Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 24 (1950)

Artikel: I gruppi con elementi multipli distinti dalle cuspidi nelle serie algebriche sulle curve razionali cuspidate.

Autor: Longhi, Ambrogio

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20307

I gruppi con elementi multipli distinti dalle cuspidi nelle serie algebriche sulle curve razionali cuspidate

Di AMBROGIO LONGHI, Lugano

Sopra una curva di genere p, il numero, finito sotto certe ipotesi, dei gruppi di una serie lineare, o più in generale di una serie algebrica costituita da gruppi equivalenti, con punti di date multiplicità, è espresso dalla formula di *De Jonquières*[1]). Questa riesce tuttavia inadeguata alla risoluzione di molti problemi numerativi, benchè attinenti ai gruppi predetti, appena la curva sostegno possegga delle cuspidi: essendo finora rimasta insoluta la questione di precisare quanti fra i gruppi con le singolarità assegnate vengano assorbiti dalla totalità di quelli includenti ciascuno almeno una cuspide.

Nel presente lavoro risolvo appunto tale questione limitatamente al caso $p = 0$, riserbando al altro studio[2]) alcune importanti applicazioni della formula che qui si stabilisce.

1. Prescindendo da ogni particolare modello proiettivo, il teorema che si intende dimostrare può così enunciarsi:

Sopra un ente razionale Ω, semplicemente infinito e irriducibile, abbiasi una serie algebrica γ_n^r di gruppi di elementi: d'ordine n, di dimensione $r<n$ e d'indice $\nu \geqq 1$.

Si supponga Ω dotato, genericamente, di ϱ elementi E_i $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$ singolari cuspidali per la serie γ_n^r, cioè aventi ciascuno per essa gli r caratteri $2, 1, 1, \ldots, 1$, nel senso che ogni elemento E_i sia doppio per uno gene-

---

1) *E. De Jonquières*, Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque... (Journal für Math., 66, 1866). Cfr. pure: *F. Severi*, Trattato di geometria algebrica, Vol. I, Parte I (Bologna 1926), p. 243; *R. Torelli*, Dimostrazione di una formula di De Jonquières e suo significato geometrico (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 21, 1906) e Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica (Atti della Accademia di Torino, 42, 1907), n. 1, ultima nota.

2) Vedasi, in questi stessi Commentarii: *A. Longhi*, Sulle sviluppabili osculatrici delle curve razionali iperspaziali.

rico degli ∞^{r-1} *gruppi di* γ_n^r *che lo contengono; triplo per* ∞^{r-2} *gruppi di* γ_n^r, ..., *r-uplo per* ∞^1 *gruppi e* $(r+1)$*-uplo per* ν *gruppi di* γ_n^r.

Si considerino poi t numeri interi positivi $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$, *con* $1 \leqq t \leqq n - r$, *tali che:*

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_t = r \ ,$$

e riducentisi a τ *distinti in quanto che* α_i *di essi sono eguali fra di loro ma diversi dai rimanenti* $t - \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \tau;\ \tau \leqq t)$.

Esiste allora su Ω, *in generale, un numero finito* χ *di gruppi della serie* γ_n^r *aventi ciascuno*[3]) *t elementi rispettivamente multipli*[3]) *secondo* $\nu_j + 1$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$ *e tutti distinti dagli elementi singolari* E_i $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$.

Tale numero è dato dalla formula[4]) *:*

$$\chi = \frac{\nu}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\,\alpha_\tau!} \sum_{k=0}^{t} (t-k)\,!\,k!\,s_k \binom{n-r-k}{t-k} \binom{n-r-\varrho}{k} \, , \qquad (1)$$

ove $s_0 = 1$ *ed* s_k $(k = 1, 2, \ldots, t)$ *denota la somma dei prodotti a k a k dei t numeri (distinti o no)* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$.

2. Se $\varrho = 0$ la (1) diviene l'ordinaria formula di *De Jonquières* (per un ente razionale) poichè il secondo membro riducesi a:

$$\frac{t!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\,\alpha_\tau!} (\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1)\ldots(\nu_t + 1)\,\nu \binom{n-r}{t} \, .$$

La (1) è pure vera se $\varrho > 0$ ed $r = 1$ (onde $t = \tau = 1$ e $\alpha_1 = \nu_1 = 1$), fornendo, sull'ente razionale Ω, il ben noto numero:

$$2\,\nu(n-1) - \nu\,\varrho$$

dei gruppi di una serie algebrica ∞^1, d'ordine n e d'indice ν, dotati di un elemento doppio distinto dai ϱ elementi singolari E_i.

Per dimostrare la formula (1) si può dunque supporre $\varrho > 0$ ed ammetterne la validità per le serie algebriche di dimensione inferiore ad r: provando poi che essa vale anche per le serie di dimensione r.

La sommatoria figurante nella (1) si indicherà formalmente, per brevità, col simbolo:

$$[n, r, \varrho; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t] \ .$$

---

[3]) Sottindendasi: almeno e in generale precisamente.

[4]) Si veggano più innanzi due altre formule equivalenti alla (1), cioè le (12) e (14).

Fra i t numeri ν_i sia allora ν_m non superiore a tutti gli altri, e quelli eguali a ν_m siano in numero di α_μ ($\geqq 1$).

Si supponga dapprima $\nu_m > 1$.

Sull'ente Ω, dato un generico elemento H, tutti i gruppi di γ_n^r passanti per H formano, privati dell'elemento stesso, una serie algebrica γ_{n-1}^{r-1} col medesimo indice ν della γ_n^r; e siccome è:

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{m-1} + (\nu_m - 1) + \nu_{m+1} + \cdots + \nu_t = r - 1 \ , \qquad (2)$$

con[5]):

$$1 < t \leq (n-1) - (r-1) \ ,$$

la γ_{n-1}^{r-1} possiede un numero finito η' di gruppi dotati ciascuno di certi $t-1$ elementi H_j multipli secondo $\nu_j + 1$ ($j = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, t$) e distinti dai ϱ elementi singolari E_i, nonchè di un elemento H', esso pure distinto dagli E_i ($i = 1, 2, \ldots, \varrho$), multiplo secondo ν_m.

Fra i t addendi del primo membro della (2), quelli eguali a ν_m sono in numero di $\alpha_\mu - 1$; mentre l'addendo $\nu_m - 1$ differisce da tutti gli altri, giacchè $\nu_i \geq \nu_m > \nu_m - 1$.

Si conclude allora, in base all'ammessa validità della (1) per le serie di dimensione minore di r, che:

$$\eta' = \frac{\nu}{\alpha_1! \ldots \alpha_{\mu-1}! \, (\alpha_\mu - 1)! \, \alpha_{\mu+1}! \ldots \alpha_\tau! \, 1!} \times$$
$$[n-1, r-1, \varrho \ ; \ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m-1}, \nu_m - 1, \nu_{m+1}, \ldots, \nu_t] \, .$$

La corrispondenza algebrica W fra H e H' ha pertanto il secondo indice eguale ad η'.

Fissato ora, in modo generico, l'elemento H', i gruppi della serie γ_n^r che lo contengono come multiplo secondo ν_m riempiono, toltone tale elemento multiplo, una serie algebrica $\gamma_{n-\nu_m}^{r-\nu_m}$, pure di indice ν; essendo poi:

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{m-1} + \nu_{m+1} + \cdots + \nu_t = r - \nu_m \qquad (3)$$

e[5]):

$$1 \leq t - 1 < (n - \nu_m) - (r - \nu_m) \ ,$$

entro $\gamma_{n-\nu_m}^{r-\nu_m}$ esiste un numero finito ϑ di gruppi aventi ciascuno $t-1$ elementi H_j multipli secondo $\nu_j + 1$ ($j = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, t$) e distinti dagli elementi singolari E_i, coi restanti:

---

[5]) Si suppone $t > 1$: se fosse $t = 1$ il ragionamento subirebbe lievi e ovvie varianti.

$$n - \nu_m - (\nu_1 + \cdots + \nu_{m-1} + \nu_{m+1} + \cdots + \nu_t + t - 1) = n - r - t + 1$$

elementi tutti semplici; uno qualunque H dei quali risulta così omologo di H' nella corrispondenza W^{-1}.

Dall'ipotesi che la (1) valga per le serie di dimensione inferiore ad r, si deduce, osservando pure che nel primo membro della (3) sono $\alpha_\mu - 1$ i termini eguali a ν_m:

$$\vartheta = \frac{\nu}{\alpha_1! \ldots \alpha_{\mu-1}!(\alpha_\mu - 1)!\alpha_{\mu+1}! \ldots \alpha_\tau!} \times$$
$$[n - \nu_m, r - \nu_m, \varrho; \quad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m-1}, \nu_{m+1}, \ldots, \nu_t] .$$

Il primo indice della corrispondenza W fra H e H' è perciò:

$$\eta = (n - r - t + 1)\vartheta .$$

3. Come risulta dal n. 2, quando H e H' si corrispondono genericamente in W, esistono $t - 1$ elementi H_j $(j = 1, 2, \ldots, m - 1, m + 1, \ldots, t)$ diversi dai ϱ elementi singolari E_i e tali che il gruppo:

$$\begin{aligned} G_{r+t} \equiv H + \nu_m H' + (\nu_1 + 1) H_1 + \cdots + (\nu_{m-1} + 1) H_{m-1} \\ + (\nu_{m+1} + 1) H_{m+1} + \cdots + (\nu_t + 1) H_t \end{aligned} \tag{4}$$

appartenga (come gruppo totale o parziale) alla serie γ_n^r.

Se H ed H' coincidono in un elemento unito U di W, il gruppo G_{r+t} espresso dalla (4) diviene:

$$\begin{aligned} G'_{r+t} \equiv (\nu_m + 1) U + (\nu_1 + 1) H_1 + \cdots + (\nu_{m-1} + 1) H_{m-1} \\ + (\nu_{m+1} + 1) H_{m+1} + \cdots + (\nu_t + 1) H_t . \end{aligned}$$

Supposto allora $U \neq E_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$, il gruppo G'_n della serie γ_n^r che, per definizione della corrispondenza W, include G'_{r+t} (se $t < n - r$) o si identifica con G'_{r+t} (se $t = n - r$), è precisamente uno dei gruppi (coi t elementi di molteplicità assegnate) di cui si cerca il numero X: ed U è, entro G'_n, uno degli α_μ elementi multipli secondo $\nu_m + 1$.

Sia invece, ad esempio, $U \equiv E_1$; cioè il gruppo G'_{r+t}, e quindi il G'_n di γ_n^r, contenga l'elemento singolare E_1 con la molteplicità $\nu_m + 1$.

Si sa (n. 1) che E_1 è $(\nu_m + 1)$-uplo per $\infty^{r-\nu_m}$ gruppi della γ_n^r: i loro residui rispetto a $(\nu_m + 1)E_1$ costituiscono una serie algebrica $\gamma_{n-\nu_m-1}^{r-\nu_m}$, d'indice ν, per la quale sono singolari (n. 1) i $\varrho - 1$ elementi $E_2, E_3, \ldots, E_\varrho$.

Tenendo allora presente la (3), ove $\alpha_\mu - 1$ termini del primo membro sono eguali a ν_m; osservando che:

$$1 \leq t-1 \leq (n-\nu_m-1)-(r-\nu_m) \ ,$$

e applicando il teorema espresso dalla (1) alla serie $\gamma_{n-\nu_m-1}^{r-\nu_m}$, *di dimensione minore di* r, si conclude che questa serie possiede un numero finito λ di gruppi dotati ciascuno di $t-1$ elementi H_j non singolari e multipli secondo ν_j+1 $(j=1,2,\ldots,m-1,m+1,\ldots,t)$, con:

$$\lambda = \frac{\nu}{\alpha_1!\ldots\alpha_{\mu-1}!\,(\alpha_\mu-1)!\,\alpha_{\mu+1}!\ldots\alpha_\tau!} \times$$
$$[n-\nu_m-1\,,r-\nu_m\,,\varrho-1\ ;\ \ \nu_1\,,\nu_2\,,\ldots,\nu_{m-1}\,,\nu_{m+1}\,,\ldots,\nu_t]\ .$$

È perciò λ anche il numero dei gruppi G'_{r+t}, sopra considerati, ove $U \equiv E_1$.

Da quanto precede si desume che nel gruppo delle $\eta+\eta'$ coincidenze della corrispondenza $W(\eta,\eta')$ ciascuno dei ϱ elementi singolari di Ω ne assorbe λ, mentre le restanti sono in numero di $\alpha_\mu X$ e tutte semplici. Si ha pertanto:

$$\eta+\eta' = \alpha_\mu X + \lambda\varrho\ . \tag{5}$$

4. Avuto riguardo al significato del simbolo:

$$[n\,,r\,,\varrho\,;\nu_1\,,\nu_2,\ldots,\nu_t]$$

introdotto nel n. 2, mediante il quale si esprimono, nel modo già precisato, ϑ, η, η' e λ, si trova con facile calcolo che:

$$\frac{1}{\alpha_\mu}(\eta-\lambda\varrho) = \tag{6}$$
$$= \frac{\nu}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\tau!}\sum_{k=0}^{t-1}(t-k-1)!\,(k+1)!\,s'_k\binom{n-r-k-1}{t-k-1}\binom{n-r-\varrho}{k+1}$$

ove $s'_0=1$ e s'_k $(k=1,2,\ldots,t-1)$ indica la somma dei prodotti a k a k dei $t-1$ numeri ν_i $(i=1,2,\ldots,m-1,m+1,\ldots,t)$.

È poi:

$$\frac{1}{\alpha_\mu}\eta' = \frac{\nu}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\tau!}\sum_{k=0}^{t}(t-k)!\,k!\,s''_k\binom{n-r-k}{t-k}\binom{n-r-\varrho}{k}\ , \tag{7}$$

con $s''_0 = 1$ ed s''_k $(k = 1, 2, \ldots, t)$ eguale alla somma dei prodotti a k a k dei t numeri:

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m-1}, \nu_m - 1, \nu_{m+1}, \ldots, \nu_t .$$

Richiamando il significato di s_k (n. 1) e ponendo $s'_{-1} = 0$, si può scrivere:

$$s''_k = s_k - s'_{k-1}$$

per $k = 0, 1, \ldots, t$; ed allora dalle (5), (6) e (7) si deduce infine:

$$X = \frac{\nu}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \sum_{k=0}^{t} (t-k)!\, k!\, s_k \binom{n-r-k}{t-k} \binom{n-r-\varrho}{k} ; \qquad (8)$$

formola che confrontata con la (1) dimostra il teorema (nell'ipotesi $\nu_m > 1$).

5. Sia ora $\nu_m = 1$. La corrispondenza W fra gli elementi H e H' (n. 2) diviene simmetrica di indici η_1, con:

$$\eta_1 = (n - r - t + 1)\, \vartheta_1 ,$$

essendo ϑ_1 l'espressione ϑ (n. 2) ove $\nu_m = 1$.

Le sue coincidenze hanno luogo: in ciascuno degli α_μ elementi doppi dei gruppi, della serie γ_n^r, di cui si ricerca il numero X; e nei ϱ elementi singolari di Ω, ognuno dei quali ne assorbe un numero eguale al valore λ_1 di λ (n. 3) per $\nu_m = 1$.

Si ha dunque:

$$2\eta_1 = \alpha_\mu X + \lambda_1 \varrho . \qquad (9)$$

Ma si trova (cfr. n. 4) che, posto $s'_t = 0$ e conservando al simbolo $s'_k (k = -1, 0, 1, \ldots, t-1)$ il significato del n. 4, è:

$$\frac{1}{\alpha_\mu} (\eta_1 - \lambda_1 \varrho) = \frac{\nu}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \sum_{k=0}^{t} (t-k)!\, k!\, s'_{k-1} \binom{n-r-k}{t-k} \binom{n-r-\varrho}{k} \qquad (10)$$

e:

$$\frac{1}{\alpha_\mu} \eta_1 = \frac{\nu}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \sum_{k=0}^{t} (t-k)!\, k!\, s'_k \binom{n-r-k}{t-k} \binom{n-r-\varrho}{k} . \qquad (11)$$

Sommando le (10) e (11), e notando che (per l'ipotesi $\nu_m = 1$) è:

$$s'_k + s'_{k-1} = s_k ,$$

risulta, in base alla (9), la formula (8); e il teorema del n. 1 riesce così interamente dimostrato.

6. Non è forse superfluo avvertire che applicando la formula (1) si deve ritenere $\binom{h}{0} = 1$ anche quando l'intero h è negativo o nullo, e $\binom{h}{k} = 0$ solo se $0 \leq h < k$; mentre se $h < 0$ si può porre:

$$\binom{h}{k} = (-1)^k \binom{k-h-1}{k} .$$

Ne deriva che:

La formula (1), *relativa al teorema del* n. 1, *è equivalente all'altra:*

$$\chi = \frac{\nu}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \sum_{k=0}^{t} (-1)^k (t-k)!\, k!\, s_k \binom{n-r-k}{t-k} \binom{\varrho+r-n+k-1}{k} , \tag{12}$$

preferibile alla (1) *quando* $\varrho > n-r$.

7. Si dimostra facilmente, per induzione, l'eguaglianza:

$$\binom{n-r-\varrho}{k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-r-i}{k-i} \binom{\varrho}{i} , \tag{13}$$

che permette una nuova interessante modificazione della formula (1).

Eseguendo infatti nella (1) la sostituzione (13) si riconosce, dopo alcune ovvie trasformazioni, che:

Il numero χ, *oggetto del teorema del* n. 1, *oltre che con le formule* (1) *e* (12), *si può ancora esprimere con la formula ad esse equivalente:*

$$\chi = \frac{\nu}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \sum_{i=0}^{t} (-1)^i (t-i)!\, i! \binom{n-r-i}{t-i} \binom{\varrho}{i} \sum_{k=i}^{t} \binom{k}{i} s_k . \tag{14}$$

8. Notevole è il caso in cui i t numeri ν_i (n. 1) sono eguali fra di loro, e quindi ad $r:t$. Si ha allora $\tau = 1$, $\alpha_1 = t$ e inoltre:

$$\sum_{k=i}^{t} \binom{k}{i} s_k = \sum_{k=i}^{t} \binom{k}{i} \binom{t}{k} \left(\frac{r}{t}\right)^k = \binom{t}{i} \sum_{k=i}^{t} \binom{t-i}{k-i} \left(\frac{r}{t}\right)^k =$$

$$= \binom{t}{i} \left(\frac{r}{t}\right)^i \left(\frac{r}{t}+1\right)^{t-i} ;$$

onde sostituendo nella (14) risulta il teorema particolare:

Se t è divisore di r (con $1 \leq t \leq r$), sopra un ente razionale ∞^1, irriducibile e dotato, in modo generico, di ϱ elementi singolari cuspidali (n. 1), *una serie algebrica γ_n^r di dimensione r, di ordine $n \geq r + t$ e d'indice $\nu \geq 1$, possiede in generale un numero finito di gruppi contenenti ciascuno t elementi tutti con la multiplicità $\frac{r}{t} + 1$ e distinti dai ϱ elementi cuspidali.*

Tale numero è precisamente eguale a:

$$\nu \cdot \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \left(\frac{r}{t}\right)^i \left(\frac{r}{t} + 1\right)^{t-i} \binom{n - r - i}{t - i} \binom{\varrho}{i} .$$

(Reçu le 17 mai 1949.)