

# Über die Neumannsche Methode zur Konstruktion von Abelschen Integralen.

Autor(en): **Nevanlinna, Rolf**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **22 (1949)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19203>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über die Neumannsche Methode zur Konstruktion von Abelschen Integralen

Von ROLF NEVANLINNA, Zürich

Die folgenden Seiten bringen einige Ergänzungen zu den alternierenden Verfahren von *Neumann*, durch welches er eine einfache und elegante Konstruktion der Abelschen Integrale gab (vgl. seine Darstellung Abelsche Integrale, 2. Auflage, 1884). Die *Neumannsche Methode* ist auch für gewisse Klassen von offenen Flächen anwendbar, die in neueren Untersuchungen über die Funktionentheorie der Riemannschen Flächen eine wichtige Rolle spielen. Unter solchen allgemeinen Voraussetzungen wird dann die *Neumannsche Aufgabe* auf eine Integralgleichung zurückgeführt werden, die durch das Iterationsverfahren einfach allgemein gelöst werden kann.

## § 1. Das Neumannsche Problem

1. Es sei  $F$  eine geschlossene Riemannsche Fläche und  $\alpha$  ein analytischer Rückkehrschnitt, der die Fläche in zwei getrennte Teile  $A$  und  $A'$  zerlegt. In der Nähe von  $\alpha$  ziehe man in  $A$  einen zweiten Rückkehrschnitt  $\beta$ , der ebenfalls  $F$  zerlegt in zwei Teile  $B$  und  $B'$ . Der Durchschnitt  $AB$  ist zweifach zusammenhängend.

Die folgenden Ausführungen gelten auch unter etwas allgemeineren Voraussetzungen :

Erstens ist es nicht notwendig, daß die zerlegenden Kurven  $\alpha$  und  $\beta$  aus je einem geschlossenen Bogen bestehen : sie können aus mehreren geschlossenen Kurvenzügen zusammengesetzt sein. Das Durchschnittsgebiet  $AB$  kann hierbei mehrfach zusammenhängend sein oder sogar in mehrere getrennte Teile zerfallen.

Zweitens sind die folgenden Überlegungen auch für offene Flächen gültig, vorausgesetzt, daß ihre ideale Berandung  $\Gamma$  das harmonische Maß (Kapazität) Null hat. Dieser Umstand ist für gewisse neuere Fragen betreffend Abelsche Integrale auf offenen Flächen von Bedeutung.

2. *Problemstellung.* Im Anschluß an *Neumann* handelt es sich um folgende Aufgabe :

*Es seien  $a(z)$  und  $b(z)$  zwei in jedem Punkt des Gebietes  $A$   $B$  definierte Funktionen, welche harmonisch und eindeutig sind. Es soll eine in  $A$   $B$  eindeutige harmonische Funktion  $f(z)$  konstruiert werden, so daß die Differenzen  $f(z) - a(z) = u(z)$  und  $f(z) - b(z) = v(z)$  im Gebiete  $A$  bzw.  $B$  als eindeutige und beschränkte harmonische Funktionen fortsetzbar sind.*

Falls eine solche Funktion überhaupt existiert, so ist sie bis auf eine additive Konstante wohlbestimmt. Die Differenz von zwei solchen Funktionen ist nämlich auf der ganzen Riemannschen Fläche  $F$  harmonisch und eindeutig. Eine solche Funktion ist aber konstant, sofern  $F$  geschlossen ist. Ist wiederum  $F$  offen, jedoch so, daß ihr Rand  $\Gamma$  von harmonischem Maß Null ist, so gilt derselbe Schluß vermöge der Voraussetzung, daß  $f - a$  und  $f - b$  in  $A$  bzw.  $B$  beschränkt sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die Dirichletintegrale von  $f - a$  und  $f - b$ , erstreckt über die genannten Gebiete, endlich sind.<sup>1)</sup>

## § 2. Zurückführung auf eine Integralgleichung

3. Angenommen es existiere eine Funktion  $f(x)$ , welche den Bedingungen des oben gestellten Problems genügt, sollen zunächst einige notwendige Bedingungen für die gesuchte Lösung aufgestellt werden.

Wir führen zu diesem Zweck das harmonische Maß  $\omega_\alpha(x, z)$  eines Randbogens  $\widehat{x_1 x}$  der Kurve  $\alpha$ , gemessen im inneren Punkt  $z$  von  $A$  in bezug auf dieses Gebiet  $A$ , ein, d. h. diejenige in  $A$  beschränkte harmonische Funktion  $\omega_\alpha$ , welche auf dem Randbogen  $\widehat{x_1 x}$  den Wert 1, auf dem komplementären Randbogen den Wert 0 annimmt. Die Existenz und die Einzigkeit dieser Randwertaufgabe ist durch das Dirichletsche Prinzip und durch das Maximumprinzip garantiert, falls  $A$  kompakt ist. Dasselbe gilt aber auch, wenn die Fläche  $F$  offen und nullberandet ist, in welchem Fall  $A$  nichtkompakt sein kann (vgl. meine oben zitierte Note). Die analoge Bedeutung möge  $\omega_\beta(x, z)$  haben für einen Teilbogen  $\widehat{x_2 x}$  von  $\beta$  in bezug auf das Gebiet  $B$ .

Man hat dann, unabhängig davon, ob  $A$  und  $B$  kompakt oder nichtkompakt sind,

---

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu meine Arbeit „Über das Anwachsen des Dirichletintegrals einer analytischen Funktion auf einer offenen Riemannschen Fläche“ (Annales Acad. Scient. Fennicae, Series A, I. Mathematica-Physica, Nr. 45, 1948).

$$u(z) = \int_{\alpha} u(y) d\omega_{\alpha}(y, z)$$

für jeden inneren Punkt  $z$  von  $A$ , also speziell auf  $\beta$ , und

$$v(x) = \int_{\beta} v(z) d\omega_{\beta}(z, \alpha)$$

für jeden inneren Punkt  $x$  von  $B$ , wo  $u$  und  $v$  die in § 1 eingeführten, nach der gemachten Voraussetzung über die Existenz einer Lösung  $f$  eindeutigen, in  $A$  bzw.  $B$  regulären Potentialfunktionen sind.

Führt man nun im letzten Integral den Wert ein:

$$v(z) = f - b = u + a - b = \int_{\alpha} u(y) d\omega_{\alpha}(y, z) + a - b ,$$

so wird

$$\begin{aligned} v(x) &= u(x) + a(x) - b(x) \\ &= \int_{\beta} \left( \int_{\alpha} u(y) d\omega_{\alpha}(y, z) \right) d\omega_{\beta}(z, x) + \int_{\beta} (a(z) - b(z)) d\omega_{\beta}(z, x) , \end{aligned}$$

also für  $x$  auf  $\alpha$ :

$$u(x) = \int_{\alpha} u(y) d\varphi(y, x) + u_0(x) , \quad (1)$$

wo

$$u_0(x) = \int_{\beta} (a(z) - b(z)) d\omega_{\beta}(z, x) - (a(x) - b(x)) \quad (1')$$

und

$$d\varphi(y, x) = d \int_{\beta} \omega_{\alpha}(y, z) d\omega_{\beta}(z, x) . \quad (1'')$$

Die Funktion  $u_0(x)$  ist gleich der Differenz von  $(b - a)$  und von derjenigen in  $B$  harmonischen beschränkten Funktion, welche auf  $\beta$  mit  $(b - a)$  übereinstimmt. Sie verschwindet also dann und nur dann identisch, wenn  $a - b$  in  $B$  eindeutig fortsetzbar ist.

Die totale Variation der Funktion  $\varphi$ , welche monoton zunimmt, wenn der Punkt  $y$  sich auf  $\alpha$  bewegt, so daß der Bogen  $\widehat{x, y}$  zunimmt, wird (da das harmonische Maß des *ganzen* Bogens  $\alpha$  identisch gleich 1 ist) gleich

$$\int_{\alpha} d\varphi(y, x) = 1 ,$$

unabhängig von  $x$ .

Wir haben so das Resultat :

*Wenn das Problem von § 1 lösbar ist, so genügt die Funktion*

$$u(x) = f(x) - a(x) \quad (2)$$

*der Integralgleichung (1) für jeden Punkt  $x$  auf dem Bogen  $\alpha$ .*

4. Umgekehrt sei  $u(x)$  jetzt, eine beliebige Lösung der Integralgleichung (1).

*Dann existiert eine Lösung  $f(z)$  des Problems von § 1, so daß in jedem Punkt  $x$  auf  $\alpha$  gilt*

$$u(x) = f(x) - a(x) .$$

In der Tat hat die durch den Ausdruck

$$f(z) = a(z) + \int_{\alpha} u(x) d\omega_{\alpha}(x, z) \quad (3)$$

definierte Funktion  $f(z)$  alle in § 1 geforderten Eigenschaften. Denn die Differenz  $f(z) - a(z)$  ist gleich derjenigen in  $A$  beschränkten Potentialfunktion, die auf dem Rand  $\alpha$  die Werte  $u(x)$  annimmt, und diese Differenz ist also, was verlangt wurde, im ganzen Gebiet  $A$  regulär harmonisch fortsetzbar. Zweitens läßt sich die Differenz  $f - b$  in  $B$  als eine beschränkte eindeutige Potentialfunktion fortsetzen.

Um diese letzte Behauptung zu beweisen, bemerke man, daß die Differenz  $f - b$  im Durchschnittsgebiet  $AB$  als eine harmonisch reguläre Funktion gegeben ist. Wir behaupten, daß das Integral

$$v(\xi) = \int_{\beta} (f(z) - b(z)) d\omega_{\beta}(z, \xi) , \quad (4)$$

welches in  $B$  als eine beschränkte, reguläre Potentialfunktion definiert ist, die harmonische Fortsetzung von  $f - b$  im Gebiet  $B$  gibt. Um dies einzusehen, genügt es nachzuweisen, daß die Gleichheit  $f - b = v$  in jedem Punkt des Gebietes  $AB$  besteht. Dies ist aber sicher dann der Fall, wenn diese Gleichheit auf dem Rand  $\alpha + \beta$  von  $AB$  in Kraft ist. Nun ist aber offenbar  $v = f - b$  auf  $\beta$ , denn  $v$  ist nichts anderes als die mittels der Randwerte  $f - b$  auf  $\beta$  bestimmte, in  $B$  reguläre Potentialfunktion. Also genügt es zu zeigen, daß  $f - b = v$  auch auf dem Bogen  $\alpha$  gilt.

Sei also jetzt  $y$  ein Punkt auf  $\alpha$ . Setzt man dann  $\xi = y$  in (4) und führt man hier den Wert (3) von  $f$  ein, so wird

$$v(y) = \int_{\alpha} u(x) d\varphi(x, y) + \int_{\beta} (a(z) - b(z)) d\omega_{\beta}(z, y) .$$

Da nun  $u$  der Integralgleichung (1) genügt, so ist dieser Ausdruck gleich  $u(y) + a(y) - b(y)$ , woraus die Behauptung folgt.

5. Das Neumannsche Problem ist so auf die Auflösung der Integralgleichung (1) zurückgeführt: die Lösungen  $f(z)$  des ersten Problems und die Lösungen  $u(x)$  des zweiten Problems entsprechen einander eindeutig, und wir haben oben die Formeln angegeben, welche die eine dieser Lösungen zu berechnen erlauben, wenn die andere Lösung bekannt ist.

### § 3. Lösung der Integralgleichung

6. Wir werden jetzt die Integralgleichung

$$u(x) = \int_{\alpha} u(y) d\varphi(y, x) + u_0(x) \tag{A}$$

näher studieren. Oben wurden  $x$  und  $y$  als Punkte einer Kurve  $\alpha$  auf der gegebenen Riemannschen Fläche interpretiert. Wir können aber die Punkte der Kurve  $\alpha$  mit Hilfe eines im Intervall  $(0, 1)$  veränderlichen Parameters  $t$  darstellen und dann in (1) die Veränderlichen  $x, y$  mit diesem Parameter identifizieren. Ohne Bezugnahme auf die vorliegende potentialtheoretische Aufgabe soll die Integralgleichung (A) jetzt gelöst werden, wobei wir folgende Voraussetzungen zugrunde legen:

1)  $u_0(x)$  ist im Intervall  $\alpha: (0 \leq x \leq 1)$  eine stetige oder mindestens integrable Funktion.

2) Der Kern ist im Quadrat  $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$  definiert als eine monotone Funktion von  $y$ , so daß für jedes  $x$

$$\int_{y=0}^1 d\varphi(y, x) = \varphi(1, x) - \varphi(0, x) = 1 .$$

Ferner werden sich einige Stetigkeitseigenschaften von  $\varphi$  als notwendig erweisen. Wir setzen voraus:

3) Die partielle Ableitung  $\varphi_y(y, x)$ , die wegen der vorausgesetzten Monotonie von  $\varphi$  fast überall existiert und nichtnegativ ist, soll für  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  stetig und positiv sein.

Alle Bedingungen 1, 2, 3 sind bei dem vorliegenden potentialtheoretischen Problem wegen der Voraussetzungen von Nr. 1 und 2 reichlich erfüllt.

7. Mittels fortgesetzter Iteration ergibt sich aus (1) die äquivalente Integralgleichung

$$u(x) = \int_{y=0}^1 u(y) d\varphi^{n+1}(y, x) + u_n(x), \quad (\text{A}')$$

wo der iterierte Kern  $\varphi^{n+1}$  durch die Rekursionsformel

$$\varphi^{i+1}(y, x) = \int_{t=0}^1 \varphi^i(y, t) d\varphi(t, x) \quad (i = 1, 2, \dots; \varphi^1 = \varphi) \quad (4)$$

bestimmt ist, während

$$u_n(x) = u_0(x) + \int_{y=0}^1 u_0(y) d\Phi^n(y, x) \quad (5)$$

mit

$$\Phi^n(y, x) = \sum_{i=1}^n \varphi^i(y, x).$$

8. Um den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  vorzubereiten, setze man

$$M_n(y) = \max \varphi_y^n(y, x), \quad m_n(x) = \min \varphi_y^n(y, x)$$

für  $0 \leq x \leq 1$ . Es ist nach (4) und wegen der Voraussetzung 2)

$$m_1(y) \leq m_2(y) \leq \dots; \quad M_1(y) \geq M_2(y) \geq \dots$$

Wir behaupten, daß

$$M_n(y) - m_n(y) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gleichmäßig in  $y$  gilt.

In der Tat hat  $\varphi_y(y, x)$  ein positives Minimum  $m$  und ein endliches Maximum  $M$  im ganzen Quadrat  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ :

$$0 \leq m \leq m_1(y) \leq M_1(y) \leq M < \infty.$$

Somit ist für jedes Wertepaar  $x_1, x_2$  und für jedes  $y$

$$\frac{m}{M} \leq \frac{d\varphi(y, x_1)}{d\varphi(y, x_2)} \leq \frac{M}{m}.$$

Nach dieser Vorbereitung schreiben wir, mit Rücksicht auf 2)

$$M_n(y) - \varphi_y^{n+1}(y, x) = \int_{t=0}^1 (M_n(y) - \varphi_y^n(y, t)) d\varphi(t, x)$$

und fixieren, für ein gegebenes  $y$ , zwei Werte  $x_1$  und  $x_2$ , für welche der Ausdruck  $\varphi_y^{n+1}(y, x)$  sein Maximum bzw. sein Minimum erreicht :

$$\varphi_y^{n+1}(y, x_1) = M_{n+1}(y) , \quad \varphi_y^{n+1}(y, x_2) = m_{n+1}(y) .$$

Es wird dann, unter Beachtung der obigen Ungleichung

$$\begin{aligned} M_n(y) - M_{n+1}(y) &= \int_{t=0}^1 (M_n(y) - \varphi_y^n(y, t)) d\varphi(t, x_1) \\ &= \int (M_n(y) - \varphi_y^n(y, t)) \frac{d\varphi(t, x_1)}{d\varphi(t, x_2)} d\varphi(t, x_2) \\ &\geq \int (M_n(y) - \varphi_y^n(y, t)) \frac{m}{M} \cdot d\varphi(t, x_2) \\ &= \frac{m}{M} (M_n(y) - m_{n+1}(y)) . \end{aligned}$$

Ähnlich ergibt sich für die Funktion

$$\varphi_y^{n+1}(y, x) - m_n(y) = \int_{t=0}^1 (\varphi_y^n(y, t) - m_n(y)) d\varphi(t, x) ,$$

wenn  $x = x_2$  gesetzt wird

$$\begin{aligned} m_{n+1}(y) - m_n(y) &= \int_{t=0}^1 (\varphi_y^n(y, t) - m_n(y)) \frac{d\varphi(t, x_2)}{d\varphi(t, x_1)} d\varphi(t, x_1) \\ &\geq \frac{m}{M} \int (\varphi_y^n(y, t) - m_n(y)) d\varphi(t, x_1) \\ &= \frac{m}{M} (M_{n+1}(y) - m_n(y)) . \end{aligned}$$

Die Addition der erhaltenen Ungleichungen gibt

$$\begin{aligned} (M_n(y) - m_n(y)) - (M_{n+1}(y) - m_{n+1}(y)) &\geq \\ &\frac{m}{M} (M_{n+1}(y) - m_{n+1}(y)) + (M_n(y) - m_n(y)) , \end{aligned}$$

also



$$M_{n+1}(y) - m_{n+1}(y) \leq \frac{M - m}{M + m} \cdot (M_n(y) - m_n(y))$$

und schließlich

$$M_{n+1}(y) - m_{n+1}(y) \leq q^n (M_1(y) - m_1(y)) \leq q^n (M - m),$$

wo

$$0 \leq q = \frac{M - m}{M + m} < 1.$$

9. Es ist somit  $M_n(y) - m_n(y) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , und daraus folgt die Existenz des Grenzwerts

$$\lim \varphi_y^n(y, x) = \varphi'(y) \quad (m \leq \varphi'(y) \leq M)$$

gleichmäßig im Quadrat  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Ferner ist

$$|\varphi_y^n(y, x) - \varphi'(y)| \leq M_n(y) - m_n(y) \leq q^{n-1} (M - m), \quad (6)$$

und gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(y, x) = \varphi(y) \equiv \int_0^y \varphi'(t) dt.$$

10. Wir kehren nun zu der in Nr. 7 eingeführten Summe  $\Phi^n(y, x)$  zurück und setzen

$$\psi^n(y, x) = \Phi^n(y, x) - n \varphi(y) = \sum_1^n (\varphi^n(y, x) - \varphi(y)).$$

Wegen (6) existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_y^n(y, x) = \psi_y(y, x)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(y, x) = \psi(y, x)$$

gleichmäßig, und es ist

$$\psi(y, x) = \sum_1^\infty (\varphi^n(y, x) - \varphi(y)).$$

11. Nunmehr ergibt sich die Auflösung der Integralgleichung sofort. Um zunächst eine notwendige Bedingung für die zu suchenden Lösungen  $u$  anzugeben, nehmen wir an,  $u(x)$  sei eine integrierbare Lösung der Inte-

gralgleichung (A) und somit auch der Gleichung (A'). In dem Ausdruck (5) führt man den Wert

$$\Phi^n = \Psi^n + n \varphi(y)$$

ein, und erhält so

$$u(x) = u_0(x) + \int u_0(y) d\Psi^n(y, x) + n \int u_0(y) dy \\ + \int u(y) d\varphi(y) + \int u(y) d(\varphi^{n+1}(y, x) - \varphi(y)) .$$

Durch den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  folgt dann, daß

$$n \int u_0(y) d\varphi(y) \rightarrow u(x) - \int u_0(y) d\Psi(y, x) - u_0(x) - \int u(y) d\varphi(y) ,$$

woraus, da rechts eine von  $n$  unabhängige Zahl steht

$$\int_{y=0}^1 u_0(y) d\varphi(y) = 0 . \quad (7)$$

*Jede integrable Lösung  $u(x)$  der Integralgleichung (A) genügt der Bedingung (7) und muß notwendig die Form*

$$u(x) = u_0(x) + \int_{y=0}^1 u_0(y) d\Psi(y, x) + C \quad (8)$$

haben, wo  $C$  konstant ist.

**12.** Umgekehrt ist jede Funktion  $u$  welche durch (8) gegeben ist, eine Lösung der Integralgleichung. Durch Einsetzen von (8) in die rechte Seite von (A) findet man nämlich den Ausdruck

$$u_0(x) + C + \int u_0(y) d\varphi(y, x) + \int \int u_0(t) \Psi_t(t, y) \varphi_v(y, x) dt dy .$$

Hier ist

$$\int \Psi_t(t, y) \varphi_v(y, x) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y=0}^1 (\varphi_t^n(t, y) - \varphi_t(t)) \varphi_v(y, x) dy \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_t^{n+1}(t, x) - \varphi_t(t)) \\ = \Psi_t(t, x) - (\varphi_t(t, x) - \varphi_t(t)) ,$$

und also

$$\int \int u_0(t) \Psi_t(t, y) \varphi_v(y, x) dt dy = \int u_0(t) d\Psi(t, x) \\ - \int u_0(t) d\varphi(t, x) + \int u_0(t) d\varphi(t) .$$

Das letzte Glied hat wegen (7) den Wert Null. Für die rechte Seite der Gleichung (A) ergibt sich also der Ausdruck

$$u_0(x) + \int u_0(t) d\Psi(t, x) + C ,$$

also nichts anderes als  $u(x)$ , w. z. b. w.

**13.** Es gilt somit der Satz :

Sei  $\varphi(y, x)$  eine im Quadrat  $Q : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  gegebene stetige Funktion von der Art, daß die partielle Ableitung  $\varphi_y(y, x)$  stetig und positiv ist und daß für alle Werte  $0 \leq x \leq 1$

$$\int_{y=0}^1 d\varphi(y, x) = \varphi(1, x) - \varphi(0, x) = 0 .$$

Unter diesen Voraussetzungen hat die Integralgleichung

$$u(x) = u_0(x) + \int_{y=0}^1 u(y) d\varphi(y, x) ,$$

wo  $u_0(x)$  eine integrable Funktion ist, als einzige integrable Lösung

$$u(x) = u_0(x) + \int_{y=0}^1 u_0(y) d\Psi(y, x) + \text{const.} , \quad (9)$$

wo der lösende Kern  $\Psi(y, x)$  durch die im Quadrat  $Q$  gleichmäßig konvergente Reihe

$$\Psi(y, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi^n(y, x) - \varphi(y)) \quad (9')$$

dargestellt wird und  $\varphi(y)$  der ebenfalls gleichmäßig existierende Grenzwert

$$\varphi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(y, x)$$

ist, vorausgesetzt, daß die gegebene Funktion  $u_0(x)$  der Gleichung

$$\int_{x=0}^1 u_0(x) d\varphi(x) = 0$$

genügt.

#### § 4. Lösung des Neumannschen Problems

**14.** Wir gehen zurück zu dem Neumannschen Problem. Nach den Resultaten von § 2, 3 besitzt dieses Problem eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte Lösung dann und nur dann, wenn die Bedingung (7) erfüllt ist. Im Anschluß an Neumann soll nun eine äqui-

valente, sich direkter auf die gegebenen Funktionen  $a$  und  $b$  beziehende Bedingung hergeleitet werden.

Die folgenden Betrachtungen beruhen wesentlich auf nachstehender Bemerkung :

*Wenn die Potentialfunktion  $u$  im Gebiet  $A$  regulär, eindeutig und beschränkt ist, so ist der totale Zuwachs ihrer (nicht notwendig eindeutigen) konjugierten Funktion  $\bar{u}$  auf dem Rand  $\alpha$  gleich Null :*

Falls  $A$  kompakt ist, so ist die Behauptung wegen der Eindeutigkeit des Differentials  $d\bar{u}$  evident. Ist wiederum  $A$  nichtkompakt, so ergibt sich die Behauptung unter Berücksichtigung der Voraussetzung, daß die Fläche  $F$ , auf welcher  $A$  liegt, einen Nullrand hat<sup>2)</sup>.

Dieser Hilfssatz bleibt auch dann richtig, wenn man die Kurven  $\alpha$  mit einem System von endlich vielen, punktfremden Kurven  $\gamma$  ersetzt, so daß jede geschlossene Teilkurve von  $\gamma$  ein (kompaktes oder nichtkompaktes) Teilgebiet von  $A$  begrenzt, welches an die Rundkurve  $\alpha$  grenzt.

Es ist evident, daß dieser Hilfssatz auch im Gebiet  $B$  verwendet werden kann.

15. Nehmen wir wieder für einen Augenblick an, daß das *Neumannsche* Problem eine Lösung  $f(z)$  hat. Der obige Hilfssatz ergibt dann, wenn man ihn einmal auf die Funktion  $f - a$  im Gebiet  $A$ , das andere Mal auf die Funktion  $f - b$  im Gebiet  $B - AB$  anwendet, die Gleichungen

$$\int_{\alpha} d(\bar{f} - \bar{a}) = \int_{\alpha} d(\bar{f} - b) = 0 ,$$

und man erhält hieraus durch Subtraktion

$$\int_{\alpha} d(\bar{a} - \bar{b}) = 0 . \quad (10)$$

Diese notwendigen Bedingungen kann man auch so aussprechen, daß die analytische Funktion

$$(a - b) + i(a - b)$$

den Zuwachs Null erhält, wenn man die Kurve  $\alpha$  einmal durchläuft.

Da nun andererseits nach den §§ 2 und 3 das *Neumannsche* Problem dann sicher lösbar ist, falls die „Orthogonalitätsbedingung“

$$\int_{\alpha} u_0(y) d\varphi(y) = 0 \quad (11)$$

---

<sup>2)</sup> Vgl. meine Arbeit „Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit“, Ann. Acad. Scient. Fenn., Ser. A I. Mathematica Physica, Nr. 1, 1941.

besteht, so sieht man, daß diese letztere Bedingung die oben gefundene notwendige Bedingung (10) impliziert. Tatsächlich sind diese Bedingungen *äquivalent*, denn umgekehrt folgt die Gleichung (11) aus (10), was jetzt bewiesen werden soll, wieder im Anschluß an die klassische Neumannsche Methode, die im vorliegenden Fall noch anwendbar ist.

16. Vorausgesetzt, daß die Bedingung (10) erfüllt ist, gilt es also nachzuweisen, daß auch die Gleichung (11) besteht. Da nun die Beziehung

$$\int_{\alpha} u_0(y) d\varphi^n(y, x) \rightarrow \int_{\alpha} u_0(y) d\varphi(y)$$

gleichmäßig für jedes  $x$  auf  $\alpha$  gilt, so genügt es zu zeigen, daß die Funktion

$$\int_{\alpha} u_0(y) d\varphi^n(y, x) = 0, \quad (12)$$

für mindestens einen Punkt  $x$  der Kurve  $\alpha$ . Daß das Bestehen der Gleichung (10) diese letzte Eigenschaft zur Folge hat beweist man in leichter Verallgemeinerung der Beweisidee von *Neumann* wie folgt:

17. Man konstruiere im Gebiet  $AB$  diejenige harmonische Funktion  $\omega(z)$ , welche auf  $\alpha$  gleich 1, auf  $\beta$  gleich Null ist. Die konjugierte harmonische Funktion sei  $\bar{\omega}(z)$ .

Ist nun  $U(z)$  eine beliebige, in  $AB$  eindeutige Potentialfunktion und  $\bar{U}$  ihre konjugierte Funktion, so ist der totale Zuwachs von  $\bar{U}$  auf dem Rand des Gebietes  $0 \leq \omega \leq \lambda$  ( $\lambda \leq 1$ ) gleich Null, und es wird

$$\int_{\omega=\lambda} \frac{\partial U}{\partial n} d\bar{\omega} = \int_{\omega=\lambda} d\bar{U} = \int_{\alpha} d\bar{U} = \text{const.}$$

für alle Werte  $\lambda$  des Intervalls  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir die Funktionsfolge

$$u_0(z), \quad v_0(z), \quad u_1(z), \quad v_1(z), \dots,$$

wo  $u_0(z)$  die frühere Bedeutung (1') hat und

$$v_n(z) = \int_{\alpha} u_n(x) d\omega_{\alpha}(x, z), \quad u_{n+1}(z) = \int_{\beta} v_n(y) d\omega_{\beta}(y, z) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (13)$$

Es ist offenbar

$$u_n(z) = \int_{\alpha} u_0(x) d\varphi^n(x, z) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (14)$$

Die Funktionen  $v_n$  sind alle in  $A$ , die Funktionen  $u_n$  alle in  $B$  als eindeutige, reguläre und beschränkte Potentialfunktionen definiert.

Wir betrachten jetzt den Mittelwert

$$m(\lambda, U) = \int_{\omega=\lambda} U(z) d\bar{\omega}(z) \quad (d\bar{\omega} \geq 0)$$

für alle Funktionen  $U = u_n, v_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Nach dem obigen Hilfssatz ist

$$m'(\lambda) = \int_{\omega=\lambda} \frac{\partial U}{\partial n} d\bar{\omega} = \int_{\omega=\lambda} d\bar{U} = 0$$

für  $0 \leq \lambda \leq 1$  und für sämtliche Funktionen  $U = v_0, u_1, v_2, \dots$ , die ja entweder in  $A$  oder in  $B$  eindeutig, regulär und beschränkt sind. Dasselbe gilt aber auch für die erste Funktion  $U = u_0$ :

$$u_0(z) = \int_{\beta} (a(x) - b(x)) d\omega_{\beta}(x, z) - (a(z) - b(z)) ,$$

nämlich für das Integral rechts, weil es ebenfalls eine in  $B$  reguläre, beschränkte Potentialfunktion darstellt, für das zweite Glied  $(a - b)$  wiederum vermöge der Voraussetzung (10).

Der Mittelwert  $m$  ist also für jede der betrachteten Funktionen  $U$  konstant im Intervall  $(0 \leq \lambda \leq 1)$ , und speziell wird

$$m(0, U) = m(1, U) .$$

Nun ist aber gemäß (13)  $v_n = u_n$  auf  $\alpha$  und  $u_{n+1} = v_n$  auf  $\beta$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), also

$$m(1, u_n) = m(0, v_n) , \quad m(0, u_{n+1}) = m(1, v_n) .$$

Schließlich ist  $u_0(z) = 0$  auf  $\beta$ , somit  $m(1, u_0) = 0$ , und folglich

$$m(\lambda, u_n) = m(\lambda, v_n) = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq 1; n = 0, 1, \dots) .$$

Die Gleichung

$$0 = m(1, u_n) = \int_{\alpha} u_n d\bar{\omega}_n$$

spricht nun aus, daß der Mittelwert der Funktion (12), die ja nach (13) mit  $u_n$  identisch ist, verschwindet, und hieraus folgt, daß es auf  $\alpha$  min-

destens einen Punkt  $x$  gibt, wo das Integral (11) gleich Null wird. Dies hat aber, wie in Nr. 15 gezeigt wurde, das Verschwinden des Grenzwerts (10) zur Folge, w. z. b. w.

Zusammenfassend ergibt sich hieraus :

*Das Neumannsche Problem hat dann und nur dann eine Lösung, wenn die gegebenen Funktionen  $a$  und  $b$  der Bedingung (10) genügen.*

18. Es ist nicht ohne Interesse zu sehen, in welcher Form die Lösung  $f(z)$  des Neumannschen Problems durch die gegebenen Funktionen  $a(z)$  und  $b(z)$  ausgedrückt wird. Zunächst hat man dann im Gebiet  $AB$  nach Nr. 3

$$f(z) = a(z) + \int_{\alpha} u(x) d\omega_{\alpha}(x, z) .$$

Führt man hier die Werte von  $u$  (Formel (9)) und von  $u_0(x)$  (vgl. (1')) ein, so wird, nach einigen leichten Umformungen

$$\begin{aligned} f(z) = a(z) + \int_{\alpha} (a(x) - b(x)) d\Omega_1(x, z) \\ + \int_{\beta} (a(y) - b(y)) d\Omega_2(y, z) + \text{const.} , \end{aligned} \quad (15)$$

wo die Kerne  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  durch die geometrische Konfiguration  $(F, A, B)$  allein bestimmt ist; es ist leicht, die expliziten Ausdrücke für diese Kerne vermittels der harmonischen Masse  $\omega_{\alpha}$  und  $\omega_{\beta}$  anzugeben.

Die obige Formel enthält also, sobald die singulären Bestandteile  $a$  und  $b$  beliebig, jedoch so, daß die Bedingung (10) erfüllt ist, vorgegeben sind, die allgemeine Lösung des Neumannschen Problems.

19. Dieses Resultat gestattet eine interessante Anwendung auf die Theorie der automorphen Funktionen. Falls  $\Sigma$  eine von endlich oder unendlich vielen linearen Transformationen erzeugte Gruppe ist, die ein Gebiet  $G$  der  $z$ -Ebene als Fundamentalgebiet hat, so nenne ich  $\Sigma$  eine Nullgruppe, wenn die durch Identifikation der äquivalenten Randpunkte von  $G$  hergestellte Riemannsche Fläche entweder geschlossen ist oder einen Nullrand hat. Mit Hilfe der Fundamentaltransformationen der Gruppe  $\Sigma$  allein kann man nun die lösenden Kerne  $\Omega_1, \Omega_2$  des Neumannschen Problems für  $G$  herstellen, wobei man die Kurven  $\alpha$  und  $\beta$  zum Beispiel als zwei konzentrische Kreise in  $G$  wählen kann. Die obige Formel liefert dann, bei beliebiger Wahl der singulären Bestandteile  $a$  und  $b$  in  $G$ ,

sobald die Bedingung (10) erfüllt ist, den allgemeinen Ausdruck für ein automorphes Potential, welches die durch  $a$  und  $b$  vorgegebenen Singularitäten besitzt. Ist speziell das Geschlecht der Nullgruppe  $\Sigma$  gleich Null, und wählt man  $a = 0$  und  $b$  als die Funktion  $\frac{1}{z - z_0}$ , wo  $z_0$  ein innerer Punkt von  $G$  ist, so erhält man aus (15) einen Ausdruck für den Realteil der einfachsten, in bezug auf die Gruppe  $\Sigma$  automorphen Funktion. Sie ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt durch den Pol  $z_0$ , sofern ihr Dirichletintegral, erstreckt über das ganze Fundamentalbereich  $G$ , woraus ein kleiner Kreis um den Pol  $z = z_0$  auszuschließen ist, endlich ist.

(Eingegangen den 11. Juni 1948.)