

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 22 (1949)  
  
**Artikel:** Eine kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper.  
**Autor:** Szele, T.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19193>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.06.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Eine kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper

Von T. SZELE, Szeged (Ungarn)

Zweck der folgenden Note ist eine wesentliche Verschärfung der beiden bekannten Sätze :

Ist  $R$  ein Ring ohne Nullteiler mit Minimalbedingung für Rechts- und Linksideale, so ist  $R$  ein Schiefkörper<sup>1)</sup>.

In einem kommutativen Ring mit Minimalbedingung ist der Restklassenring nach einem Primideal stets ein Körper und daher jedes Primideal teilerlos<sup>2)</sup>.

Nach *E. Artin* kann im ersten Satz die Minimalbedingung für Rechtsideale entbehrt werden<sup>3)</sup>. Im folgenden soll gezeigt werden, daß man auch anstatt der Minimalbedingung für Linksideale durch bloße Forderung der Existenz eines *minimalen Linksideals* in  $R$  auskommt<sup>4)</sup>. Es gelten nämlich die Sätze :

*Besitzt ein Ring  $R$  ohne Nullteiler ein minimales Linksideal, so ist  $R$  ein Schiefkörper<sup>5)</sup>.*

*Besitzt ein kommutativer Ring  $R$  ein minimales Ideal, so ist der Restklassenring von  $R$  nach einem Primideal stets ein Körper und daher jedes Primideal in  $R$  teilerlos.*

Der zweite Satz ist eine unmittelbare Folge des ersten, denn der Restklassenring nach einem Primideal ist ein Integritätsbereich und hat auch (zugleich mit  $R$ ) offenbar ein minimales Ideal.

---

<sup>1)</sup> Siehe *B. L. van der Waerden*, *Moderne Algebra II* (1940), S. 141.

<sup>2)</sup> Ebenda S. 142.

<sup>3)</sup> Siehe *E. Artin*, *C. J. Nesbitt*, *R. M. Thrall*, *Rings with minimum condition* (University of Michigan Publications in Mathematics Number 1), 1946, S. 59, Theorem 6.10A.

<sup>4)</sup> Unter einem *minimalen* (oder mit anderem Ausdruck: *einfachen*) Linksideal von  $R$  versteht man üblicherweise ein solches Linksideal in  $R$ , welches  $\neq (0)$  ist und kein Linksideal von  $R$  außer sich selbst und  $(0)$  umfaßt. Im kommutativen Falle sprechen wir von einem *minimalen* Ideal schlechthin.

<sup>5)</sup> Daraus folgt: *Ein Ring ist dann und nur dann ein Schiefkörper, falls er nullteilerfrei ist und ein minimales Linksideal besitzt.* Das ist die im Titel angekündigte „kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper“.

Der erste Satz läßt sich folgendermaßen beweisen. Sei  $I$  ein minimales Linksideal in  $R$  und  $c \neq 0$  ein Element von  $I$ . Dann ist  $I \cdot c$  ein Linksideal von  $R$ , für welches nach Voraussetzung  $I \cdot c \subseteq I$ ,  $I \cdot c \neq (0)$ , also  $I \cdot c = I$  gilt. Jedes Element von  $I$  ist demnach in der Gestalt  $x \cdot c$  ( $x \in I$ ) darstellbar, insbesondere auch  $c$  selbst:  $ec = c$  ( $e \in I$ ,  $c \neq 0$ ). Daraus folgt für das beliebige Element  $y \in R$ :

$$(ye - y) \cdot c = yec - yc = 0 ,$$

d. h.  $ye - y = 0$ , da  $R$  keinen Nullteiler hat. Folglich ist  $e$  ein rechts-Einselement in  $R$ . Insbesondere ist  $e^2 = e$ . Dann gilt aber für das beliebige Element  $y \in R$ :

$$e(e y - y) = e^2 y - e y = 0 ,$$

d. h.  $ey - y = 0$ . Somit ist  $e$  auch zugleich ein links-Einselement, also Einselement in  $R$ .

Es muß noch gezeigt werden, daß irgendein Element  $a \neq 0$  von  $R$  ein Linksinverses hat. Statt dessen werden wir mehr, nämlich die Lösbarkeit irgendeiner Gleichung  $xa = b$  in  $R$  beweisen. Es gilt zunächst  $I = R$ , da wegen  $e \in I$ :  $R = Re \subseteq I$  ist. Folglich hat  $R$  nur die beiden (trivialen) Linksideale  $R$  und  $(0)$ . Die Menge  $R \cdot a$  aber ist ein Linksideal in  $R$ , d. h. wegen  $a \neq 0$  ist  $Ra = R$ . Daraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

(Eingegangen den 20. Januar 1948.)