Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 24 (1950)

Artikel: Die 1. Variation der Maßzahlen eines Elementarkegels.
Autor: Bieri, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20310

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

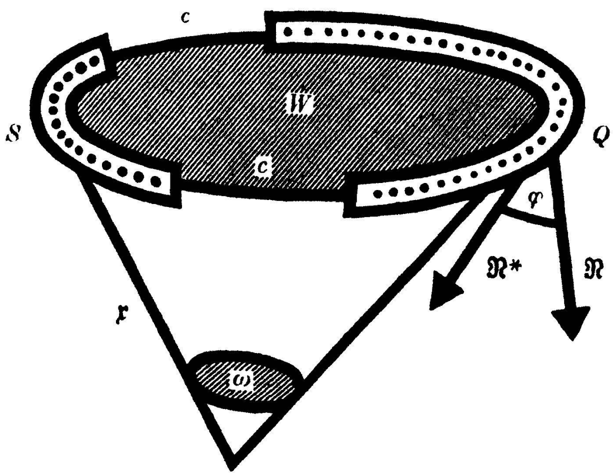
Die 1. Variation der Maßzahlen eines Elementarkegels

Von H. Bieri, Bern

Zahlreiche Probleme der Flächentheorie sowie der Theorie der konvexen Körper können als Variationsprobleme aufgefaßt werden, insbesondere das fundamentale Problem der konvexen Grenzkörper[1]). Soll dieser Standpunkt greifbare Resultate zeitigen, so müssen in erster Linie die analytischen Ausdrücke für die erste Variation aller vorkommenden Größen zur Verfügung stehen. Nach meinen Wahrnehmungen bestehen in der Literatur diesbezügliche Lücken, die es zu schließen gilt.

Wir betrachten konvexe Körper, die von jedem nicht im Äußern gelegenen Punkte O aus in Elementarkegel aufteilbar sind[2])[3]).

Einen derartigen Elementarkegel beschreiben wir durch die fünf Maßzahlen Volumen V, Oberfläche F, Integral der mittlern Krümmung M, Bogenlänge der Begrenzungskurve s, räumlicher Winkel ω (Abb. 1).



Unter F soll nur die Fläche der von c aufgespannten Membran verstanden werden. $\mathfrak{N}$ sei der Einheitsvektor in Richtung der innern Normalen von W, $\mathfrak{N}^*$ der Einheitsvektor in Richtung der innern Normalen des durch c laufenden Streifens S im Punkte Q. Es treten jetzt folgende Formeln der Differentialgeometrie in Kraft:

---

[1]) *H. Hadwiger*, Über eine fehlende Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper. Elemente der Mathematik, Bd. II, Nr. 3.

[2]) Vergleiche *W. Scherrer*, Integralsätze der Flächentheorie, Commentarii, Vol. 19, Fasc. sekundus, S. 110.

[3]) Dank der implicite getroffenen starken Voraussetzungen über Oberfläche und Kanten des konvexen Körpers kann der Formelapparat der Differentialgeometrie im gewünschten Umfang angewendet werden. Eine Beeinträchtigung der Allgemeinheit findet nicht statt, kann doch der allgemeinste konvexe Körper durch abzählbar unendlich viele Elementarkegel simultan in allen drei Maßzahlen V, F und M approximiert werden.

$$\text{I.} \quad F = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \quad ^{4)}$$

$$\text{II.} \quad V = \tfrac{1}{3} \iint P \cdot dF \ ; \qquad P = -\mathfrak{N}\mathfrak{x} \ \text{(Stützfunktion)}$$

$$\text{III.} \quad M = M_1 + M_2$$

$$\text{a)} \ M_1 = \iint H \cdot dF \ ; \quad H = \text{mittlere Krümmung}$$

$$\text{b)} \ M_2 = \tfrac{1}{2} \int \varphi \cdot ds \ ; \qquad \varphi = \arccos (\mathfrak{N}\mathfrak{N}^*)$$

$$\text{IV.} \quad s = \int \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\,\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt$$

$$\text{V.} \quad \omega = \iint \frac{P \cdot dF}{(\mathfrak{x}^2)^{3/2}} \ . \quad ^{5)}$$

Vermittelst des Ansatzes

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varepsilon \{p(u,v)\,\mathfrak{x}_u + q(u,v)\,\mathfrak{x}_v + n(u,v)\,\mathfrak{N}\} \ ; \qquad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0 \tag{1}$$

erreicht man vom extremalen Elementarkegel aus, sofern nur den varierenden Funktionen n, p und q passende Beschränkungen auferlegt werden, alle zulässigen Vergleichsgebilde. Wir setzen, wie es üblich ist,

$$\delta = \varepsilon \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon = 0}$$

und wenden diese Operation auf die Fundamentalgrößen an. Als Parameter werden zweckmäßig Krümmungslinienparameter gewählt.

$$\text{I.} \quad \delta F = -\varepsilon \iint n \cdot 2H \cdot dF - \varepsilon \underset{\rightarrow}{\oint} \sqrt{EG}\,(p\,dv - q\,du)\,^{6)} \ . \tag{2}$$

II. Die Normalvariation des Volumens eines Eikörpers findet sich bei Blaschke, S. 248, die Normalvariation des Volumens eines Elementarkegels (Sektorkörper) in der unter Fußnote [2]) zitierten Arbeit. Wir müssen also weiter ausholen. Aus 1) folgt:

$$\bar{\mathfrak{x}}[\bar{\mathfrak{x}}_u\,,\ \bar{\mathfrak{x}}_v] = \mathfrak{x}[\mathfrak{x}_u\,,\ \mathfrak{x}_v] + \varepsilon \cdot \Phi(u,v) \ ;$$

---

[4]) Die Bezeichnungen sind übernommen aus: *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3. Aufl., sowie aus der unter Fußnote [2]) zitierten Arbeit (zitiert wird künftig mit Blaschke, Scherrer).

[5]) Vergleiche *W. Scherrer*, Geometrische Deutung des Gaußschen Verschlingungsintegrals, Commentarii, Vol. 5, Fasc. primus, S. 25.

[6]) *Blaschke*, S. 241—243.

$$\Phi = \left\{ \left(p_u + q_v + \frac{E_u \cdot p + E_v \cdot q - 2L \cdot n}{2E} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{G_u \cdot p + G_v \cdot q - 2N \cdot n}{2G} \right) \mathfrak{x} [\mathfrak{x}_u , \mathfrak{x}_v] \right\} +$$

$$+ \left\{ (n_v + q \cdot N) \mathfrak{x} [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{N}] + (n_u + p \cdot L) \mathfrak{x} [\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_v] + n \cdot \sqrt{EG} \right\} .$$

Wegen $\overline{V} = - \frac{1}{3} \int\int \overline{\mathfrak{x}} [\overline{\mathfrak{x}}_u , \overline{\mathfrak{x}}_v] \; du \, dv$, unter Berücksichtigung der beiden Identitäten

$$L . \mathfrak{P} \mathfrak{x}_v + \sqrt{EG} \cdot P_u \equiv 0 \quad ; \quad N \cdot \mathfrak{P} \mathfrak{x}_u - \sqrt{EG} \cdot P_v \equiv 0$$

$$\mathfrak{P} = - [\mathfrak{N}, \mathfrak{x}] \qquad \text{(Stützvektor)[7]}$$

und nach Ausführung einiger Zwischenrechnungen erhält man:

$$\delta V = - \varepsilon \int\int n \cdot dF - \frac{\varepsilon}{3} \oint_{\rightarrow} n \cdot \mathfrak{P} \dot{\mathfrak{x}} \cdot dt - \frac{\varepsilon}{3} \oint_{\rightarrow} P \sqrt{EG} (p dv - q du) . \tag{3}$$

III. a) Blaschke gibt S. 258 die erste Normalvariation von H mit $\delta_n H = (2H^2 - K)\, n + \frac{1}{2} \cdot \Delta(n)$ an. Δ bedeutet den zweiten Differentialparameter von Beltrami[8]). Es folgt:

$$\delta_n M_1 = - \varepsilon \int\int \{ n \cdot K - \tfrac{1}{2} \cdot \Delta(n) \} \, dF \quad ; \quad K = \text{Gaußsche Krümmung.}$$

Zwecks Berechnung der Tangentialvariation gehen wir aus von

$$\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varepsilon \cdot p \mathfrak{x}_u \tag{1a}$$

und erhalten:

$$\overline{\mathfrak{N}} = \frac{\mathfrak{N} + \varepsilon \left\{ \left(p_u + \frac{E_u}{2E} \cdot p + \frac{G_u}{2G} \cdot p \right) \mathfrak{N} - p \cdot \varkappa^{(1)} \cdot \mathfrak{x}_u \right\}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \left(p_u + \frac{E_u}{2E} \cdot p + \frac{G_u}{2G} \cdot p \right)}}$$

$$\overline{E} = E \left\{ 1 + 2\varepsilon \left(p_u + \frac{E_u}{2E} \right) \right\} ; \quad \overline{G} = G \left\{ 1 + 2\varepsilon \cdot \frac{G_u}{2G} \cdot p \right\}$$

$$\overline{L} = \left\{ L + \varepsilon \left\{ L \left(3 p_u + \frac{E_u}{E} \cdot p + \frac{G_u}{2G} \cdot p \right) + p \cdot L_u - p \cdot \varkappa^{(1)} \cdot \frac{E_u}{2} \right\} \right\} : \sqrt{}$$

$$\overline{N} = \left\{ N + \varepsilon \left\{ N \left(p_u + \frac{E_u}{2E} \cdot p + \frac{G_u}{G} \cdot p \right) \qquad + p \cdot \varkappa^{(1)} \cdot \frac{G_u}{2} \right\} \right\} : \sqrt{}$$

---

[7]) *Scherrer*, S. 106. [8]) *Blaschke*, S. 172—173.

$$2\overline{H} = \left\{2H + \varepsilon\left\{2H \cdot p_u + p\left(\varkappa^{(1)} \cdot \frac{G_u}{G} - \varkappa^{(1)} \cdot \frac{E_u}{2E} + \varkappa^{(2)} \cdot \frac{E_u}{2E} + \frac{L_u}{E}\right)\right\}\right\} : \sqrt{}$$ [9])

$$\iint 2\overline{H} \cdot \sqrt{\overline{E}\,\overline{G}}\, du\, dv = \iint 2H \cdot dF - \varepsilon \oint_{\rightarrow} 2H \cdot \sqrt{EG} \cdot p\, dv -$$
$$- \varepsilon \iint p \Big\{ [(\varkappa^{(1)} + \varkappa^{(2)})\sqrt{EG}]_u -$$
$$- \left[\varkappa^{(1)} \cdot \frac{G_u}{G} - \varkappa^{(1)} \cdot \frac{E_u}{2E} + \varkappa^{(2)} \cdot \frac{E_u}{2E} + \frac{L_u}{E}\right]\sqrt{EG} \Big\}\, du\, dv\,;$$

$\varkappa^{(1)}$, $\varkappa^{(2)}$ = Hauptkrümmungen.

Das Ergebnis einer analogen, von

$$\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varepsilon \cdot q\, \mathfrak{x}_v \tag{1b}$$

ausgehenden Rechnung ist

$$\iint 2\overline{H} \cdot \sqrt{\overline{E}\,\overline{G}}\, du\, dv = \iint 2H \cdot dF + \varepsilon \oint_{\rightarrow} 2H \cdot \sqrt{EG} \cdot q\, du -$$
$$- \varepsilon \iint q \Big\{ [(\varkappa^{(1)} + \varkappa^{(2)})\sqrt{EG}]_v -$$
$$- \left[\varkappa^{(2)} \cdot \frac{E_v}{E} - \varkappa^{(2)} \cdot \frac{G_v}{2G} + \varkappa^{(1)} \cdot \frac{G_v}{2G} + \frac{N_v}{G}\right]\sqrt{EG} \Big\}\, du\, dv\,.$$

Nun verschwinden aber in den Doppelintegralen die Koeffizienten von p und q identisch, da sie mit den linken Seiten der Codazzischen Gleichungen übereinstimmen[10]). Somit gilt abschließend

$$\delta M_1 = -\varepsilon \iint \{n \cdot K - \tfrac{1}{2} \cdot \varDelta(n)\}\, dF - \varepsilon \oint_{\rightarrow} H \sqrt{EG}\,(p\, dv - q\, du)\,. \tag{4}$$

IV. Es hat sich herausgestellt, daß die 1. Variation von M_2 am bequemsten zu berechnen ist, wenn der Formelapparat der invarianten Ableitungen benützt wird[11]). Da ds mit M_2 innig verknüpft ist, führen wir denselben schon an dieser Stelle ein, gehen also aus von

$$\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varepsilon\{p \cdot \mathfrak{x}_1 + q \cdot \mathfrak{x}_2 + n \cdot \mathfrak{N}\}\,. \tag{1c}$$

---

[9]) Die Terme $\overline{F}^2$, $-2\overline{M}\,\overline{F}$ dürfen weggelassen werden, da die Entwicklung nach Potenzen von ε mit ε^2 beginnt und somit zur ersten Variation nichts beigesteuert wird.

[10]) *Blaschke*, S. 134—139. Die innige Verknüpfung des Variationsproblems $\iint H\, dF$ = Extremum mit den Codazzischen Gleichungen ist bemerkenswert.

[11]) *Blaschke*, S. 123—139.

Es gilt dann:

$$\bar{\mathfrak{x}}_1 = \mathfrak{x}_1 + \varepsilon \{ (p_1 + q \cdot \varkappa_g^{(u)} - n \cdot \varkappa^{(1)}) \mathfrak{x}_1 + (q_1 - p \cdot \varkappa_g^{(u)}) \mathfrak{x}_2 + (n_1 + p \cdot \varkappa^{(1)}) \mathfrak{N} \}$$

$$\bar{\mathfrak{x}}_2 = \mathfrak{x}_2 + \varepsilon \{ (q_2 + p \cdot \varkappa_g^{(v)} - n \cdot \varkappa^{(2)}) \mathfrak{x}_2 + (p_2 - q \cdot \varkappa_g^{(v)}) \mathfrak{x}_1 + (n_2 + q \cdot \varkappa^{(2)}) \mathfrak{N} \}$$

$\varkappa_g^{(u)}, \varkappa_g^{(v)}$ = geodätische Krümmungen der Parameterlinien,

und mit diesen Daten gewinnt man die Formel

$$\begin{aligned} \delta s = \varepsilon & \int (p_1 + q \cdot \varkappa_g^{(u)} - n \cdot \varkappa^{(1)}) \frac{ds_1}{\sqrt{ds_1^2 + ds_2^2}} \cdot ds_1 \\ + \varepsilon & \int (q_2 + p \cdot \varkappa_g^{(v)} - n \cdot \varkappa^{(2)}) \frac{ds_2}{\sqrt{ds_1^2 + ds_2^2}} \cdot ds_2 \\ + \varepsilon & \int p_2 + q_1 - q \cdot \varkappa_g^{(v)} - p \cdot \varkappa_g^{(u)}) \cdot \frac{ds_1 \cdot ds_2}{\sqrt{ds_1^2 + ds_2^2}} \,. \end{aligned} \tag{5}$$

III. b) Die Berechnung der 1. Variation von M_2 macht am meisten Mühe. In der Tat muß hier nicht nur die Membran W, sondern auch der Streifen S variiert werden, und zwar so, daß er der Kurve c beständig aufliegt (Abb. 1). Infolgedessen setzen wir an:

$$\begin{aligned} &\text{Membran:} && \bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varepsilon \{ p\, \mathfrak{x}_1 + q\, \mathfrak{x}_2 + n\, \mathfrak{N} \} \\ &\text{Streifen:} && \bar{\mathfrak{x}}^* = \mathfrak{x}^* + \varepsilon \{ p^*\, \mathfrak{x}_1^* + q^*\, \mathfrak{x}_2^* + n^*\, \mathfrak{N}^* \} \end{aligned}$$

Die erwähnten Kontaktbedingungen lauten:

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}\,; \quad \bar{\mathfrak{x}}^* = \bar{\mathfrak{x}}\,; \quad p^*\, \mathfrak{x}_1^* + q^*\, \mathfrak{x}_2^* + n^*\, \mathfrak{N}^* = p\, \mathfrak{x}_1 + q\, \mathfrak{x}_2 + n\, \mathfrak{N}\ ^{12)} \,.$$

Die varierenden Funktionen des Streifens können nun mühelos berechnet werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} p^* &= p \cdot \mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_1^* + q \cdot \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{x}_1^* + n \cdot \mathfrak{N}\, \mathfrak{x}_1^* \\ q^* &= p \cdot \mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2^* + q \cdot \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{x}_2^* + n \cdot \mathfrak{N}\, \mathfrak{x}_2^* \\ n^* &= p \cdot \mathfrak{x}_1\, \mathfrak{N}^* + q \cdot \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{N}^* + n \cdot \mathfrak{N}\, \mathfrak{N}^* \end{aligned}$$

Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} [\bar{\mathfrak{x}}_1, \bar{\mathfrak{x}}_2] &= \mathfrak{N} + \varepsilon \{ \mathfrak{N} (p_1 + q_2 + q \cdot \varkappa_g^{(u)} + p \cdot \varkappa_g^{(v)} - n \cdot 2H) \} \\ &\quad - \varepsilon \{ \mathfrak{x}_2 (n_2 + q \cdot \varkappa^{(2)}) + \mathfrak{x}_1 (n_1 + p \cdot \varkappa^{(1)}) \} \\ [\bar{\mathfrak{x}}_1, \bar{\mathfrak{x}}_2]^2 &= 1 + 2\varepsilon \{ p_1 + q_2 + q \cdot \varkappa_g^{(u)} + p \cdot \varkappa_g^{(v)} - n \cdot 2H \} \end{aligned}$$

---

[12]) Dies gilt natürlich nur längs c. Zwecks Entlastung des Druckes sei auf einen diesbezüglichen Index verzichtet.

$$\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N} - \varepsilon\{\mathfrak{x}_2(n_2 + q\cdot\varkappa^{(2)}) + \mathfrak{x}_1(n_1 + p\cdot\varkappa^{(1)})\}$$

$$\overline{\mathfrak{N}}\,\overline{\mathfrak{N}}^* = \mathfrak{N}\,\mathfrak{N}^* - \varepsilon\cdot\Phi(u, v)\,;$$

$$\Phi = \mathfrak{N}\,\mathfrak{x}_2^*(n_2^* + q^*\cdot\varkappa^{*(2)}) + \mathfrak{x}_2\,\mathfrak{N}^*(n_2 + q\cdot\varkappa^{(2)}) + \mathfrak{N}\,\mathfrak{x}_1^*(n_1^* + p^*\cdot\varkappa^{*(1)}) + \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{N}^*(n_1 + p\cdot\varkappa^{(1)})$$

Nun ist nach Definition $M_2 = \frac{1}{2}\int \arccos(\mathfrak{N}\mathfrak{N}^*)\,ds$, mithin

$$\delta M_2 = \tfrac{1}{2}\int \arccos(\mathfrak{N}\mathfrak{N}^*)\,\delta\,ds + \tfrac{1}{2}\int \delta\arccos(\mathfrak{N}\mathfrak{N}^*)\,ds$$

oder soweit als tunlich ausgerechnet:

$$\delta M_2 = \frac{\varepsilon}{2}(J_1 + J_2 + J_3)\,;$$

$$J_1 = \int \varphi\cdot\delta\,ds$$

$$J_2 = -\int \frac{1}{\sin\varphi}\{\mathfrak{N}\,\mathfrak{x}_2^*(n_2^* + q^*\cdot\varkappa^{*(2)}) + \mathfrak{x}_2\mathfrak{N}^*(n_2 + q\cdot\varkappa^{(2)})\}\,ds$$

$$J_3 = -\int \frac{1}{\sin\varphi}\{\mathfrak{N}\,\mathfrak{x}_1^*(n_1^* + p^*\cdot\varkappa^{*(1)}) + \mathfrak{x}_1\mathfrak{N}^*(n_1 + p\cdot\varkappa^{(1)})\}\,ds$$

V. Der räumliche Winkel ω nimmt eine Sonderstellung ein, indem er gegenüber Ähnlichkeitstransformationen invariant bleibt. In der Tat läßt sich mühelos zeigen, daß mit $\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varepsilon\{m(u, v)\,\mathfrak{x}\}$ die 1. Variation verschwindet. Mit dem Ansatz gemäß (1) berechnet man nach dem Muster von II:

$$\delta\omega = -3\varepsilon\int\!\!\int n\,\frac{(\mathfrak{x}^2 - P^2)}{(\mathfrak{x}^2)^{5/2}}\,dF + 3\varepsilon\int\!\!\int \frac{P}{(\mathfrak{x}^2)^{5/2}}(p\cdot\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_u + q\cdot\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_v)\,dF - \varepsilon\underset{\rightarrow}{\oint} n\cdot\frac{\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{x}}}{(\mathfrak{x}^2)^{3/2}}\cdot dt - \varepsilon\underset{\rightarrow}{\oint}\frac{P\sqrt{EG}}{(\mathfrak{x}^2)^{3/2}}(p\,dv - q\,du)\,\cdot \qquad (10)$$

Nachträglich hat sich herausgestellt, daß auch Variationen von der Form $\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varepsilon\{m(u, v)\,\mathfrak{x}\}$ hedeutungsvoll sind.

(Eingegangen den 30. Oktober 1949.)