikation vornehmen:

a) $\mathfrak{D}$ nicht leer $\begin{cases} \mathfrak{D} = 1 \text{ Punkt.} \\ \mathfrak{D} = \text{unendliche Punktmenge}^{5)}. \end{cases}$

b) $\mathfrak{D}$ leer.

Im Falle a) erreicht S seine untere Grenze auf der Punktmenge $\mathfrak{D}$. Von Interesse ist eigentlich nur der Unterfall mit $\mathfrak{D} = 1$ Punkt. S besitzt alsdann im Innern der oben eingeführten Kugel genau ein eigentliches Minimum[6]). Viel anziehender, aber auch ungleich schwieriger zu realisieren ist der Fall b), besonders dann, wenn kein Punkt von $\mathfrak{V}$ Minimumeigenschaft besitzt.

§ 3. Parameterdarstellung, Formeln

Aus den n Elementen greifen wir m willkürlich gewählte heraus und betrachten die Flächen konstanter Abstandssumme von denselben. Vermittelst zweier Parameter u, v geht man zur uniformisierten Darstellung über und erhält:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v, w) \; ; \qquad S = w + \sum a[\mathfrak{x}(u, v, w)] \; . \tag{5}$$

Die Formeln

$$\mathfrak{x}_{ik} = \Gamma^{\lambda}_{ik} \cdot \mathfrak{x}_{\lambda} + F_{ik} \cdot \mathfrak{N} \; ; \qquad \ddot{\mathfrak{x}} = \frac{\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}}{\dot{\mathfrak{x}}^4} \cdot \dot{\mathfrak{x}} - \varkappa \cdot \dot{\mathfrak{x}}^2 \cdot \mathfrak{n}\ ^{7)} \tag{6}$$

---

[5]) Der Fall $\mathfrak{D}$ = endliche Punktmenge kann nicht eintreten.

[6]) Ungerade Zahl von Punkten auf einer Geraden, eine Anzahl Geraden, deren kürzeste Abstände sich in einem Punkte schneiden oder berühren, eine Ebenenschar durch einen Punkt u. a. m.

[7])
$$\mathfrak{x}_{ik} = \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u_i \, \partial u_k} \; ; \qquad = \frac{d}{dt} \; ; \qquad \mathfrak{n} = \text{äußere Normale.}$$

$$E_{11} = E, \quad E_{12} = F, \quad E_{22} = G; \quad F_{11} = L, \quad F_{12} = M, \quad F_{22} = N.$$

$$\Gamma^{i}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_{\lambda k}}{\partial u_l} + \frac{\partial E_{\lambda l}}{\partial u_k} - \frac{\partial E_{kl}}{\partial u_\lambda}\right) E^{\lambda i}$$

In der Ebene tritt an die Stelle von u, v der Kurvenparameter t.

würden gestatten, die analytischen Bedingungen für Extreme von S ohne Spezialisierung aufzustellen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist es angezeigt, im gegebenen Augenblick Cartesische-, Zylinder-, räumliche Polarkoordinaten bzw. gewöhnliche Polarkoordinaten einzuführen.

§ 4. Das räumliche Problem

In Spezialfällen ist die Abstandsfunktion leicht zu überblicken; der allgemeine Fall liegt nicht komplizierter, gilt doch der

Satz: Entweder besitzt S im Innern von $\mathfrak{K}$ genau ein eigentliches relatives Minimum, oder S erreicht auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}$, die keine Randpunkte von $\mathfrak{K}$ enthält, genau ein uneigentliches Minimum [8]).

Wäre dieser Satz nicht richtig, so müßte S infolge der Stetigkeit mindestens ein relatives Maximum annehmen. Es muß also bewiesen werden, daß keine Maxima vorkommen. Dies geschieht mit Hilfe von zwei Hilfssätzen.

Hilfssatz 1: S nimmt auf innern Punkten von $\mathfrak{K} - \mathfrak{E}$ kein Maximum an.

Gemäß der allgemeinen Theorie sind folgende Ausdrücke zu bilden:

$$S_u = \mathfrak{x}_u \sum \frac{(\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i)}{\sqrt{(\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i)^2}} + \sum \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{b}_i][\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]}{\sqrt{[\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]^2}} + \sum \frac{([\mathfrak{x}_u, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)([\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)}{\sqrt{([\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2}}$$

$$S_v = \mathfrak{x}_v \sum \frac{(\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i)}{\sqrt{(\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i)^2}} + \sum \frac{[\mathfrak{x}_v, \mathfrak{b}_i][\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]}{\sqrt{[\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]^2}} + \sum \frac{([\mathfrak{x}_v, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)([\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)}{\sqrt{([\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2}}$$

$$S_w = \mathfrak{x}_w \sum \frac{(\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i)}{\sqrt{(\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i)^2}} + \sum \frac{[\mathfrak{x}_w, \mathfrak{b}_i][\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}\ ]}{\sqrt{[\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]^2}} + \sum \frac{([\mathfrak{x}_w, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)([\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)}{\sqrt{([\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2}} + 1 \tag{7}$$

$$S_{rs} = \mathfrak{x}_{rs} \sum \frac{(\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i)}{\sqrt{}} + \sum \frac{[\mathfrak{x}_{rs}, \mathfrak{b}_i][\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]}{\sqrt{}} + \sum \frac{([\mathfrak{x}_{rs}, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)([\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)}{\sqrt{}}$$
$$+ \sum \frac{[\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{x}_r][\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{x}_s]}{(\sqrt{})^3} + \sum \frac{[[\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i], [\mathfrak{x}_r, \mathfrak{b}_i]]\,[[\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i], [\mathfrak{x}_s, \mathfrak{b}_i]]}{(\sqrt{})^3}$$
$$+ \sum \frac{[[\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i, [\mathfrak{x}_r, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i]\,[[\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i, [\mathfrak{x}_s, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i]}{[\sqrt{})^3}\,. \tag{8}$$

---

[8]) Die Alternative kommt tatsächlich vor. Sind von 4 Ebenen je 2 parallel, so bleibt $S^{(3)}$ auf dem ganzen Parallelepiped konstant. Ähnlich liegen die Verhältnisse für $S^{(2)}$, wenn 3 Geraden ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Soll ein Extremum eintreten, so müssen die Ausdrücke (7) verschwinden. Diese Bedingung wird zweckmäßig so geschrieben:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{E}\,\Sigma \cos\varphi_i^{(1)} + \Sigma \sqrt{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{b}_i]^2} \cos\psi_i^{(1)} + \Sigma \sqrt{([\mathfrak{x}_u, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2} \cos\chi_i^{(1)} = 0 \\
&\sqrt{G}\,\Sigma \cos\varphi_i^{(2)} + \Sigma \sqrt{[\mathfrak{x}_v, \mathfrak{b}_i]^2} \cos\psi_i^{(2)} + \Sigma \sqrt{([\mathfrak{x}_v, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2} \cos\chi_i^{(2)} = 0 \qquad (9) \\
&\sqrt{\mathfrak{x}_w^2}\,\Sigma \cos\varphi_i^{(3)} + \Sigma \sqrt{[\mathfrak{x}_w, \mathfrak{b}_i]^2} \cos\psi_i^{(3)} + \Sigma \sqrt{([\mathfrak{x}_w, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2} \cos\chi_i^{(3)} = -1 \;.
\end{aligned}$$

Dann vereinfachen sich aber die zweiten Terme von S_{uu}, S_{vv}, S_{ww}, die allein berücksichtigt werden müssen, zu

$$\begin{aligned}
&E\,\Sigma \frac{\sin^2\varphi_i^{(1)}}{\sqrt{(\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i)^2}} + \Sigma \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{b}_i]^2 \sin^2\psi_i^{(1)}}{\sqrt{[\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]^2}} + \Sigma \frac{([\mathfrak{x}_u, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2 \sin^2\chi_i^{(1)}}{\sqrt{([\mathfrak{x}-\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2}}\;; \\
&G\,\Sigma \frac{\sin^2\varphi_i^{(2)}}{\sqrt{}} + \Sigma \frac{[\mathfrak{x}_v, \mathfrak{b}_i]^2 \sin^2\psi_i^{(2)}}{\sqrt{}} + \Sigma \frac{([\mathfrak{x}_v, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2 \sin^2\chi_i^{(2)}}{\sqrt{}}\;; \\
&\mathfrak{x}_w^2\,\Sigma \frac{\sin^2\varphi_i^{(3)}}{\sqrt{}} + \Sigma \frac{[\mathfrak{x}_w, \mathfrak{b}_i]^2 \sin^2\psi_i^{(3)}}{\sqrt{}} + \Sigma \frac{([\mathfrak{x}_w, \mathfrak{b}_i]\,\mathfrak{c}_i)^2 \sin^2\chi_i^{(3)}}{\sqrt{}}\;, \qquad (10)
\end{aligned}$$

und bei Wahl cartesischer Koordinaten verschwinden die ersten Terme der erwähnten Größen[9]). S_{xx}, S_{yy}, S_{zz} sind also positiv definit oder höchstens positiv semidefinit. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2: S nimmt auf $\mathfrak{E}$ kein Maximum an.

Beweis. Gemäß 1) ist:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{d}_i^{(1)})^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2\,a_{i1}^{(1)}\,x - 2\,a_{i2}^{(1)}\,y - 2\,a_{i3}^{(1)}\,z + a_i^{(1)^2}\;. \\
(\mathfrak{d}_i^{(2)})^2 &= x^2\,(1 - b_{i1}^{(2)^2}) + y^2\,(1 - b_{i2}^{(2)^2}) + z^2\,(1 - b_{i3}^{(2)^2}) - 2\,b_{i1}^{(2)}\,b_{i2}^{(2)} \cdot x\,y \\
&\quad - 2\,b_{i2}^{(2)}\,b_{i3}^{(2)} \cdot y\,z - 2\,b_{i3}^{(2)}\,b_{i1}^{(2)} \cdot z\,x - 2\,a_{i1}^{(2)}\,x - 2\,a_{i2}^{(2)}\,y - 2\,a_{i3}^{(2)}\,z + a_i^{(2)^2}\;, \\
(\mathfrak{d}_i^{(3)})^2 &= x^2\,(1 - b_{i1}^{(3)^2} - c_{i1}^{(3)^2}) + y^2\,(1 - b_{i2}^{(3)^2} - c_{i2}^{(3)^2}) + z^2\,(1 - b_{i3}^{(3)^2} - c_{i3}^{(3)^2}) \\
&\quad - 2\,x\,y\,(b_{i1}^{(3)}\,b_{i2}^{(3)} + c_{i1}^{(3)}\,c_{i2}^{(3)}) - 2\,y\,z\,(b_{i2}^{(3)}\,b_{i3}^{(3)} + c_{i2}^{(3)}\,c_{i3}^{(3)}) - 2\,z\,x\,(b_{i3}^{(3)}\,b_{i1}^{(3)} + c_{i3}^{(3)}\,c_{i1}^{(3)}) \\
&\quad - 2\,a_{i1}^{(3)}\,x - 2\,a_{i2}^{(3)}\,y - 2\,a_{i3}^{(3)}\,z + a_{i3}^{(3)^2}\;.
\end{aligned}$$

Wir schließen die elementaren Fälle des § 2 aus[10]), legen den Nullpunkt des Koordinatensystems in einen Punkt von $\mathfrak{E}$ und entwickeln S in der

[9]) Bei Wahl der in § 3 erwähnten Koordinaten stellt man mühelos fest, daß die 1. Terme von S_{uu}, S_{vv} und S_{ww} positiv ausfallen. Man benötigt 6) und 9).

[10]) Sonst würden nämlich Komplikationen entstehen.

Umgebung dieses Punktes nach Potenzen von x, y, z, was immer möglich ist. Während nun die linearen Glieder bei Wechsel des Nullpunktes gewisse Modifikationen erleiden, bleiben die Absolutglieder und die quadratischen Glieder formal unverändert. Das Ergebnis der elementaren Rechnung lautet:

$$S = \sum a_i^{(1)} + \sum a_i^{(2)} + \sum a_i^{(3)} + \cdots$$

$$+\frac{1}{2}\sum\left\{\frac{x^2(a_{i2}^{(1)^2}+a_{i3}^{(1)^2})+y^2(a_{i3}^{(1)^2}+a_{i1}^{(1)^2})+z^2(a_{i1}^{(1)^2}+a_{i2}^{(1)^2})}{a_i^{(1)^3}}\right\}+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\sum\left\{\frac{x^2[a_i^{(2)^2}(b_{i2}^{(2)^2}+b_{i3}^{(2)^2})-a_{i1}^{(2)^2}]+y^2[a_i^{(2)^2}(b_{i3}^{(2)^2}+b_{i1}^{(2)^2})-a_{i2}^{(2)^2}]+z^2[a_i^{(2)^2}(b_{i1}^{(2)^2}+b_{i2}^{(2)^2})-a_{i3}^{(2)^2}]}{a_i^{(2)^3}}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum\left\{\frac{x^2[a_i^{(3)^2}(1-b_{i1}^{(3)^2}-c_{i1}^{(3)^2})-a_{i1}^{(3)^2}]+y^2[a_i^{(3)^2}(1-b_{i2}^{(3)^2}-c_{i2}^{(3)^2})-a_{i2}^{(3)^2}]+z^2[a_i^{(3)^2}(1-b_{i3}^{(3)^2}-c_{i3}^{(3)^2})-a_{i3}^{(3)^2}]}{a_i^{(3)^3}}\right\}$$

$$+\cdots$$

Nun beträgt die Summe der Koeffizienten von x^2, y^2, z^2

in der 1. geschweiften Klammer: $\sum \frac{2}{a_i^{(1)}} > 0$,

in der 2. geschweiften Klammer: $\sum \frac{1}{a_i^{(2)}} > 0$,

in der 3. geschweiften Klammer: 0 .

Also muß mindestens einer dieser Koeffizienten positiv sein. Dies hat aber zur Folge, daß die für Extrema von S maßgebende quadratische Form weder *negativ definit* noch *negativ semidefinit* ist. Damit sind Hilfssatz und Satz bewiesen[11]).

Der festgestellte Sachverhalt ist äußerst bequem. Da nämlich die Existenz des absoluten Minimums gesichert ist und es genau ein relatives Minimum gibt, so ist mit dem letzten zugleich das erstere gefunden.

In der Ebene sind selbstredend nur Punkte und Geraden zulässig. Alle Formeln vereinfachen sich wesentlich. Prinzipiell tritt kein neues Moment auf.

---

[11]) Es erscheint natürlicher, S in der Umgebung einer vorgegebenen Geraden nach Potenzen von r und z, in der Umgebung eines Punktes aus $\mathfrak{E}$ nach Potenzen von r allein zu entwickeln; an dieser Stelle ist dies aber nicht nötig, da die Nichtexistenz eines Maximums schon gesichert ist.

§ 5. Das Punktproblem in der Ebene

Wir lassen die Geraden und Ebenen in Punkte ausarten und befassen uns mit dem Problem, die Summe der Abstände eines Punktes von n festen Punkten zu einem Minimum zu machen. 4) schreibt sich in Polarkoordinaten:

$$S = r + \sum_{2}^{n} \sqrt{r^2 - 2a_i r \cdot \cos(\varphi - \alpha_i) + a_i^2}\ ^{12)} \ . \tag{4'}$$

Es sei M der Punkt mit der in Frage stehenden Minimaleigenschaft. Unter welchen Bedingungen fällt M mit einem der Punkte P_k aus $\mathfrak{E}$ zusammen? Diese Fragestellung erfordert Entwicklung von S nach Potenzen von r. Das Resultat ist:

$$S = \sum a_i + r \cdot h + \frac{r^2}{2} \sum \frac{\sin^2(\varphi - \alpha_i)}{a_i} + \cdots ; \tag{11'}$$

$$h = 1 - \sum \cos(\varphi - \alpha_i) \ .$$

Für ein Minimum von S ist demnach notwendig und hinreichend, daß h nicht negativ sei. Nun erreicht die genannte Größe für

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{\sum \sin \alpha_i}{\sum \cos \alpha_i}$$

ihren kleinsten Wert

$$h^* = 1 - \sqrt{(\sum \cos \alpha_i)^2 + (\sum \sin \alpha_i)^2} \ .$$

Ist also in P_k die Ungleichung

$$\sqrt{(\sum \cos \alpha_i)^2 + (\sum \sin \alpha_i)^2} \leqslant 1$$

erfüllt, so nimmt die Funktion ihr Minimum tatsächlich in P_k an. Der Fall $r \neq 0$ ist viel schwieriger zu behandeln. Wegen

$$\mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_\varphi = 0 ; \quad E = \mathfrak{x}_\varphi^2 = r^2 ; \quad G = \mathfrak{x}_r^2 = 1$$

geht 9) über in

$$r \sum \cos \varphi_i^{(1)} = 0 ; \quad \sum \cos \varphi_i^{(3)} + 1 = 0 \ , \tag{9'}$$

während (10) sich zu

$$r^2 \sum \frac{\sin^2 \varphi_i^{(1)}}{\sqrt{(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i)^2}} > 0 \ ; \qquad \sum \frac{\sin^2 \varphi_i^{(3)}}{\sqrt{(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i)^2}} > 0 \ ^{13)}$$

---

[12]) $\mathfrak{a}_i = a_i\ (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$. $\varphi - \alpha_i$ ist derjenige Winkel, unter welchem $(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}_i)$ vom Nullpunkt P_1 aus gesehen wird.

[13]) Um kein Gleichheitszeichen berücksichtigen zu müssen, ist nur der triviale Fall auszuschließen, wo alle Punkte auf ein und derselben Geraden liegen.

vereinfacht. Infolge der Voraussetzung $r \neq 0$ richtet sich das Hauptaugenmerk auf das Gleichungssystem

$$\sum_{2}^{n} \cos \varphi_i^{(3)} + 1 = 0 ; \qquad \sum_{2}^{n} \sin \varphi_i^{(3)} = 0 . \tag{9*}$$

$\varphi_i^{(3)}$ ist derjenige Winkel, unter welchem $\mathfrak{a}_i$ von M aus erscheint. Diese Winkel $\varphi_i^{(3)}$ sind für unser Problem charakteristisch.

Wir addieren zur 1. Gleichung (9*) die mit $i = \sqrt{-1}$ multiplizierte 2. Gleichung eben daselbst. Die modifizierte Minimumbedingung lautet dann:

$$\boxed{\sum_{2}^{n} z_i + 1 = 0 ; \qquad |z_k| = 1} \qquad (k = 2, 3 \ldots n) \tag{9**}$$

Bei Wechsel des Nullpunktes reproduziert sich die linke Seite von (9**) bis auf einen Exponentialfaktor von endlichem Betrag. Es ist also nichts beizufügen[14]).

(9**) läßt folgende Deutung zu:

Die $n - 1$ Zahlen z_k genügen einer Gleichung vom Grade $n - 1$, der Form

$$z^{n-1} + z^{n-2} + a_{n-3} z^{n-3} + \cdots a_0 ,$$

wobei die $n - 2$ Koeffizienten der nachfolgenden Potenzen von z so gewählt werden müssen, daß alle z_k auf dem Einheitskreise liegen. Nun geben wir $n - 3$ Wurzeln der genannten Gleichung vor. Es gilt dann die Zerfällung

$$z^{n-1} + z^{n-2} + a z^{n-3} + \cdots = (z^{n-3} - p_1 z^{n-4} + \cdots (-1)^n p_n) Q + R$$

$$Q = z^2 + z(1 + p_1) + (a - p_2) ;$$

$p_l = l$-te elementare symmetrische Funktion.

Das Restpolynom R kann immer identisch zum Verschwinden gebracht werden[15]). Die fehlenden Werte z müssen nun der quadratischen Gleichung

$$z^2 + z(1 + p_1) + (a - p_2) = 0 \tag{12}$$

genügen und natürlich auf dem Einheitskreise liegen. Die Auflösung von (12) ist

---

[14]) Vergleiche die entsprechende Stelle in § 6.

[15]) Seine Koeffizienten gleich Null gesetzt gestatten eindeutige Auflösung nach a_{n-3}, $a_{n-4} \ldots a_0$. Diese werden Funktionen der p_e, und somit ist die gesuchte Gleichung von Fall zu Fall festgelegt, sofern $a_{n-3} = a$ eindeutig bestimmbar ist.

$$z^* = -\left(\frac{1+p_1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1+p_1}{2}\right)^2 + p_2 - a} \tag{13}$$

z^* hat dann und nur dann den Betrag 1, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Die komplexe Zahl $z_1^* = -\left(\frac{1+p_1}{2}\right)$ liegt nicht im Äußern[16]) des Einheitskreises.

b) Die komplexe Zahl $z_2^* = \sqrt{\left(\frac{1+p_1}{2}\right)^2 + p_2 - a}$ ist gleich der halben Kreissehne im Endpunkte von z_1^* [17]).

Damit beherrschen wir die Verteilung der Sehwinkel um M vollständig, und folgende Behauptung erfolgt zu Recht:

„Zu vorgegebenem M und $n-2$ passend gewählten Punkten können immer weitere zwei Punkte konstruiert werden, so daß die Abstandsfunktion in M ihr absolutes Minimum annimmt.“

Sind aber umgekehrt alle Punkte vorgegeben und sucht man M, so ist die Situation weniger günstig. Das eigentliche Problem ist nämlich bei allgemeiner Lage der Punkte P_i nur für $n \leqslant 4$ lösbar[18]).

§ 6. Das Punktproblem im Raum

Das räumliche Problem ist erwartungsgemäß heikler. Mit räumlichen Polarkoordinaten wird

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= r\,(\cos u \cdot \sin v,\ \sin u \cdot \sin v,\ \cos v)\ ;\\
\mathfrak{a}_i &= a_i\,(\cos u_i \cdot \sin v_i,\ \sin u_i \cdot \sin v_i,\ \cos v_i)\ ;\\
\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{x} &= r\,a_i \cdot \cos \chi_i\ ;\\
\cos \chi_i &= (\cos u_i \cdot \sin v_i \cdot \cos u \sin v + \sin u_i \cdot \sin v_i \cdot \sin u \sin v + \cos v_i \cos v)\ .
\end{aligned}$$

Genau wie in der Ebene ist der Nachweis der Minimaleigenschaft eines Punktes P_k aus $\mathfrak{E}$ elementar, so daß sich die Wiedergabe erübrigt. Unter Weglassung des Faktors $r \neq 0$ wird aus (9)

---

[16]) Gilt $|z_1^*| = 1$, so tritt ein Doppelpunkt auf. Für $z_1^* = 0$ bleibt für z_2^* ein Freiheitsgrad erhalten.

[17]) Setzt man etwa $z_1^* = \sin\beta \cdot e^{i\omega}$, so folgt: $a = \sin^2\beta \cdot e^{2i\omega} - \cos^2\beta \cdot e^{i(2\omega+\pi)} + p_2$, also eindeutige Bestimmung.

[18]) Ausnahmefälle sind die in § 2 namhaft gemachten Punktverteilungen, sowie die für ungerades u nicht trivialen Konstellationen, welche sich auf ein reguläres n-Eck reduzieren lassen.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \cos v_i = 0\,; \quad \sum_{i=1}^{n} \cos u_i \cdot \sin v_i = 0\,; \quad \sum_{i=1}^{n} \sin u_i \cdot \sin v_i = 0\ .} \tag{9**}$$

Ohne weiteres ist ersichtlich, daß die Gleichungen (9**) invariant sind gegenüber Drehungen des Koordinatensystems, drücken sie doch das Verschwinden des Vektors $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i M}$, also auch seines Betrages aus. Man kann infolgedessen von jedem beliebigen Punkte P_i ausgehen.

Die Komponenten des Vektors $\mathfrak{w} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M P_i}$ bezüglich der x, y, z-Achse genügen der Gleichung n-ten Grades

$$w^n + a_{n-2}\, w^{n-2} + a_{n-3}\, w^{n-3} + \cdots a_0 = 0\,^{19)}\ .$$

Nun seien auf der Einheitskugel der Nordpol $(0, 0, 1)$ sowie $n - 3$ weitere Punkte in beliebiger Lage vorgegeben. Die Komponenten der zwei noch fehlenden Vektoren müssen dann nach den Überlegungen des § 5 der Gleichung

$$w^2 + p_1 w + a_{n-2} - p_2 + p_1^2 = 0\,^{19)} \tag{12'}$$

genügen, wo die p_i die gleiche Bedeutung haben wie früher. Die Lösung von (12′) ist

$$w^* = -\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_1}{2}\right)^2 - (a_{n-2} - p_2 + p_1^2)}\ ;\ ^{19)} \tag{13'}$$

$$\left|\frac{p_1}{2}\right| \leqslant 1$$

Sie kann noch vorteilhaft umgeformt werden:

a) $$\left(\frac{p_1}{2}\right)^2 \geqslant (a_{n-2} - p_2 + p_1^2) \geqslant 0 \rightarrow a_{n-2} - p_2 + p_1^2 = \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 \sin^2\theta$$

$$w_1^* = -p_1 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\ ; \qquad w_2^* = -p_1 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\ ^{20)}$$

b) $$\left(\frac{p_1}{2}\right)^2 \geqslant 0 \geqslant a_{n-2} - p_2 + p_1^2 \rightarrow a_{n-2} - p_2 + p_1^2 = +\left(\frac{p_1}{2}\right)^2 \mathfrak{Sin}^2\theta$$

$$w_1^* = -p_1\, \mathfrak{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\ ; \qquad w_2^* = p_1\, \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\ ^{20)}$$

---

[19]) Gleichung und Lösung gelten selbstredend in der Weise, daß jeder Komponente im allgemeinen verschiedene Werte von p_1 und p_2 zukommen.

[20]) Die Schreibweise ist symbolisch. Es handelt sich um drei unabhängige Winkel θ_1, θ_2, θ_3.

Die Lösung des Problems zeichnet sich jetzt ab. Die zwei fehlenden Vektoren sind Einheitsvektoren. Deshalb handelt es sich im Parameterraum der θ um zwei Ellipsoide, die zum Schnitt gebracht werden müssen. Abschließend darf folgendes behauptet werden:

„*Zu vorgegebenen $n-2$ passend gewählten Raumpunkten gibt es immer eine einparametrige Schar von Punktepaaren mit der Eigenschaft, daß* (9**) *erfüllt ist und die Abstandsfunktion in M ihr absolutes Minimum annimmt.*"

Das eigentliche Problem ist für die regulären Polyeder lösbar. Läßt man das Tetraeder beiseite, so handelt es sich sogar um elementare Fälle[21]). Was den letztgenannten Körper betrifft, so ist leicht zu sehen, daß den Gleichungen (9**) Genüge geleistet wird durch die sechs im Kugelmittelpunkt angebrachten Vektoren

$$\mathfrak{m}_1 = (0, 0, 1); \qquad \mathfrak{x}_u = (1, 0, 0)$$

$$\mathfrak{m}_2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right); \qquad \mathfrak{x}_v = (0, 1, 0)$$

$$\mathfrak{m}_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right);$$

$$\mathfrak{m}_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right).$$

Es gelten die sechs Gleichungen $\mathfrak{m}_i \mathfrak{m}_k = -{}^1/_3$ mit der Konsequenz $\cos\chi = -{}^1/_3$. Damit ist sogar bewiesen, daß bei jedem Körper, dessen vier Ecken die Koordinaten $\lambda_i \mathfrak{m}_i$; $0 < \lambda_i < \infty$ besitzen, derjenige Punkt Minimaleigenschaft besitzt, von dem aus die sechs Kanten unter ein und demselben Winkel $\chi = \arccos(-{}^1/_3)$ gesehen werden.

Schließlich sei noch bemerkt, daß infolge der einfachen Struktur der Minimumbedingung im R_n keine weitern Schwierigkeiten auftreten werden.

§ 7. Übertragung auf Flächen

Das am Schluß des § 4 formulierte Problem behält auf Raumflächen einen Sinn. Man hat nur die Abstände längs geodätischer Linien zu messen. Es bedeutet dann eine große Vereinfachung, die Geraden nicht durch irgendwelche Flächenkurven, sondern ebenfalls durch geodätische

[21]) Sie besitzen Diagonalen, die sich im Kugelmittelpunkt schneiden.

Linien zu ersetzen. Allerdings werden die technischen Schwierigkeiten immer noch groß sein. Eine Ausnahmestellung nehmen diejenigen Flächen ein, die sich so auf die Ebene abbilden lassen, daß die geodätischen Linien in die Geraden der Ebene übergehen. Nach einem Satze von Beltrami besitzen die Flächen mit dieser Eigenschaft konstante Gaußsche Krümmung. Auf der Kugel wird sich also vermittelst der stereographischen Projektion ebenso viel erreichen lassen wie in der Ebene.

(Eingegangen den 19. Dezember 1947.)