Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 24 (1950)

Artikel: Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionale.

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20308

Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionale

Von H. Hadwiger, Bern

In der vorliegenden Arbeit werden einige Resultate einläßlicher erläutert und bewiesen, welche bereits bei früheren Gelegenheiten mitgeteilt worden sind[1]). Es handelt sich vorerst um einen Zerlegungssatz, welcher aussagt, daß ein beliebiges Polyeder P des dreidimensionalen euklidischen Raumes in eindeutiger Weise im Sinne der Zerlegungs- bzw. Ergänzungsgleichheit aus Basispolyedern A_τ aufgebaut werden kann. — Die Polyeder A_τ der Zerlegungsbasis ermöglichen weiter die Konstruktion einer Klasse additiver Funktionale χ_τ, die ihrerseits ein System von Bedingungen veranlassen, welche für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder notwendig und hinreichend sind. Damit wird für das Problem der Zerlegungsgleichheit, das u. a. durch eine Fragestellung von *D. Hilbert*[2]) veranlaßt und durch eine wichtige Feststellung von *M. Dehn*[3]) vertieft worden ist, eine Interpretation einer Lösung gegeben, welche zwar nur rein formaler Natur ist.

Es soll hier eingeräumt werden, daß der Existenznachweis der genannten Zerlegungsbasis der bekannten Konstruktion von *G. Hamel*[4]) nachgebildet ist, so daß also die Gültigkeit des Wohlordnungssatzes nach *E. Zermelo* eine wesentliche Voraussetzung darstellt.

Die formale Entwicklung in dieser Arbeit wird dadurch ermöglicht, daß durch Einführung eines geeigneten neuen Äquivalenzbegriffes (äquivalent oder zerlegungsgleich mod. E; E = Einheitswürfel) die Voraussetzungen dafür geschaffen werden, daß sich eine lineare Polyederalgebra aufbauen läßt. Wegweisend war hierbei eine merkwürdige Ausnahmestellung des Würfels in einigen sich auf die Zerlegungsgleichheit beziehen-

---

[1]) Eine Mitteilung erfolgte an der Jahresversammlung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft am 5. September 1948 in St. Gallen; ein ausführlicheres Selbstreferat erschien unter dem gleichen Titel im Archiv der Mathematik **1**, 468—472, 1949.

[2]) *D. Hilbert*, Math. Probleme, Gött. Nachr. 1900, 266.

[3]) *M. Dehn*, Math. Ann. **55**, 465—478, 1901.

[4]) *G. Hamel*, Math. Ann. **60**, 459—462, 1905.

den Aussagen; vor allem sind es die von *J. P. Sydler*[5]) aufgestellten Sätze, welche sich interpretieren lassen als die Distributivgesetze der linearen Polyederalgebra, welche auf der neuen Äquivalenz beruht.

1. Äquivalenz (Zerlegungsgleichheit) und bekannte Tatsachen

Wir betrachten in der vorliegenden Arbeit beschränkte, abgeschlossene und eigentliche[6]) Polyeder des dreidimensionalen euklidischen Raumes. — Zwei Polyeder P und Q nennt man *äquivalent* oder *zerlegungsgleich*, geschrieben

$$P \sim Q \ , \tag{1}$$

falls sich P bzw. Q in endlich viele abgeschlossene eigentliche Teilpolyeder P_ν bzw. Q_ν zerlegen läßt, geschrieben

$$P = \sum_1^n P_\nu \ ; \quad Q = \sum_1^n Q_\nu \ , \tag{2}$$

so daß die Teilpolyeder P_ν bzw. Q_ν paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben, und so, daß

$$P_\nu \cong Q_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

gilt, d. h. daß die Teilpolyeder P_ν mit den entsprechenden Q_ν kongruent sind.

Zunächst sollen einige teilweise einfache, teilweise auch tieferliegende Eigenschaften der mit (1) ausgedrückten Äquivalenz zusammengestellt werden. Es gilt:

(I) $P \sim P$;

(II) *Aus* $P \sim Q$ *folgt* $Q \sim P$;

(III) *Aus* $P \sim Q$ *und* $Q \sim R$ *folgt* $P \sim R$;

(IV) *Aus* $P \sim Q$ *und* $P + U \sim Q + V$ *folgt* $U \sim V$.

Zu dem letzten Gesetz sei Folgendes erklärend hinzugefügt: Unter einem Polyeder $P + Q$ verstehen wir ein solches, das sich in die beiden Teilpolyeder P und Q zerlegen läßt, d. h. als Vereinigungsmenge schreibbar ist, unter der wesentlichen Bedingung, daß die Teile keine inneren Punkte

[5]) *J. P. Sydler*, Comm. Math. Helv. **16**, 266—273, 1943/44.

[6]) Unter einem eigentlichen Polyeder wollen wir die Vereinigungsmenge endlich vieler abgeschlossener und nicht entarteter Tetraeder verstehen. Unterdimensionale Bestandteile sind demnach ausgeschaltet.

gemeinsam haben. Hierdurch ist der Begriff der Zerlegung nochmals präzisiert und wird fortab stets in diesem Sinne verwendet. Das Gesetz (IV), welches u. a. auch von *J. P. Sydler*[7]) bewiesen wurde, drückt den wesentlichen Sachverhalt aus, daß zwei ergänzungsgleiche Polyeder auch zerlegungsgleich sind.

(V) *Sind U und V zwei (gerade oder schiefe) Parallelotope gleichen Inhaltes, so daß* $J(U) = J(V)$ *ist, so gilt* $U \sim V$.

Insbesondere ist also jedes Parallelotop mit einem inhaltsgleichen Würfel zerlegungsgleich. Diese bekannte fundamentale Tatsache wurde u. a. auch von *A. Emch*[8]) bewiesen.

(VI) *Es existieren zwei inhaltsgleiche Polyeder U und V, so daß also* $J(U) = J(V)$ *ist, dagegen aber* $U \nsim V$ *gilt.*

Das Zeichen $\nsim$ symbolisiert selbstverständlich eine bestehende Nichtäquivalenz. Einen Existenzbeweis für solche Polyederpaare erbracht zu haben, ist bekanntlich das viel zitierte Verdienst von *M. Dehn*.

(VII) *Es sei* $\alpha_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *und* $\sum_1^n \alpha_\nu = 1$; *dann gilt für jedes Polyeder P die Äquivalenzrelation*

$$P \sim \lambda E + \sum_1^n \alpha_\nu P\ ,$$

wobei E den Einheitswürfel bezeichnet und $\lambda > 0$ *durch*

$$\lambda^3 = J(P)\left(1 - \sum_1^n \alpha_\nu^3\right)$$

bestimmt ist.

Mit dem letzten Gesetz geben wir ein Theorem von *J. P. Sydler*[9]) wieder. Zur richtigen Interpretation unserer symbolischen Schreibweise sind noch einige Hinweise erforderlich: Einmal verstehen wir unter λP ein zu P ähnliches Polyeder, dessen linearen Maße sich zu denjenigen von P wie $\lambda : 1$ verhalten. Seine Lage im Raum sei indessen frei wählbar. Den Polyedern in der Summe auf der rechten Seite der in (VII) geschriebenen Äquivalenzrelation ist eine solche räumliche Lage zuzuerteilen, daß diese keine inneren Punkte gemeinsam haben.

---

[7]) Vgl. Fußnote [5]).

[8]) *A. Emch*, Comm. Math. Helv. **18**, 224—231, 1945/46.

[9]) Vgl. Fußnote [5]).

2. Überleitende Betrachtungen

Am Schlusse des letzten Abschnittes hat sich eine gewisse Unsicherheit dadurch ergeben, daß die Bezeichnung eines Polyeders in den Äquivalenzrelationen seine Lage im Raum nicht charakterisiert. So ist mit λP ein Polyeder definiert, dessen räumliche Lage noch frei wählbar ist. Diese Vieldeutigkeit kann dadurch zum Verschwinden gebracht werden, daß man alle unter sich kongruenten Polyeder identifiziert. Diese Abstraktion ist indessen unserer Theorie noch zu wenig angepaßt. Wir wollen wesentlich weiter gehen und sogar alle unter sich äquivalenten Polyeder identifizieren. Ein Polyeder P ist dann der vollwertige Vertreter der ihm zugeordneten Äquivalenzklasse.

Überprüfen wir nun die bisher erklärten Operationen, so erkennen wir, daß nunmehr eine eindeutige Addition $P + Q$ und eine eindeutige Multiplikation λP für $\lambda > 0$ zur Verfügung stehen[10]. Dagegen fehlt eine Multiplikation λP für $\lambda \leqq 0$, und demzufolge läßt sich auch keine Subtraktion durch den Ansatz $P - Q = P + (-1)\,Q$ gewinnen. Damit ist ein erster Mangel aufgezeigt, welcher einem Versuch, eine lineare Polyederalgebra aufzubauen, ein wesentliches Hindernis entgegenstellt.

Ein zweiter Mangel ist dadurch gegeben, daß das distributive Gesetz $\alpha P + \beta P = (\alpha + \beta) P$ auch bei Beschränkung auf $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ nicht gilt.

Hier setzt nun das Bestreben des Verfassers ein, durch passende Modifikation des Äquivalenzbegriffes die genannten Schwierigkeiten zu beseitigen, um eine lineare Polyederalgebra in die Wege zu leiten.

In welcher Weise dieses Ziel erreicht werden kann, zeigt der folgende Abschnitt.

3. Äquivalenz mod. E und lineare Polyederalgebra

Zwei Polyeder P und Q wollen wir *äquivalent mod. E* oder auch *zerlegungsgleich mod. E* nennen, geschrieben

$$P \approx Q\,, \tag{4}$$

falls es zwei Koeffizienten $\alpha \geqq 0$ und $\beta \geqq 0$ so gibt, daß die Äquivalenz oder Zerlegungsgleichheit

$$P + \alpha E \sim Q + \beta E \tag{5}$$

besteht, wobei E den Einheitswürfel bezeichnet.

---

[10]) $\lambda = 0$ ist zunächst nicht zugelassen, da $0P$ nur unterdimensional zu interpretieren ist; vgl. Fußnote [6]).

Wir besprechen zunächst die Übertragungen der Grundeigenschaften (I) bis (VII), welche im 1. Abschnitt erörtert wurden, auf die mit (4) eingeführte neue Äquivalenz:

(I*) $$P \approx P\,;$$

(II*) $$\textit{Aus}\quad P \approx Q \quad \textit{folgt} \quad Q \approx P\,.$$

Diese beiden ersten Gesetze folgen trivial aus (I) und (II).

(III*) $$\textit{Aus}\quad P \approx Q \quad \textit{und} \quad Q \approx R \quad \textit{folgt} \quad P \approx R\,.$$

Beweis: Es sei $P + \alpha E \sim Q + \beta E$ und $Q + \gamma E \sim R + \delta E$.

1. Fall. Es sei $\beta \geqq \gamma$. Wegen $\beta E \sim \gamma E + \xi E$ mit $\beta^3 = \gamma^3 + \xi^3$ (vgl. (V)) hat man zunächst $P + \alpha E \sim Q + \gamma E + \xi E$ und also (vgl. (III)) $P + \alpha E \sim R + \delta E + \xi E$ oder mit $\delta^3 + \xi^3 = \eta^3$ auch $P + \alpha E \sim R + \eta E$; also $P \approx R$.

2. Fall. Es sei $\beta \leqq \gamma$. Wegen $\gamma E \sim \beta E + \xi E$ mit $\gamma^3 = \beta^3 + \xi^3$ hat man zunächst $R + \delta E \sim Q + \beta E + \xi E$, also $R + \delta E \sim P + \alpha E + \xi E$ und damit $R + \delta E \sim P + \eta E$ mit $\eta^3 = \alpha^3 + \xi^3$, also $R \approx P$.

(IV*) $$\textit{Aus}\quad P \approx Q \quad \textit{und} \quad P + R \approx Q + S \quad \textit{folgt} \quad R \approx S\,.$$

Beweis: Es sei $P + \alpha E \sim Q + \beta E$ und $P + R + \gamma E \sim Q + S + \delta E$. Man wähle $\omega > 0$ so, daß $\gamma^3 + \omega^3 \geqq \alpha^3$ und $\delta^3 + \omega^3 \geqq \beta^3$ gilt. Nun ist $P + R + \gamma E + \omega E \sim Q + S + \delta E + \omega E$. Weiter hat man $\gamma E + \omega E \sim \alpha E + \xi E$ und $\delta E + \omega E \sim \beta E + \eta E$ mit $\gamma^3 + \omega^3 = \alpha^3 + \xi^3$ und $\delta^3 + \omega^3 = \beta^3 + \eta^3$. So ergibt sich zunächst $P + \alpha E + R + \xi E \sim Q + \beta E + S + \eta E$ und nach Anwendung von (IV) hieraus $R + \xi E \sim S + \eta E$, also $R \approx S$.

Es bezeichne das Symbol O das „leere Polyeder". Dieses formale Polyeder soll zu der Klasse der ursprünglich eingeführten eigentlichen Polyeder hinzugefügt werden. Nunmehr kann die früher für $\lambda > 0$ eingeführte Multiplikation λP auch auf $\lambda = 0$ ausgedehnt werden, indem wir für ein beliebiges Polyeder P die Konvention $0P = O$ treffen. Ferner soll $\lambda O = O$ und $P + O = P$ sein. Es muß hier nachträglich noch eingeräumt werden, daß die hier getroffenen sehr naheliegenden Konventionen für die vollständige Interpretation der für die gefaßte Äquivalenzdefinition maßgeblichen Beziehung (5) erforderlich sind, und dort also bereits vorweggenommen sind.

In bezug auf die neu eingeführte Äquivalenz ergibt sich jetzt

$$\lambda E \approx O \ . \tag{6}$$

Nach dieser Einschiebung fahren wir mit der Erörterung der Grundeigenschaften fort:

(V*) *Es sei U ein (gerades oder schiefes) Parallelotop; alsdann gilt $U \approx O$.*

Beweis: Nach (V) hat man $U \sim \lambda E$ oder im Hinblick auf (6) $U \approx O$.

(VI*) *Es gibt ein Polyeder P, so daß $P \not\approx O$ gilt.*

Beweis: Nach (VI) gibt es ein Polyeder P, so daß $P \not\sim \lambda E$ ist, wobei $\lambda^3 = J(P)$ sein soll; andernfalls wären wegen (III) alle inhaltsgleichen Polyeder äquivalent. Nun läßt sich schließen, daß $P \not\approx O$ ist. In der Tat: Wäre nämlich $P + \alpha E \sim \beta E$ mit $\beta^3 = \alpha^3 + J(P)$, so würde sich aus $\beta E \sim \alpha E + \lambda E$ mit $\beta^3 = \alpha^3 + \lambda^3$ zunächst $P + \alpha E \sim \lambda E + \alpha E$, und hieraus wegen (IV) $P \sim \lambda E$ ergeben.

Es sei P ein beliebiges Polyeder. Wir definieren nun durch

$$-P = \lambda E - P^0 \qquad (\lambda E \supset P) \tag{7}$$

das zugehörende „negative Polyeder". Hierbei bedeute λE einen ausreichend großen Würfel in passender Lage, der P ganz überdeckt[11]). P^0 bezeichne den offenen Kern von P und die Subtraktion auf der rechten Seite von (7) sei die übliche Mengensubtraktion, welche nun deshalb möglich ist, weil P^0 eine Teilmenge von λE ist.

Zunächst treffen wir die Verabredung, daß alle unter sich mod. E äquivalenten Polyeder identifiziert werden sollen. Ein Polyeder P ist dann ein vollwertiger Repräsentant der ihm zugehörenden Äquivalenzklasse mod. E.

Nun zeigt sich, daß die Konstruktion (7), welche aus einem Polyeder P das „negative Polyeder" $-P$ hervorgehen läßt, durchaus eindeutig ist. Lage und Größe des Überdeckungswürfels hat also keinerlei Einfluß auf das definierte Polyeder.

In der Tat: Es seien $(-P) = \lambda E - P^0$ und $(-P)' = \lambda' E' - P^0$ zwei nach (7) auf verschiedene Weise konstruierte Polyeder $-P$. Hierbei sollen E und E' zwei Einheitswürfel in verschiedener Lage bezeichnen. Wir wählen λE und $\lambda' E'$ mit E und E' homothetisch und konzentrisch.

---

[11]) Jeder Punkt von P ist demnach innerer Punkt des überdeckenden Würfels.

Das nämliche treffe zu für die Würfel μE und $\mu E'$, wobei $\mu > \lambda, \lambda'$ gewählt sei. Nun ist doch $\mu E = \mu E - P^0 + P$ und gleichzeitig auch $\mu E' = \mu E' - P^0 + P$, also wegen $\mu E \sim \mu E'$ und (I) und (IV) $\mu E - P^0 \sim \mu E' - P^0$. Nun ist weiter $\mu E = \lambda E + R$ und $\mu E' = \lambda' E' + R'$, wobei R und R' zwei mantelförmige Polyeder bezeichnen, so daß man zunächst $\lambda E - P^0 + R \sim \lambda' E' - P^0 + R'$ hat. Da sich R und R' in gerade Parallelotope zerlegen lassen, so daß nach (V) $R \sim \alpha E$ und $R' \sim \alpha' E'$ gilt, hat man nunmehr $(-P) + \alpha E \sim (-P)' + \alpha' E'$ oder also $(-P) \approx (-P)'$.

Es läßt sich zeigen, daß die „positiven" und „negativen" Polyeder in bezug auf ihre Stellung rechts und links vom Äquivalenzzeichen im üblichen linar algebraischen Sinne gehandhabt werden können. Genauer ist zu zeigen, daß die beiden Relationen

$$P + Q \approx R \longleftrightarrow P \approx R - Q \tag{8}$$

gleichbedeutend sind. In der Tat: Aus $R \approx P + Q$ folgt $R + \gamma E \sim P + Q + \alpha E$ und weiter also

$$R + \gamma E + (\lambda E - Q^0) \sim P + Q + \alpha E + (\lambda E' - Q'^0) \, .$$

Hierbei bezeichnet Q'^0 den offenen Kern von Q', wo $Q' \cong Q$ sein soll. Nun ist doch $\lambda E' - Q'^0 + Q \sim \lambda E$, so daß jetzt $R + \gamma E - Q \sim P + \alpha E + \lambda E$ oder $R - Q \approx P$ folgt. Analoge Schlußweise ist in umgekehrter Richtung möglich.

Mühelos zeigt man weiter, daß

$$-(-P) \approx P \tag{9}$$

gilt.

Nun ist die Entwicklung so weit fortgeschritten, daß sich die Multiplikation λP für $-\infty < \lambda < \infty$ in eindeutiger Weise erklären läßt. Für $\lambda < 0$ setzt man $\lambda P = (-\lambda)(-P)$.

Von großer Bedeutung ist nun die Gültigkeit der distributiven Gesetze, welche die Regeln (8) und (9) speziell enthalten. Der Numerierung gemäß lassen wir diese Gesetze an die Stelle der *Sydler*schen Sätze treten, aus welchen sie im wesentlichen hervorgegangen sind. So haben wir:

(VII*) *Für beliebige Polyeder P und Q und $-\infty < \alpha, \beta < \infty$ gelten die Gesetze:*

(a) $\alpha(P + Q) \approx \alpha P + \alpha Q$;
(b) $\alpha(\beta P) \approx (\alpha\beta) P$;
(c) $\alpha P + \beta P \approx (\alpha + \beta) P$.

Beweise: (a) und (b) sind für $\alpha, \beta \geqq 0$ trivial; die andern Fälle erledigt man mühelos mit Beanspruchung der bereits begründeten Regeln (8) und (9). (c) ergibt sich zunächst für $\alpha, \beta \geqq 0$ nach (VII), wonach doch $\alpha P + \beta P + \lambda E \sim (\alpha + \beta) P$ mit $\lambda^3 = J(P)[(\alpha + \beta)^3 - (\alpha^3 + \beta^3)]$ ist. Alle andern Fälle lassen sich mit Anwendung der Regel (8) auf diesen ersten zurückführen.

4. Eine Zerlegungsbasis aller Polyeder

Es bezeichne $\mathfrak{P}$ die Klasse aller Polyeder P, für welche

$$P \not\approx O \tag{10}$$

gilt. Nach (VI*) ist $\mathfrak{P}$ nicht leer. Wir denken uns nun diese Polyedermenge wohlgeordnet. Die zu $\mathfrak{P}$ gehörenden Polyeder sollen fortab als $P_\varkappa$ angeschrieben werden, wobei $\varkappa$ einen Ordnungsindex symbolisiert. Der Anfang der Wohlordnung sei etwa durch

$$P_{\varkappa_0} \angle P_{\varkappa_1} \angle P_{\varkappa_2} \angle \cdots \tag{11}$$

gegeben; hierbei ist $\angle$ das Zeichen für die Ordnungsbeziehung.

Wir definieren jetzt: Ein Polyeder $P \in \mathfrak{P}$ heißt *vorabhängig*, falls eine Äquivalenzbeziehung

$$P \approx \sum \alpha_\varkappa P_\varkappa \tag{12}$$

besteht, wobei die Koeffizienten $\alpha_\varkappa$ in der rechtstehenden Summe fast alle[12]) verschwinden, so daß sich der Ausdruck auf eine endliche Summe reduziert und sich die Summation nur über diejenigen $\varkappa$ erstrecken soll, für welche $P_\varkappa \angle P$ gilt.

Es bezeichne jetzt weiter $\mathfrak{A}$ die Klasse aller *nicht* vorabhängigen Polyeder in $\mathfrak{P}$. Da jedenfalls das erste Polyeder $P_{\varkappa_0}$ von $\mathfrak{P}$ nicht vorabhängig sein kann, ist $\mathfrak{A}$ nicht leer. Ferner ist $\mathfrak{A}$ als Teilmenge einer wohlgeordneten Menge selbst wieder wohlgeordnet bezüglich der gleichen Ordnungsbeziehung. Die zu $\mathfrak{A}$ gehörenden Polyeder sollen fortab als A_τ bezeichnet werden, wobei τ den Ordnungsindex symbolisiert.

Aus Gründen, welche durch die folgenden Resultate erhellt werden, nennen wir die A_τ auch *Basispolyeder*. Die Klasse $\mathfrak{A}$ aller Basispolyeder werden wir als *Zerlegungsbasis* ansprechen. Als wohlgeordnete Menge beginne sie etwa mit

$$A_{\tau_0} \angle A_{\tau_1} \angle A_{\tau_2} \angle \cdots . \tag{13}$$

---

[12]) Die Bezeichnung „fast alle“ soll hier und im folgenden zur Abkürzung für „alle, mit endlich vielen Ausnahmen“ gebraucht werden.

Wir zeigen zunächst:

(VIII*) *Die Basispolyeder* A_τ *sind unabhängig, d. h. aus*

$$\sum \alpha_\tau A_\tau \approx O \qquad (-\infty < \alpha_\tau < \infty) ,$$

wobei im Ausdruck der linken Seite fast alle α_τ *verschwinden, so daß sich dieser auf eine endliche Summe reduziert, folgt daß* $\alpha_\tau = 0$ *für alle* τ *ist.*

Beweis: Es sei im Gegensatz zur Behauptung etwa

$$\sum_1^n \alpha_{\tau_\nu} A_{\tau_\nu} \approx O \ , \qquad \alpha_{\tau_\nu} \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \ .$$

Offenbar muß $n \geqq 2$ sein, da sich andernfalls für das einzige beteiligte Basispolyeder $A \approx O$ folgern ließe im Widerspruch zur Konstruktion von $\mathfrak{A}$ als Teilklasse von $\mathfrak{P}$ mit Eingangsbedingung (10). Nach den Rechengesetzen, welche für die im vorstehenden Abschnitt entwickelte lineare Polyederalgebra Geltung haben, läßt sich nunmehr ausrechnen, daß $A_{\tau_n} \approx \sum_1^{n-1} \lambda_\nu A_{\tau_\nu}$ mit $\lambda_\nu = - \alpha_{\tau_\nu}/\alpha_{\tau_n}$ gilt. Da die Numerierung so gewählt sein soll, daß $A_{\tau_\nu} \angle A_{\tau_\mu}$ für $\nu < \mu$ ist, muß mithin A_{τ_n} vorabhängig sein; dies steht jedoch im Widerspruch zur Konstruktion.

Ein bedeutungsvoller Sachverhalt, der auch die Bezeichnung Basispolyeder rechtfertigt, ist nun folgender:

(IX*) *Ein beliebiges Polyeder* P *geht mit den Basispolyedern* A_τ *eine und nur eine Äquivalenzrelation*

$$P \approx \sum \alpha_\tau A_\tau \qquad (-\infty < \alpha_\tau < \infty)$$

ein, wobei im rechtsstehenden Ausdruck fast alle Koeffizienten α_τ *verschwinden, so daß sich dieser auf eine endliche Summe reduziert.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß jedenfalls *wenigstens eine* solche Relation besteht. In der Tat: Ist $P \approx O$, so genügt es $\alpha_\tau = 0$ für alle τ zu setzen. Es sei $P \not\approx O$ und es bestehe keine Äquivalenzrelation der behaupteten Art. Allgemeiner sei jetzt $\mathfrak{S}$ die Teilmenge derjenigen Polyeder von $\mathfrak{P}$, für welche eine solche Äquivalenzrelation nicht besteht. Auf Grund der oben getroffenen Annahme ist also $\mathfrak{S}$ nicht leer. $\mathfrak{S}$ ist bezüglich der gleichen Ordnungsbeziehung wohlgeordnet; es sei S das erste Polyeder.

1. Fall. Es sei $S \in \mathfrak{A}$. Mit $S = A$ folgt trivialerweise $A \approx A$, also eine Relation der fraglichen Art im Widerspruch zur Konstruktion von $\mathfrak{S}$.

2. Fall. Es sei $S \notin \mathfrak{A}$. Es gibt mithin eine Relation $S \approx \sum \beta_\varkappa P_\varkappa$ mit $P_\varkappa < S$. Im Hinblick auf die Erklärung von S gibt es für jedes in der obenstehenden Summe vorkommendes $P_\varkappa$ eine Relation $P_\varkappa \approx \sum \alpha_\tau^\varkappa A_\tau$. Hieraus folgert man $S \approx \sum \gamma_\tau A_\tau$, wobei $\gamma_\tau = \sum \beta_\varkappa \alpha_\tau^\varkappa$ ist. Man beachte, daß alle vorkommenden Summen endlich sind. Somit hat sich doch für S eine gefragte Äquivalenzrelation ergeben, womit erneut ein Widerspruch erreicht ist. Damit ist dargetan, daß die eingangs formulierte Annahme betreffend das Polyeder P unstatthaft ist; damit ist die erste Teilbehauptung bewiesen.

Wir haben noch zu zeigen, daß *höchstens eine* solche Relation besteht. In der Tat: Es soll $P \approx \sum \alpha_\tau A_\tau$ und auch $P \approx \sum \beta_\tau A_\tau$ gelten, wobei sich beide rechtsstehenden Ausdrücke auf endliche Summen reduzieren sollen. Nach den gültigen Rechengesetzen folgt hieraus $\sum (\alpha_\tau - \beta_\tau) A_\tau \approx O$ und nach (VIII*) also $\alpha_\tau = \beta_\tau$ für alle τ. Damit ist auch die zweite Teilbehauptung bewiesen.

Um die hiermit erzielten Resultate, welche sich auf die Äquivalenz $\approx$ oder Zerlegungsgleichheit mod. E mit der formalen Ausdehnung auf „negative" Polyeder beziehen, in den Bereich der Äquivalenz $\sim$ oder der gewöhnlichen Zerlegungsgleichheit mit nur „positiven" Polyedern leichter umdeuten zu lönnen, ist es von Vorteil, den letzten Sachverhalt der äußeren Form nach abzuändern.

Wir denken uns alle in der Behauptung (IX*) auf der rechten Seite stehenden Summenden mit negativen Koeffizienten nach Maßgabe der Regel (8) auf die linke Seite gebracht. Mit passend veränderter Schreibweise hat man jetzt die mit (IX*) gleichwertige Aussage:

(X*) *Ein beliebiges Polyeder P geht mit den Basispolyedern A_τ eine und nur eine Äquivalenzrelation der Form*

$$P + \sum \beta_\tau A_\tau \approx \sum \alpha_\tau A_\tau \qquad (\alpha_\tau, \beta_\tau \geqq 0;\ \alpha_\tau \beta_\tau = 0)$$

ein, wobei sowohl im rechts- als auch im linksstehenden Ausdruck fast alle Koeffizienten α_τ und β_τ verschwinden, so daß sich diese auf endliche Summen reduzieren.

Die Bedingung $\alpha_\tau \beta_\tau = 0$ drückt in kurzer Form nur das Erfordernis aus, daß für das nämliche τ höchstens auf einer Seite ein nichtverschwindender, in unserm Fall also positiver Koeffizient vorkommen kann; nur unter dieser Bedingung ist natürlich eine Eindeutigkeit vorhanden.

5. Der Zerlegungssatz

Mit der Übertragung von (IX*) in (X*) haben wir den Weg beschritten, der uns aus dem Bereich der formalen Polyederalgebra wieder zu den konkret geometrisch deutbaren Zerlegungsbeziehungen zurückführen soll. Eine letzte Etappe besteht nunmehr darin, den mit (X*) ausgedrückten Sachverhalt nach Rückblick auf die definitorische Beziehung (5) von der Zerlegungsgleichheit mod. E auf die gewöhnliche Zerlegungsgleichheit zu übertragen. So erzielen wir das eigentliche Hauptergebnis dieser Arbeit, nämlich den folgenden

Zerlegungssatz: *Es existiert eine Klasse von Basispolyedern (Zerlegungsbasis) A_τ so, daß jedes beliebige Polyeder P zwei Sätze nicht negativer Koeffizienten $(\xi\,; \alpha_\tau)$ und $(\eta\,; \beta_\tau)$ unter den Bedingungen $\xi\,\eta = 0$, $\alpha_\tau \beta_\tau = 0$ (für alle τ) eindeutig bestimmt, so daß die Äquivalenz oder Zerlegungsgleichheit*

$$P + \eta E + \sum \beta_\tau A_\tau \sim \xi E + \sum \alpha_\tau A_\tau$$

besteht, wobei fast alle Koeffizienten der beiden Sätze verschwinden, so daß sich also beide Ausdrücke in der oben stehenden Äquivalenzrelation auf endliche Summen reduzieren; E bezeichnet den Einheitswürfel.

Die eindeutige Bestimmtheit der Koeffizienten α_τ und β_τ ist bereits mit (X*) gegeben; es muß noch diejenige der Koeffizienten ξ und η eingesehen werden. Diese ergibt sich denn aus der Inhaltsgleichheit der in der Relation des Zerlegungssatzes beidseitig stehenden Polyeder, wonach

$$J(P) = \xi^3 - \eta^3 + \sum (\alpha_\tau^3 - \beta_\tau^3)\, J(A_\tau) \tag{14}$$

gelten muß. In Verbindung mit $\xi\,\eta = 0$ ergeben sich die fraglichen Koeffizienten eindeutig.

Wir haben nur die Existenz einer derartigen Zerlegungsbasis mit Anwendung des Wohlordnungssatzes nachgewiesen, ohne über ihre Struktur irgendeinen Aufschluß geben zu können. So ist noch nichts bekannt über die Mächtigkeit der Basispolyedermenge. Es ist an und für sich wohl denkbar, daß sie endlich ist und auf irgendeine Weise mit der endlichen Zahl der wesentlichen Parameter, die ein allgemeines Tetraeder bewegungsinvariant charakterisieren, zusammenhängt.

Es soll eventuellen späteren Arbeiten vorbehalten bleiben, auf diese Probleme näher einzutreten sowie Folgerungen verschiedener Art aus dem Zerlegungssatz zu ziehen. Es soll nur vorläufig erwähnt werden, daß sich beispielsweise ein von *J.P.Sydler* bewiesener Satz[13]) unmittelbar ablesen läßt, wonach es eine Schar inhaltsgleicher Polyeder von der Mächtigkeit des Kontinuums so gibt, daß diese paarweise nicht zerlegungsgleich sind. Es ist dies eine Verschärfung einer von *M.Dehn* gemachten Aussage[14]).

Abschließend wollen wir durch einen Zusatz eine einfachere Formulierung des Zerlegungssatzes vorschlagen. Hierzu ist erforderlich, daß wir für die Zerlegungsgleichheit eine zu (8) adäquate Konvention treffen. Danach sollen die beiden Relationen

$$P + Q \sim R \longleftrightarrow P \sim R - Q \tag{15}$$

gleichbedeutend sein.

So läßt sich der Zerlegungssatz auf die folgende Form bringen

Zusatz: *Jedes Polyeder P bestimmt eindeutig einen Satz positiver oder negativer Koeffizienten* $(\zeta\,;\gamma_\tau)$, *so daß die Zerlegungsgleichheit*

$$P \sim \zeta E + \sum \gamma_\tau A_\tau$$

besteht, wobei fast alle Koeffizienten des Satzes verschwinden, so daß sich der oben rechts stehende Ausdruck auf eine endliche Summe reduziert.

Der neue Koeffizientensatz $(\zeta\,;\gamma_\tau)$ bestimmt sich aus denjenigen des ursprünglichen Zerlegungssatzes nach den Umrechnungsformeln:

$$\begin{aligned} &\zeta^3 = \xi^3 - \eta^3 + \sum \left[\alpha_\tau^3 - \beta_\tau^3 - (\alpha_\tau - \beta_\tau)^3\right] J(A_\tau)\ ; \\ &\gamma_\tau = \alpha_\tau - \beta_\tau\ . \end{aligned} \tag{16}$$

6. Additive Funktionale

Unter einem additiven Funktional wollen wir im Folgenden ein für alle Polyeder P definiertes Funktional $\varphi(P)$ verstehen, welches die drei nachfolgend aufgeführten Eigenschaften hat:

(A) $\varphi(P) = \varphi(Q)$, falls $P \cong Q$ ist (bewegungsinvariant);
(B) $\varphi(P) + \varphi(Q) = \varphi(P + Q)$ (additiv);
(C) $\varphi(\lambda P)$ ist eine stetige Funktion von λ für $\lambda > 0$.

Die Gesamtheit aller Lösungsfunktionale für (A) bis (C) bildet offenbar eine lineare Mannigfaltigkeit; sie soll mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden.

---

[13]) Vgl. Fußnote [5]).
[14]) *M. Dehn*, Math. Ann. **59**, 84—88, 1904.

Eine triviale Lösung ist durch den elementaren Inhalt

$$\varphi(P) = J(P) \tag{17}$$

gegeben. Wir vermerken noch zwei zusätzliche Eigenschaften dieses Funktionals, nämlich

$$J(E) = 1 \quad \text{und} \quad J(\lambda P) = \lambda^3 J(P) \ . \tag{18}$$

Für die elementare Inhaltstheorie ist es von Interesse, die Frage abzuklären, ob durch die Forderungen (A) und (B), eventuell durch (A), (B) und (C) allein der elementare Inhalt im wesentlichen bereits charakterisiert ist, das heißt ob sich aus den erwähnten postulierten Voraussetzungen auf

$$\varphi(P) = cJ(P) \qquad (-\infty < c < \infty) \tag{19}$$

schließen läßt. Nach dieser an sich plausiblen Annahme wäre demnach $\mathfrak{M}$ identisch mit der eindimensionalen linearen Mannigfaltigkeit der trivialen Lösungen (19). Verf. hat sich längere Zeit vergeblich darum bemüht, einen solchen Nachweis zu erbringen.

Der nunmehr in dieser Arbeit abgeleitete Zerlegungssatz läßt nun aber leicht erkennen, daß es im Gegensatz zu der erwähnten Vermutung nicht triviale Lösungsfunktionale gibt. Er erlaubt sogar, die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ aller Lösungen vollständig zu beschreiben.

Nach dem Zusatz zum Zerlegungssatz gilt nämlich für ein beliebiges Polyeder die Äquivalenz $P \sim \zeta E + \sum \gamma_\tau A_\tau$, wobei die rechts auftretenden Koeffizienten eindeutig durch P bestimmt sind. Für ein fest gewähltes τ ist somit $\gamma_\tau = \chi_\tau(P)$ ein eindeutiges Funktional von P. Im Hinblick auf die Additions- und Eindeutigkeitssätze [vgl. (VII*) und (IX*)] ergibt sich, daß das Funktional

$$\varphi(P) = \chi_\tau(P) \tag{20}$$

den drei Forderungen (A), (B) und (C) genügt. Wir vermerken noch zwei zusätzliche Eigenschaften, nämlich

$$\chi_\tau(E) = 0 \quad \text{und} \quad \chi_\tau(\lambda P) = \lambda\, \chi_\tau(P) \ . \tag{21}$$

Jedes τ gibt Anlaß zur Bildung des Funktionals $\chi_\tau(P)$. Die „Anzahl" der verschiedenen nach Ansatz (20) gegebenen Lösungen ist somit gleich derjenigen der Basispolyeder, welche die Zerlegungsbasis enthält. Da diese wie früher erörtert sicher nicht leer ist, gibt es sicher wenigstens eine solche Lösung.

Wir behaupten jetzt den folgenden

Funktionalsatz: *Ist $\varphi(P)$ ein bewegungsinvariantes, additives und stetiges Polyederfunktional, das also Eigenschaften besitzt, die durch (A), (B) und (C) näher erklärt sind, so gibt es einen eindeutig bestimmten Koeffizientensatz $(c\,;c_\tau)$ so, daß*

$$\varphi(P) = cJ(P) + \sum c_\tau\,\chi_\tau(P) \qquad (-\infty < c, c_\tau < \infty)$$

ist. Hierbei bezeichnen $J(P)$ den elementaren Inhalt und $\chi_\tau(P)$ die durch Ansatz (20) eingeführten linearen Funktionale. Für ein festes Polyeder P verschwinden die Funktionalwerte $\chi_\tau(P)$ für fast alle τ, so daß sich der oben rechts stehende Ausdruck auf eine endliche Summe reduziert. Die nicht trivialen Zusatzfunktionale $\chi_\tau(P)$ verschwinden für den Würfel und für jedes mit einem solchen zerlegungsgleichen Polyeder.

Beweis. Wir setzen ausgehend vom Einheitswürfel E zunächst $\varphi(\lambda E) = f(\lambda)$. Die Eigenschaften (A) und (B) lassen aus der üblichen Zerlegungsmöglichkeit eines Würfels in kleinere für ganze $p, q \geqq 1$ vorerst die Beziehungen $f\left(\frac{1}{q}\right) = \left(\frac{1}{q}\right)^3 f(1)$, dann $f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^3 f(1)$ und endlich im Hinblick auf (C) $f(\lambda) = f(1)\lambda^3$ hervorgehen. Setzt man $f(1) = c$, so hat man

$$\varphi(\lambda E) = cJ(\lambda E)\ . \tag{22}$$

Nun bilden wir ein neues Funktional durch den Ansatz

$$\Psi(P) = \varphi(P) - cJ(P)\ . \tag{23}$$

Dieses hat offenbar ebenfalls die verlangten Eigenschaften (A), (B) und (C) und außerdem ist wegen (22) $\Psi(\lambda E) = 0$. Darnach hat man für $P \approx Q$ (zerlegungsgleich mod. E) $\Psi(P) = \Psi(Q)$. Setzt man jetzt $\Psi(\lambda P) = F(\lambda)$ für ein festgewähltes P, so hat man wegen (VII*) (c) die Beziehung $F(x) + F(y) = F(x+y)$ und mit erneuter Beanspruchung von (C) also $F(x) = F(1)x$, so daß $\Psi(\lambda P) = \lambda\,\Psi(P)$ gilt. — Weiter ist nach dem Zusatz zum Zerlegungssatz $\Psi(P) = \sum \gamma_\tau\,\Psi(A_\tau)$. Nun ist nach (20) $\gamma_\tau = \chi_\tau(P)$ und wenn noch $\Psi(A_\tau) = c_\tau$ gesetzt wird, erreicht man

$$\Psi(P) = \sum c_\tau\,\chi_\tau(P)\ . \tag{24}$$

Nach Rückblick auf (23) folgt so

$$\varphi(P) = cJ(P) + \sum c_\tau\,\chi_\tau(P)\ . \tag{25}$$

Damit ist der wesentliche Teil der Behauptung des Funktionalsatzes bewiesen. Die übrigen ergänzenden Aussagen ergeben sich aus der Beweiskonstruktion, aus (21) und aus dem genannten Wortlaut des Zusatzes.

7. Notwendige und hinreichende Bedingungen für Zerlegungsgleichheit

Der im vorstehenden Abschnitt bewiesene Funktionalsatz gibt eine vollständige Charakterisierung der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der Lösungsfunktionale zu den Bedingungen (A), (B) und (C).

Es zeigt sich nun, daß genau die Funktionale dieser Mannigfaltigkeit für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder von entscheidender Bedeutung sind. Wir formulieren das folgende

Kriterium : *Notwendig und hinreichend dafür, daß die beiden Polyeder P und Q äquivalent oder zerlegungsgleich sind, ist das simultane Bestehen der folgenden Relationen* :

$$\text{(a)} \quad J(P) = J(Q)\,; \qquad \text{(b)} \quad \chi_\tau(P) = \chi_\tau(Q) \qquad \text{für alle } \tau\,.$$

Beweis. Die Notwendigkeit ergibt sich leicht aus der Tatsache, daß die im Kriterium genannten Funktionale bewegungsinvariant und additiv sind. Das Hinreichen ergibt sich so : Wegen den Gleichheiten (b) haben P und Q übereinstimmende Koeffizienten γ_τ gemäß Zusatz zum Zerlegungssatz. Wegen der Gleichheit (a) sind auch die Koeffizienten ζ gleich. Im Zerlegungssatz weisen somit die beiden Polyeder P und Q identische Koeffizientensätze $(\xi\,;\alpha_\tau)$ und $(\eta\,;\beta_\tau)$ auf. So schließt man zunächst auf

$$P + \eta E + \sum \beta_\tau A_\tau \sim Q + \eta E + \sum \beta_\tau A_\tau$$

und sodann nach (IV) auf $P \sim Q$, was zu zeigen war.

(Eingegangen den 17. August 1949.)