Sur une décomposition de la droite

Par WACLAW SIERPIŃSKI, Varsovie

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une décomposition de la droite en* $2^{\aleph_0}$ *ensembles disjoints de puissance* $2^{\aleph_0}$, *tels que toute translation le long de la droite transforme chacun de ces ensembles en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.*

Démonstration. Soit X l'ensemble de tous les nombres réels. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une suite transfinie du type Ω,

$$x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega) \tag{1}$$

formée de tous les nombres (distincts) de l'ensemble X.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal tel que $1 < \alpha < \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres p_ξ, où $\xi < \alpha$.

L'ensemble P_α de tous les nombres

$$p_\xi \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n},$$

où $\xi < \alpha$ et $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ (où n est un nombre naturel quelconque) est au plus dénombrable (puisque $\alpha < \Omega$) : il existe donc des nombres $x_\xi \in X - P_\alpha$; nous désignerons par p_α le premier terme de la suite (1) qui est un tel nombre x_ξ.

La suite transfinie $\{p_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie, et, comme on voit sans peine, tous leur termes sont distincts.

Soit Z l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\Omega$. Comme $\aleph_1^2 = \aleph_1$, il existe une décomposition de l'ensemble Z en $\aleph_1$ ensembles disjoints de puissance $\aleph_1$, soit $Z = \sum_{\lambda<\Omega} Z_\lambda$. Désignons maintenant, pour $\lambda < \Omega$, par E_λ l'ensemble de tous les nombres

$$p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n},$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$. Les ensembles E_λ sont évidemment de puissance $\aleph_1$ pour $\lambda < \Omega$. Je dis que

$$E_\lambda E_\mu = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda < \Omega, \ \mu < \Omega, \ \lambda \neq \mu . \tag{2}$$

En effet, si $p \in E_\lambda E_\mu$, on aurait

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} \tag{3}$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$ et

$$p = p_\beta \pm x_{\eta_1} \pm x_{\eta_2} \pm \cdots \pm x_{\eta_m}, \tag{4}$$

où $\eta_i < \beta$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$ et $\beta \in Z_\mu$.
Comme $\lambda \neq \mu$, on a $Z_\lambda Z_\mu = 0$, donc, vu que $\alpha \in Z_\lambda$, $\beta \in Z_\mu$, on a $\alpha \neq \beta$. Si $\alpha < \beta$, (3) et (4) donnent:

$$p_\beta = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} \mp x_{\eta_1} \mp x_{\eta_2} \mp \cdots \mp x_{\eta_m},$$

où $\xi_i < \alpha < \beta$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et $\eta_i < \beta$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$, ce qui contredit à la définition du nombre p_β.

Si $\alpha > \beta$, on trouve

$$p_\alpha = p_\beta \pm x_{\eta_1} \pm x_{\eta_2} \pm \cdots \pm x_{\eta_m} \mp x_{\xi_1} \mp x_{\xi_2} \mp \cdots \mp x_{\xi_n},$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et $\eta_i < \beta < \alpha$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$, ce qui contredit à la définition du nombre p_α.

La formule (2) est ainsi établie. Les ensembles E_λ $(\lambda < \Omega)$ sont ainsi disjoints.

Je dis qu'on a pour tout a réel

$$\overline{\overline{E_\lambda(a) - E_\lambda}} \leq \aleph_0 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{E_\lambda - E_\lambda(a)}} \leq \aleph_0 , \tag{5}$$

où, généralement, $H(a)$ désigne la translation de l'ensemble linéaire H (le long de la droite) de longueur a. Vu la définition de la suite transfinie (1), il existe pour le nombre réel a un nombre ordinal $\nu < \Omega$, tel que $a = x_\nu$. Si $p \in E_\lambda(a) - E_\lambda$, on a $p \in E_\lambda(a)$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} + x_\nu , \tag{6}$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$.

S'il était $\alpha > \nu$, il résulterait de (6) et de la définition de l'ensemble E_λ que $p \in E_\lambda$, contrairement à l'hypothèse que $p \in E_\lambda(a) - E_\lambda$. On a donc

$\alpha \leq \nu$. Or, l'ensemble de tous les nombres (6), où $\alpha \leq \nu$ est au plus dénombrable. La première des inégalités (5) est ainsi établie.

Si $p \in E_\lambda - E_\lambda(a)$, on a $p \in E_\lambda$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} \,, \tag{7}$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et $\alpha \in Z_\lambda$.

Si $\alpha > \nu$, on aurait, d'après (7) et la définition de l'ensemble E_λ:

$$p - x_\nu \in E_\lambda, \quad \text{ce qui donne tout de suite:} \quad p \in E_\lambda(x_\nu) \,,$$

contrairement à l'hypothèse que $p \in E_\lambda - E_\lambda(a)$. On a donc $\alpha \leq \nu$ et on en déduit que l'ensemble des nombres (7) est au plus dénombrable. La deuxième des inégalités (5) est ainsi établie.

Chacun des ensembles $E_\lambda (\lambda < \Omega)$ est donc transformé par toute translation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.

Posons encore $E = X - \sum\limits_{\lambda < \Omega} E_\lambda$.

Soit, pour un nombre ordinal $\nu < \Omega$, $p \in E - E(x_\nu)$. On a donc, pour un nombre ordinal $\lambda < \Omega$, $p - x_\nu \in E_\lambda$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} + x_\nu \,, \tag{8}$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et $\alpha \in Z_\lambda$.

Si $\alpha > \nu$, on trouve, d'après (8) et d'après la définition de l'ensemble E_λ, $p \in E_\lambda$, contrairement à $p \in E$. On a donc $\alpha \leq \nu$. Or, l'ensemble de tous les nombres (8), où $\alpha \leq \nu$ est au plus dénombrable. On a donc $\overline{\overline{E - E(x_\nu)}} \leq \aleph_0$.

Soit maintenant $p \in E(x_\nu) - E$. On a donc pour un nombre ordinal $\lambda < \Omega$: $p \in E_\lambda$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} \,, \tag{9}$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et $\alpha \in Z_\lambda$ d'où

$$p - x_\nu = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} - x_\nu \,,$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$.

Si l'on avait $\alpha > \nu$, on aurait donc $p - x_\nu \in E_\lambda$, d'où $p - x_\nu \,\bar{\in}\, E$, ce qui donne $p \,\bar{\in}\, E(x_\nu)$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $\alpha \leq \nu$. L'ensemble de tous les nombres (9), où $\alpha \leq \nu$ étant au plus dénombrable, on trouve $\overline{\overline{E(x_\nu) - E}} \leq \aleph_0$.

Toute translation de l'ensemble E ne diffère donc de E que d'un ensemble au plus dénombrable de points.

Nous pouvons évidemment adjoindre E à l'ensemble E_1 sans altérer la propriété de ce dernier (d'être de puissance $2^{\aleph_0}$ et de ne différer de ses translations que d'un ensemble au plus dénombrable de points). $X = (E + E_1) + \sum_{1<\lambda<\Omega} E_\lambda$ donne donc la décomposition de la droite satisfaisant aux conditions de notre théorème qui se trouve ainsi démontré.

En modifiant un peu notre démonstration, on pourrait démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu la proposition suivante :

Il existe une décomposition de la droite en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints de puissance $2^{\aleph_0}$ tels que toute translation transforme chacun de ces ensembles en lui-même, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu.

Il est à remarquer que en 1932 *S. Banach* a démontré que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe sur la circonférence un ensemble non mesurable qui est transformé par chaque rotation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points[1]).

(Reçu le 15 juillet 1948.)

[1]) Fundamenta Mathematicae **19**, p. 15.