

Sur une décomposition de la droite.

Autor(en): **Sierpinski, Waclaw**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **22 (1949)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19204>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur une décomposition de la droite

Par WACLAW SIERPIŃSKI, Varsovie

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une décomposition de la droite en 2^{\aleph_0} ensembles disjoints de puissance 2^{\aleph_0} , tels que toute translation le long de la droite transforme chacun de ces ensembles en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.*

Démonstration. Soit X l'ensemble de tous les nombres réels. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une suite transfinie du type Ω ,

$$x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega) \quad (1)$$

formée de tous les nombres (distincts) de l'ensemble X .

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\alpha\}_{\alpha < \Omega}$ comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal tel que $1 < \alpha < \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres p_ξ , où $\xi < \alpha$.

L'ensemble P_α de tous les nombres

$$p_\xi \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \dots \pm x_{\xi_n},$$

où $\xi < \alpha$ et $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ (où n est un nombre naturel quelconque) est au plus dénombrable (puisque $\alpha < \Omega$): il existe donc des nombres $x_\xi \in X - P_\alpha$; nous désignerons par p_α le premier terme de la suite (1) qui est un tel nombre x_ξ .

La suite transfinie $\{p_\alpha\}_{\alpha < \Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie, et, comme on voit sans peine, tous leur termes sont distincts.

Soit Z l'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \Omega$. Comme $\aleph_1^2 = \aleph_1$, il existe une décomposition de l'ensemble Z en \aleph_1 ensembles disjoints de puissance \aleph_1 , soit $Z = \sum_{\lambda < \Omega} Z_\lambda$. Désignons maintenant, pour $\lambda < \Omega$, par E_λ l'ensemble de tous les nombres

$$p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \dots \pm x_{\xi_n},$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$. Les ensembles E_λ sont évidemment de puissance \aleph_1 pour $\lambda < \Omega$. Je dis que

$$E_\lambda E_\mu = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda < \Omega, \quad \mu < \Omega, \quad \lambda \neq \mu. \quad (2)$$

En effet, si $p \in E_\lambda E_\mu$, on aurait

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \dots \pm x_{\xi_n} \quad (3)$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$ et

$$p = p_\beta \pm x_{\eta_1} \pm x_{\eta_2} \pm \dots \pm x_{\eta_m}, \quad (4)$$

où $\eta_i < \beta$ pour $i = 1, 2, \dots, m$ et $\beta \in Z_\mu$.

Comme $\lambda \neq \mu$, on a $Z_\lambda Z_\mu = 0$, donc, vu que $\alpha \in Z_\lambda$, $\beta \in Z_\mu$, on a $\alpha \neq \beta$. Si $\alpha < \beta$, (3) et (4) donnent :

$$p_\beta = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \dots \pm x_{\xi_n} \mp x_{\eta_1} \mp x_{\eta_2} \mp \dots \mp x_{\eta_m},$$

où $\xi_i < \alpha < \beta$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et $\eta_i < \beta$ pour $i = 1, 2, \dots, m$, ce qui contredit à la définition du nombre p_β .

Si $\alpha > \beta$, on trouve

$$p_\alpha = p_\beta \pm x_{\eta_1} \pm x_{\eta_2} \pm \dots \pm x_{\eta_m} \mp x_{\xi_1} \mp x_{\xi_2} \mp \dots \mp x_{\xi_n},$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et $\eta_i < \beta < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, m$, ce qui contredit à la définition du nombre p_α .

La formule (2) est ainsi établie. Les ensembles E_λ ($\lambda < \Omega$) sont ainsi disjoints.

Je dis qu'on a pour tout a réel

$$\overline{\overline{E_\lambda(a) - E_\lambda}} \leq \aleph_0 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{E_\lambda - E_\lambda(a)}} \leq \aleph_0, \quad (5)$$

où, généralement, $H(a)$ désigne la translation de l'ensemble linéaire H (le long de la droite) de longueur a . Vu la définition de la suite transfinie (1), il existe pour le nombre réel a un nombre ordinal $\nu < \Omega$, tel que $a = x_\nu$. Si $p \in E_\lambda(a) - E_\lambda$, on a $p \in E_\lambda(a)$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \dots \pm x_{\xi_n} + x_\nu, \quad (6)$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$.

S'il était $\alpha > \nu$, il résulterait de (6) et de la définition de l'ensemble E_λ que $p \in E_\lambda$, contrairement à l'hypothèse que $p \in E_\lambda(a) - E_\lambda$. On a donc

$\alpha \leq \nu$. Or, l'ensemble de tous les nombres (6), où $\alpha \leq \nu$ est au plus dénombrable. La première des inégalités (5) est ainsi établie.

Si $p \in E_\lambda - E_\lambda(a)$, on a $p \in E_\lambda$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n}, \quad (7)$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et $\alpha \in Z_\lambda$.

Si $\alpha > \nu$, on aurait, d'après (7) et la définition de l'ensemble E_λ :

$$p - x_\nu \in E_\lambda, \quad \text{ce qui donne tout de suite: } p \in E_\lambda(x_\nu),$$

contrairement à l'hypothèse que $p \in E_\lambda - E_\lambda(a)$. On a donc $\alpha \leq \nu$ et on en déduit que l'ensemble des nombres (7) est au plus dénombrable. La deuxième des inégalités (5) est ainsi établie.

Chacun des ensembles $E_\lambda (\lambda < \Omega)$ est donc transformé par toute translation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.

Posons encore $E = X - \sum_{\lambda < \Omega} E_\lambda$.

Soit, pour un nombre ordinal $\nu < \Omega$, $p \in E - E(x_\nu)$. On a donc, pour un nombre ordinal $\lambda < \Omega$, $p - x_\nu \in E_\lambda$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} + x_\nu, \quad (8)$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et $\alpha \in Z_\lambda$.

Si $\alpha > \nu$, on trouve, d'après (8) et d'après la définition de l'ensemble E_λ , $p \in E_\lambda$, contrairement à $p \in E$. On a donc $\alpha \leq \nu$. Or, l'ensemble de tous les nombres (8), où $\alpha \leq \nu$ est au plus dénombrable. On a donc

$$\overline{\overline{E - E(x_\nu)}} \leq \aleph_0.$$

Soit maintenant $p \in E(x_\nu) - E$. On a donc pour un nombre ordinal $\lambda < \Omega$: $p \in E_\lambda$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n}, \quad (9)$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et $\alpha \in Z_\lambda$ d'où

$$p - x_\nu = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} - x_\nu,$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$.

Si l'on avait $\alpha > \nu$, on aurait donc $p - x_\nu \in E_\lambda$, d'où $p - x_\nu \in \overline{E}$, ce qui donne $p \in \overline{E}(x_\nu)$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $\alpha \leq \nu$. L'ensemble de tous les nombres (9), où $\alpha \leq \nu$ étant au plus dénom-

brable, on trouve $\overline{\overline{\overline{E(x_\nu) - E}}} \leq \aleph_0$.

Toute translation de l'ensemble E ne diffère donc de E que d'un ensemble au plus dénombrable de points.

Nous pouvons évidemment adjoindre E à l'ensemble E_1 sans altérer la propriété de ce dernier (d'être de puissance 2^{\aleph_0} et de ne différer de ses translations que d'un ensemble au plus dénombrable de points). $X = (E + E_1) + \sum_{1 < \lambda < \aleph} E_\lambda$ donne donc la décomposition de la droite satisfaisant aux conditions de notre théorème qui se trouve ainsi démontré.

En modifiant un peu notre démonstration, on pourrait démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu la proposition suivante :

Il existe une décomposition de la droite en 2^{\aleph_0} ensembles disjoints de puissance 2^{\aleph_0} tels que toute translation transforme chacun de ces ensembles en lui-même, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu.

Il est à remarquer que en 1932 *S. Banach* a démontré que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe sur la circonférence un ensemble non mesurable qui est transformé par chaque rotation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points¹⁾.

(Reçu le 15 juillet 1948.)

¹⁾ *Fundamenta Mathematicae* **19**, p. 15.