Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 24 (1950)

Artikel: Über die Randwerte meromorpher Funktionen und hinreichende Bedingungen für Regularität von Funktionen einer komplexen Variablen.

Autor: Meier, Kurt E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20311

Über die Randwerte meromorpher Funktionen und hinreichende Bedingungen für Regularität von Funktionen einer komplexen Variablen

Von Kurt E. Meier, Zürich

EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Teile, welche scheinbar nur wenig Beziehung zueinander haben; jedoch rechtfertigt sich die gemeinsame Darstellung der darin enthaltenen Resultate dadurch, daß sie aus eng verwandten Fragestellungen hervorgehen, ähnliche Begriffe verwenden und fast mit denselben Mitteln gewonnen werden können.

Der erste Teil gibt einen Beitrag zum bekannten Satz von Fatou, welcher aussagt, daß eine im Innern des Einheitskreises $|z| < 1$ reguläre und beschränkte analytische Funktion $f(z)$ fast überall auf dem Rand $|z| = 1$ Winkel-Grenzwerte besitzt. Der vorliegende Satz schließt sich an eine von A. Pleßner [1] herrührende Verschärfung des Fatouschen Satzes an, welche sich auf meromorphe Funktionen bezieht.

Sodann stellen wir Bedingungen an die Randwerte meromorpher Funktionen, welche zur Folge haben, daß eine analytische Fortsetzung über gewisse Randpunkte des Definitionsgebietes dieser Funktionen hinaus möglich ist. Es handelt sich dabei um eine Verschärfung eines Satzes von F. Wolf [2] und einige einfache Anwendungen der Beweismethode auf das Schwarzsche Spiegelungsprinzip.

Als Grundgebiete habe ich in diesen Sätzen Gebiete gewählt, deren Rand ein Intervall der reellen Achse enthält; die meisten Begriffsbildungen und Beweise lassen sich aber mühelos auf den Fall beliebiger Gebiete übertragen, welche von rektifizierbaren Kurven berandet werden.

Der zweite Teil enthält sogenannte Regularitätsbedingungen, das heißt hinreichende Bedingungen dafür, daß eine im Gebiet G eindeutig definierte komplexe Funktion, im ganzen Gebiet G, oder doch wenigstens in einem Teilgebiet desselben, regulär analytisch ist.

Es deckt sich hier eine gewisse Analogie zu Sätzen des ersten Teils auf, indem viele Beweisgedanken in fast unveränderter Form übernommen werden können.

Der zweite Teil schließt mit einer Regularitätsbedingung, welche Resultate von J. Ridder [3] und S. Kametani [4] enthält, und aus der sich leicht eine von P. T. Maker [5] angegebene Verschärfung des Satzes von Morera herleiten läßt.

In allen diesen Sätzen handelt es sich in erster Linie darum, mit einem Mindestmaß an Voraussetzungen auszukommen.

Als mengentheoretisches Hilfsmittel tritt im folgenden wiederholt ein Satz von R. Baire auf [1]:

Wenn sich ein vollständiger metrischer Raum E als Vereinigungsmenge abzählbar vieler Teilmengen darstellen läßt: $E = \Sigma E_n$, so enthält mindestens eine der abgeschlossenen Hüllen $\overline{E}_n$ eine volle Kugel.

Es ist noch zu bemerken, daß sämtliche Integrale im Lebesgueschen Sinn zu verstehen sind, und demgemäß bedeutet die Ausdrucksweise, eine gewisse Bedingung sei in einem Gebiet „fast überall" erfüllt, daß die Menge der Ausnahmepunkte das Lebesguesche Maß 0 besitzt.

I. ÜBER DIE RANDWERTE MEROMORPHER FUNKTIONEN

A. Zum Satz von Fatou

1. Begriffe und Bezeichnungen. Die Funktion $f(z)$ sei meromorph in einem Gebiet G der oberen Halbebene, dessen Rand ein Intervall $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ der reellen Achse enthält.

Mit $s(\xi, \alpha)$ $(\xi \in [x_1, x_2],\ 0 < \alpha < \pi)$ bezeichnen wir den von ξ ausgehenden Strahl, dessen Punkte z durch

$$z = \xi + r \cdot e^{i\alpha}\ , \qquad r > 0$$

charakterisiert sind. Die zu diesem Strahl gehörige Bild-Häufungsmenge $S(\xi, \alpha)$ sei folgendermaßen definiert:

Die komplexe Zahl a sei dann und nur dann Element von $S(\xi, \alpha)$, falls eine auf $s(\xi, \alpha)$ gegen ξ konvergierende Punktfolge $z_1, z_2, \ldots$ existiert, so daß

$$\lim_{k \to \infty} f(z_k) = a\ .$$

---

[1]) Der obige Satz ist ein Spezialfall eines allgemeineren Theorems von R. Baire. Vgl. [6], S. 54.

$CS(\xi, \alpha)$ sei das Komplement von $S(\xi, \alpha)$ in bezug auf die Vollebene $\boldsymbol{E}$.

Wir bezeichnen ferner mit $w(\xi ; \alpha, \beta)$ $(0<\alpha<\beta<\pi)$ den Winkelraum, dessen Punkte

$$z = \xi + r \cdot e^{i\varphi}$$

den Bedingungen

$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \,, \qquad r>0$$

genügen, und $W(\xi ; \alpha, \beta)$ sei wieder die zugehörige Bild-Häufungsmenge.

2. Pleßner [1] hat den Fatouschen Satz folgendermaßen verschärft:

Satz von Pleßner. Voraussetzung: $f(z)$ sei meromorph in G.

Behauptung: Es existiert eine Menge $Z \subseteqq [x_1, x_2]$ vom Maß 0, so daß in allen Punkten $\xi \in [x_1, x_2] - Z$ einer der folgenden Fälle zutrifft:

1) $f(z)$ besitzt in ξ einen Winkel-Grenzwert.

2) Jede Bild-Häufungsmenge $W(\xi ; \alpha, \beta)$ $(0<\alpha<\beta<\pi)$ ist identisch mit der Vollebene.

In diesem Abschnitt beweise ich folgenden

Satz 1. Voraussetzung: $f(z)$ meromorph in G $(\not\equiv \infty)$.

Behauptung: Es existiert eine Teilmenge $Z \subseteqq [x_1, x_2]$ vom Maß 0, so daß für jedes $\xi \in [x_1, x_2] - Z$ einer der folgenden Fälle zutrifft:

1) $f(z)$ hat in ξ einen Winkel-Grenzwert [2]).

2) $f(z)$ nimmt in jedem Winkelraum $w(\xi, \alpha, \beta)$ $(0<\alpha<\beta<\pi)$ jeden Wert $c \in CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta)$ unendlich oft an.

Der Satz von Pleßner ist in Satz 1 enthalten: Tritt nämlich im Punkt $\xi \in [x_1, x_2] - Z$ der Fall 2 des Satzes 1 ein, so hat man $W(\xi, \alpha, \beta) \supseteqq CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta)$, und dazu, wie in jedem Punkt $\xi \in [x_1, x_2]$, $W(\xi, \alpha, \beta) \supseteqq S(\xi, \alpha) + S(\xi, \beta)$, also $W(\xi, \alpha, \beta) \supseteqq S(\xi, \alpha) + S(\xi, \beta) + CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta)$. Es gilt aber immer $CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta) = C[S(\xi, \alpha) + S(\xi, \beta)]$ und damit schließt man sofort $W(\xi, \alpha, \beta) = E$, d. h. im Punkt ξ tritt der Fall 2 des Satzes von Pleßner ein.

Der Satz 1 enthält neben dem Satz von Pleßner z. B. folgenden *Spezialfall.* Voraussetzungen:

---

[2]) Nach einem Satz von Lusin und Privaloff [7] hat die Menge der Punkte $\xi \in [x_1, x_2]$, wo $f(z)$ einen unendlichen Winkel-Grenzwert besitzt, das Maß $0 \cdot (f(z) \not\equiv \infty)$. Man kann also statt 1 setzen: 1′) $f(z)$ hat in ξ einen endlichen Winkel-Grenzwert.

1) $f(z)$ sei in G holomorph.

2) Zu jedem Punkt ξ einer beliebigen Menge $M \subseteq [x_1, x_2]$ existieren zwei Strahlen $s(\xi, \alpha)$, $s(\xi, \beta)$ $(\alpha < \beta)$, auf welchen $f(z)$ beschränkt ist.

Behauptung : In fast allen Punkten $\xi \in M$ hat $f(z)$ einen (endlichen) Winkel-Grenzwert.

3. Ein Zusatz zum Satz von Pleßner.

Man kann die Aussage 2 des Satzes von Pleßner folgendermaßen leicht verschärfen : 2′) Es gibt sogar vom Punkt ξ ausgehende Strahlen $s(\xi, \alpha)$, deren zugehörige Bild-Häufungsmenge $S(\xi, \alpha)$ mit der Vollebene identisch ist ; und zwar ist die Menge der Werte α, für welche dies der Fall ist, eine Menge 2. Kategorie bezüglich $(0, \pi)$.

(Der Beweis dieser Bemerkung ergibt sich leicht mit Hilfe des in der Einleitung erwähnten Baireschen Satzes und wird hier nicht durchgeführt.)

4. Beweis zu Satz 1.

a) M sei die Menge aller Punkte $\xi \in [x_1, x_2]$, zu welchen reelle Zahlen α, β, δ existieren $(0 < \alpha < \beta < \pi,\ \delta > 0)$, sowie eine komplexe Zahl c, so daß $CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta) \neq O$, $c \in CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta)$ und $f(z) \neq c$ in allen Punkten $z \neq \xi$ des von den Geraden :

$$z = \xi + r \cdot e^{i\alpha}\,, \quad r > 0\ ; \quad z = \xi + r \cdot e^{i\beta}\,, \quad r > 0\ ; \quad y = \delta$$

begrenzten Dreiecks.

In jedem Punkt $\xi \in [x_1, x_2] - M$ ist die Aussage 2 des Satzes 1 erfüllt : Ist nämlich $w(\xi, \alpha, \beta)$ irgendein Winkelraum eines Punktes $\xi \in [x_1, x_2] - M$, so tritt einer der folgenden Fälle ein :

1) $CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta) = 0$ für diesen Winkelraum, und die Aussage 2 von Satz 1 ist trivialerweise erfüllt.

2) $CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta) \neq 0$. In diesem Fall nimmt $f(z)$ jeden Wert $c \in CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta)$ in $w(\xi, \alpha, \beta)$ beliebig nahe bei ξ an (sonst wäre ja $\xi \in M$). Auch hier ist also die Aussage 2 von Satz 1 erfüllt.

Um Satz 1 zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß $f(z)$ in fast allen Punkten $\xi \in M$ einen Winkel-Grenzwert hat.

b) Wir führen folgende Bezeichnung ein : $w_1 = \infty, w_2, w_3, \ldots$ $(w_k \neq \infty$ für $k \neq 1)$ sei irgendeine Folge von Punkten, welche in der ganzen w-Ebene überall dicht liegen.

Wir denken uns ferner die Tripel $(\varphi, \psi, \vartheta)$ von rationalen Zahlen $(0<\varphi<\psi<\pi,\ 0<\vartheta<1)$ irgendwie numeriert und $(\varphi_\tau, \psi_\tau, \vartheta_\tau)$ sei das Tripel mit der Nummer τ. Unter $D_\tau(\xi)$ verstehen wir nun das Dreieck, welches von den Geraden:

$$z = \xi + r \cdot e^{i\varphi_\tau}, \quad r>0; \quad z = \xi + r \cdot e^{i\psi_\tau}, \quad r>0; \quad y = \vartheta_\tau$$

begrenzt wird. Alle Dreiecke $D_\tau(\xi)$ mit festem τ sind also kongruent.

In ähnlicher Weise bezeichnen wir mit $\Delta(\xi; \alpha, \beta, \delta)$ das Dreieck mit den Begrenzungsgeraden

$$z = \xi + r \cdot e^{i\alpha}, \quad r>0; \quad z = \xi + r \cdot e^{i\beta}, \quad r>0; \quad y = \delta .$$

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen definieren wir nun Mengen $A(\varrho, \sigma, \tau)$ $(\varrho, \sigma, \tau$ natürliche Zahlen$)$:

Der Punkt $\xi \in M$ sei dann und nur dann Element von $A(\varrho, \sigma, \tau)$ (wir setzen zunächst $\varrho \neq 1$ voraus), falls reelle Zahlen α, β, δ existieren $(0<\alpha<\beta<\pi,\ \delta>0)$ und eine komplexe Zahl c mit $|c - w_\varrho| \leqq \frac{1}{3\sigma}$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$\alpha)$ $\quad D_\tau(\xi) \subseteqq \Delta(\xi; \alpha, \beta, \delta)$,

$\beta)$ $\quad |f(z) - w_\varrho| \geqq \frac{1}{\sigma}$ für alle $z \neq \xi$ auf dem Rand von $\Delta(\xi; \alpha, \beta, \delta)$,

$\gamma)$ $\quad f(z) \neq c$ für $z \in \Delta(\xi; \alpha, \beta, \delta),\ z \neq \xi$.

Für den Fall $\varrho = 1$ lauten diese Bedingungen:

$\alpha')$ $\quad \equiv \alpha$,

$\beta')$ $\quad |f(z)| \leqq \sigma$ auf dem Rand von $\Delta(\xi; \alpha, \beta, \delta)$,

$\gamma')$ $\quad f(z) \neq \infty$ für $z \in \Delta,\ z \neq \xi$.

Da die Mengen $CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta)$ ihrer Definition zufolge offen sind, so sieht man leicht ein, daß jeder Punkt $\xi \in M$ mindestens einer der Mengen $A(\varrho, \sigma, \tau)$ angehört (wir setzen im folgenden $c \neq \infty$ voraus. Der Fall $c = \infty$ läßt sich ganz analog behandeln).

Wenn $\xi \in M$ ist, gibt es Werte α, β, δ, c, so daß $S(\xi, \alpha) + S(\xi, \beta) \neq E$, $c \in CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta)$; $f(z) \neq c,\ z \in \Delta(\xi; \alpha, \beta, \delta)$. Da $S(\xi, \alpha) + S(\xi, \beta)$ abgeschlossen ist und c zur Komplementärmenge gehört, gibt es ein $\epsilon>0$, so daß $|f(z) - c| \geqq \epsilon$ auf der Begrenzung des Dreiecks $\Delta(\xi; \alpha, \beta, \delta)$. Gäbe es nämlich auf ihr eine Folge $\{z_k\}$ mit $\lim f(z_k) = c$, so müßten sich die Punkte z_k in ξ häufen. Das ist aber wegen $c \in CS(\xi, \alpha) \cdot CS(\xi, \beta)$ ausgeschlossen. Man wähle dann σ so, daß $\frac{2}{\sigma} < \epsilon$ und ϱ so, daß $|w_\varrho - c| < \frac{1}{3\sigma}$.

Es gilt daher $M = \Sigma A(\varrho, \sigma, \tau)$.

c) Wir erteilen den Parametern ϱ, σ, τ irgendwelche bestimmte Werte r, s, t. Es soll gezeigt werden, daß $f(z)$ in fast allen Punkten $\xi \in A(r,s,t)$ einen Winkel-Grenzwert besitzt. Ist $A(r, s, t)$ vom Maß 0, so ist natürlich nichts zu beweisen.

ξ_0 sei ein nicht-isolierter Wert der Menge $A(r, s, t)$ und $\xi_k \in A(r,s,t)$, $k = 1, 2, \ldots$ eine gegen ihn konvergierende Folge.

Wir denken uns jedem Punkt ξ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ein bestimmtes Dreieck $\Delta_k = \Delta(\xi_k; \alpha_k, \beta_k, \delta_k)$ zugeordnet mit $\varrho = r$, $\sigma = s$, $\tau = t$, $c = c_k$.

Auf dem Rand des Durchschnitts $\Delta_0 \cdot \Delta_k$ $(k \neq 0)$ gilt nun

$$|f(z) - w_r| \geqq \frac{1}{s}$$

und $f(z) \neq c_0$ im Innern. Wegen

$$|c_0 - w_r| \leqq \frac{1}{3s}$$

folgt somit für den Rand von $\Delta_0 \cdot \Delta_k$

$$|f(z) - c_0| \geqq \frac{2}{3s} .$$

Die Funktion

$$\frac{1}{f(z) - c_0}$$

ist nun regulär auf $\Delta_0 \cdot \Delta_k$. Auf dem Rand gilt

$$\left| \frac{1}{f(z) - c_0} \right| \leqq \frac{3s}{2},$$

also auch im Innern. Aus

$$|f(z) - c_0| \geqq \frac{2}{3s} \quad \text{und} \quad |c_0 - w_r| \leqq \frac{1}{3s}$$

folgt somit für $z \in \Delta_0 \cdot \Delta_k$

$$|f(z) - w_r| \geqq \frac{1}{3s} .$$

Wegen $D_t(\xi_k) \subseteqq \Delta_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ überdecken die Mengen $\Delta_0 \cdot \Delta_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ das Innere des Dreiecks $D_t(\xi_0)$ vollständig und daher gilt:

$$|f(z) - w_r| \geqq \frac{1}{3s}, \quad z \in D_t(\xi_0), \quad z \neq \xi_0 .$$

Nun sei $B(r, s, t)$ die Menge der nicht-isolierten Punkte von $A(r,s,t)$. (Die Menge $A - B$ ist abzählbar.) Die abgeschlossene Hülle $\overline{B}$ läßt eine Zerlegung $\overline{B} = P + D$ zu (P perfekter Kern, D abzählbar).

Man sieht nun sofort:

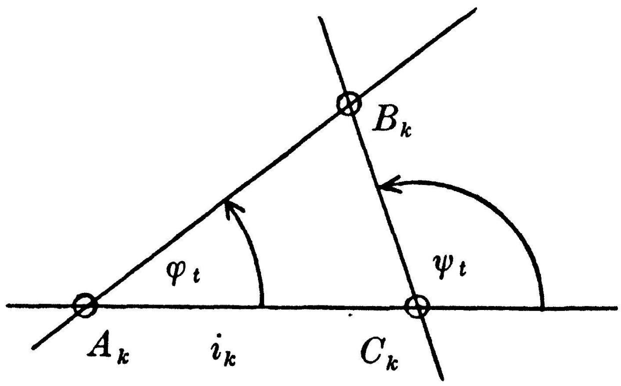
1) P enthält alle Punkte von A bis auf abzählbar viele.

2) In jedem Punkt $\xi \in P$ gilt:

$$|f(z) - w_r| \geqslant \frac{1}{3s}, \quad z \in D_t(\xi), \quad z \neq \xi,$$

d) [3]) Das Komplement $(x_1, x_2) - P$ besteht aus abzählbar vielen offenen Intervallen i_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Γ sei die Kurve, welche in den Punkten $\xi \in P$ mit der x-Achse zusammenfällt, und jedes Intervall $i_k = (A_k, C_k)$ auf dem in der nebenstehenden Figur eingezeichneten Streckenzug $A_k B_k C_k$ überspringt.



Diese Kurve ist rektifizierbar und besitzt daher in fast allen Punkten $\xi \in P$ eine Tangente, welche notwendig mit der x-Achse zusammenfallen muß.

Man erkennt nun leicht, daß die Vereinigungsmenge aller $D_t(\xi)$, $\xi \in P$ in höchstens endlich viele Gebiete $G_1, G_2, \ldots, G_n$ zerfällt, die alle von rektifizierbaren Kurven umschlossen sind. Der Rand jedes Gebietes G_k enthält ein Stück von Γ.

Die Funktion $F(z) = \dfrac{1}{f(z) - w_r}$ ist in jedem Gebiet G_k beschränkt und besitzt daher in fast allen Randpunkten von G_k einen Winkel-Grenzwert.

Jeder Punkt $\xi \in P$ ist aber Randpunkt eines der Gebiete G_k, und daher besitzt $F(z)$ in fast jedem Punkt $\xi \in P$ einen Winkel-Grenzwert in bezug auf eines der Gebiete G_k.

Besitzt Γ in ξ eine Tangente und $f(z)$ einen Winkel-Grenzwert in bezug auf G_k, so auch in bezug auf G. $F(z)$ hat also im Gebiet G in fast jedem Punkte $\xi \in P$ einen Winkel-Grenzwert und dies gilt daher auch für $f(z)$.

---

[3]) Die Methode dieses Abschnitts stammt von J. Privaloff. Man vergleiche die Beweisdarstellung in [7].

e) $f(z)$ besitzt also in fast allen $\xi \in P(r, s, t)$ einen Winkel-Grenzwert, also auch in fast allen $\xi \in A(r, s, t)$. (Der Beweis wurde nur vollständig durchgeführt für $r \neq 1$. Er verläuft für $r = 1$ ganz analog.)

Da wir nur abzählbar viele Mengen $A(\varrho, \sigma, \tau)$ haben, gilt dies auch für fast jedes $\xi \in \Sigma A(\varrho, \sigma, \tau) = M$.

B. Zu einem Satz von F. Wolf

5. Das Intervall $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ der reellen Achse sei gemeinsames Randstück der Gebiete G_1 (in der oberen Halbebene) und G_2 (in der unteren Halbebene); ferner seien $f_1(z)$ und $f_2(z)$ meromorph in G_1 bzw. G_2. Mit $f(z)$ bezeichnen wir die Funktion, welche $\equiv f_1(z)$ in G_1 und $\equiv f_2(z)$ in G_2 ist.

Wir fragen nach Beziehungen, welche zwischen den Randwerten der Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in den gemeinsamen Randpunkten $\xi \in [x_1, x_2]$ bestehen müssen, damit $f(z)$, bei geeigneter Festsetzung der Funktionswerte in den Punkten ξ, mindestens in einem Punkt $\xi \in (x_1, x_2)$ regulär analytisch ist. Unser Ziel ist dabei, mit einem möglichst geringen Maß an Voraussetzungen auszukommen.

Zu dieser Frage hat F. Wolf [4]) folgendes bewiesen:

Satz von F. Wolf. Voraussetzungen:

1) $f_1(z)$ sei holomorph in G_1, $f_2(z)$ holomorph in G_2.

2) Für $\xi \in (x_1, x_2)$ (abzählbare Ausnahmemenge von Punkten zulässig) existieren

$$\lim_{y \to +0} f_1(\xi + iy) \quad \text{und} \quad \lim_{y \to +0} f_2(\xi - iy)$$

und besitzen denselben endlichen Wert.

Behauptung: Es existiert eine holomorphe Funktion $f(z)$, welche $\equiv f_1(z)$ in G_1, $\equiv f_2(z)$ in G_2 und auf einer im Intervall (x_1, x_2) überall dichten Menge von Punkten ξ regulär ist.

6. Um diesen Satz zu verschärfen, führen wir folgende Begriffe und Bezeichnungen ein: Die Menge $S_1(\xi)$ sei wie folgt definiert: $a \in S_1(\xi)$ gelte dann und nur dann, falls es eine Nullfolge $y_1, y_2, \ldots (y_k > 0)$ gibt, so daß $\lim\limits_{k \to \infty} f_1(\xi + iy_k) = a$ ist. Ferner sei $C_1(\xi)$ das Komplement von $S_1(\xi)$ in bezug auf die Vollebene E. Ganz entsprechend seien die sich auf die Funktion $f_2(z)$ beziehenden Mengen $S_2(\xi)$ und $C_2(\xi)$ definiert.

---

[4]) Vgl. [2], S. 883.

Mit diesen Bezeichnungen gilt folgender

Satz 2. Voraussetzungen:

1) $f_1(z)$ und $f_2(z)$ seien meromorph in G_1 bzw. G_2 ($\equiv\!\not\equiv\infty$).

2) Die Menge N der Punkte ξ, für welche $C_1(\xi)\cdot C_2(\xi)$ oder $S_1(\xi)\cdot S_2(\xi)$ leer ist, sei von 1. Kategorie und vom Maß 0 bezügl. $[x_1, x_2]$.

Behauptung: Es existiert eine meromorphe Funktion $f(z)$, welche $\equiv f_1(z)$ in G_1, $\equiv f_2(z)$ in G_2, und auf einer im Intervall (x_1, x_2) überall dichten Menge von Punkten ξ regulär ist.

7. Beweis von Satz 2. $w_1, w_2, \ldots$ sei eine Folge von Punkten $w \neq \infty$, welche zur Vollebene E überall dicht liegt. Die Menge $M(\varrho, \sigma, \tau)$ (ϱ, σ, τ natürliche Zahlen) sei wie folgt definiert:

$\xi \in [x_1, x_2]$ sei Element von $M(\varrho, \sigma, \tau)$ dann und nur dann, falls

$$|f_1(\xi + iy) - w_\varrho| \geqslant \frac{1}{\sigma} \quad \text{und} \quad |f_2(\xi - iy) - w_\varrho| \geqslant \frac{1}{\sigma} \quad \text{für} \quad 0 < y \leqslant \frac{1}{\tau}\,.$$

Für $\xi \in [x_1, x_2] - N$ ist $C_1(\xi) \cdot C_2(\xi) \neq 0$, $S_1(\xi) S_2(\xi) \neq 0$. In diesem Fall existieren (da $C_1(\xi)\cdot C_2(\xi)$ offen ist), natürliche Zahlen ϱ, σ, τ, so daß

$$|f_1(\xi + iy) - w_\varrho| \geqslant \frac{1}{\sigma}, \quad |f_2(\xi - iy) - w_\varrho| \geqslant \frac{1}{\sigma}, \quad 0 < y \leqslant \frac{1}{\tau}\,.$$

Jeder Punkt $\xi \in [x_1, x_2]$ ist also in einer der Mengen $M(\varrho, \sigma, \tau)$ enthalten, d. h.:

$$[x_1, x_2] = \Sigma\, M(\varrho, \sigma, \tau) + N\,.$$

N ist eine Menge erster Kategorie und die Mengen $M(\varrho, \sigma, \tau)$ sind abgeschlossen. Damit folgt aus dem in der Einleitung erwähnten Kategoriesatz von Baire, daß mindestens eine der Mengen $M(\varrho, \sigma, \tau)$ ein volles Teilintervall von $[x_1, x_2]$ enthält. Es gibt also natürliche Zahlen r, s, t, sowie ein Teilintervall $[x_1', x_2'] \subset [x_1, x_2]$, so daß $M(r, s, t) \supset [x_1', x_2']$.

$F_1(z) = \dfrac{1}{f_1(z) - w_r}$ ist also beschränkt für $x_1' \leqslant x \leqslant x_2'$, $0 < y \leqslant \dfrac{1}{t}$

und ebenso $F_2(z) = \dfrac{1}{f_1(z) - w_r}$ für $x_1' \leqslant x \leqslant x_2'$, $0 > y \geqslant -\dfrac{1}{t}$.

Nach dem Satz von Fatou existieren also in fast allen Punkten $\xi \in [x_1', x_2']$ die Grenzwerte:

$$\lim_{y \to +0} F_1(\xi + iy) \quad \text{und} \quad \lim_{y \to +0} F_2(\xi - iy)$$

und sind wegen Voraussetzung 2 auf $[x'_1, x'_2] - Z$ gleich. (Z Menge vom linearen Maß 0.)

Nun sei $F(z)$ in G_1 durch $F_1(z)$, in G_2 durch $F_2(z)$ und in den Punkten von $[x'_1, x'_2] - Z$ durch den gemeinsamen Grenzwert von $F_1(z)$ und $F_2(z)$ definiert.

Es sei ferner $I(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \int F(z)dz$, erstreckt über den Rand des Rechtecks $\xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_2$, $\eta_1 \leqslant y \leqslant \eta_2$ ($\xi_1 \in [x'_1, x'_2]$, $\xi_2 \in [x'_1, x'_2]$, $-\frac{1}{t} \leqslant \eta_1 < 0$, $\frac{1}{t} \geqslant \eta_2 > 0$).

Für $\eta_1 \leqslant \eta'_1 < 0$, $0 < \eta'_2 \leqslant \eta_2$ ist nun $I(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = I(\xi_1, \xi_2, \eta'_1, \eta'_2)$ (Cauchyscher Integralsatz) und damit folgt aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz:

$$I(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = I(\xi_1, \xi_2, 0, 0) .$$

Das letzte Integral verschwindet aber; es ist also

$$I(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = 0 .$$

Mit Hilfe des Satzes von Morera, in einer von P. T. Maker bewiesenen Verschärfung [5], schließt man nun, daß $F(z)$ im Rechteck $x'_1 \leqslant x \leqslant x'_2$, $-\frac{1}{t} \leqslant y \leqslant +\frac{1}{t}$ regulär analytisch ist, sofern man auf der Menge Z die Funktionswerte geeignet festsetzt und daraus ergibt sich sofort die Behauptung des Satzes.

8. Die Mengen $S_1(\xi)$, $S_2(\xi)$, $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ sind oben definiert mit Hilfe der Randwerte der Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$, welche man bei radialer Annäherung an den Punkt ξ erhält. Betrachtet man hingegen Winkel-Randwerte, so läßt sich ein ganz entsprechender Satz beweisen.

Der Menge $S_1(\xi)$ entspricht dabei die Menge $W_1(\xi)$, die wir folgendermaßen definieren:

$a \in W_1(\xi)$ gelte dann und nur dann, falls ein Winkel $w(\xi, \alpha, \beta)$ $(0 < \alpha < \beta < \pi)$ existiert und eine darin gegen ξ konvergierende Folge $z_1, z_2, \ldots$ $(z_k \in G_1)$, so daß $\lim\limits_{k \to \infty} f_1(z_k) = a$.

Ferner sei $K_1(\xi)$ die Menge aller komplexer Zahlen a, für welche ein solcher Winkel existiert, so daß $\lim\limits_{k \to \infty} f_1(z_k) = a$ für keine in diesem Winkel gegen ξ konvergierende Punktfolge $z_1, z_2, \ldots$ $(z_k \in G_1)$ gilt.

Ganz entsprechend seien mit Hilfe der Funktion $f_2(z)$ die Mengen $W_2(\xi)$ und $K_2(\xi)$ definiert.

Satz 3. Voraussetzungen:

1) wie in Satz 2.

2) Die Menge N der Punkte ξ, für welche $K_1(\xi) \cdot K_2(\xi)$ oder $W_1(\xi) \cdot W_2(\xi)$ leer ist, sei von erster Kategorie und vom Maß 0 bezüglich $[x_1, x_2]$.

Behauptung: wie in Satz 2.

Der Beweis verläuft hier ganz analog wie in Satz 2 und wird deshalb nicht durchgeführt.

C. Zum Schwarzschen Spiegelungsprinzip

9. Das Gebiet G sei wiederum in der oberen Halbebene gelegen und sein Rand enthalte das Intervall $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ der reellen Achse. Wir machen folgende

Annahme. Zu fast jedem Punkt $\xi \in [x_1, x_2]$ existiere ein Winkel $W(\xi; \alpha, \beta)$ $(0 < \alpha < \beta < \pi)$ und eine darin gegen ξ konvergierende Punktfolge $z_1, z_2, \ldots$, so daß $\lim\limits_{k \to \infty} f(z_k)$ reell ist (eventuell $= \infty$).

Ich gebe im folgenden Bedingungen an, aus welchen unter obiger Annahme die Existenz mindestens eines Randpunktes $\xi \in [x_1, x_2]$ folgt, in welchem $f(z)$ regulär ist.

Eine Bedingung dieser Art ist z. B. die folgende ($f(z)$ muß hier im Gebiet G als regulär vorausgesetzt werden):

Bedingung 1. Zu jedem Punkt $\xi \in [x_1, x_2] - N$ (N Menge erster Kategorie bezüglich $[x_1, x_2]$) existieren zwei Strahlen $s(\xi, \alpha)$ und $s(\xi, \beta)$ $(0 < \alpha < \beta < \pi)$, auf welchen $f(z)$ beschränkt ist.

Die folgenden zwei derartigen Bedingungen gelten auch noch, wenn $f(z)$ in G meromorph ist.

Bedingung 2. Für jedes $\xi \in [x_1, x_2] - N$ (N Menge erster Kategorie bezüglich $[x_1, x_2]$) enthalte die zugehörige Menge $C(\xi)$[5]) mindestens zwei Punkte, welche zu verschiedenen Seiten der reellen Achse liegen.

Bedingung 3. Für jedes $\xi \in [x_1, x_2] - N$ (N Menge erster Kategorie bezüglich $[x_1, x_2]$) enthalte die zugehörige Menge $K(\xi)$[6]) mindestens zwei Punkte, welche zu verschiedenen Seiten der reellen Achse liegen.

---

[5]) wegen der Definition vgl. I. B. 6.

[6]) wegen der Definition vgl. I. B. 8.

10. Wenn man $f(z) = f_1(z)$ setzt, und die Funktion $f_2(z)$ in dem zur reellen Achse gespiegelten Gebiet G_2 definiert durch $f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})}$ $(z \in G_2)$, so könnte man den Beweis für die Gültigkeit der obigen drei Bedingungen nach der im Satz 2 vorgezeichneten Methode führen; jedoch ist der hier vorliegende Fall, in welchem $f(z)$ reelle Randwerte besitzt, schon sehr eingehend untersucht worden, so daß man sich an einigen Stellen auf schon vorhandene Resultate stützen kann.

Ich führe hier nur den Beweis zur Bedingung 2 durch, denn die beiden anderen Beweise verlaufen ganz ähnlich.

Beweis zur Bedingung 2. Es sei $w_1, w_2, \ldots$ eine Folge von Punkten $w \neq \infty$ der oberen Halbebene, welche in dieser Halbebene überall dicht liegen und $w'_1, w'_2, \ldots$ eine entsprechende Folge von Punkten der untern Halbebene.

Mit $M(\varrho, \sigma, \tau)$ (ϱ, σ, τ natürliche Zahlen) bezeichnen wir die Menge der Punkte $\xi \in [x_1, x_2]$, in welchen für jedes $0 < y \leqslant \frac{1}{\tau}$:

$$|f(\xi + iy) - w_\varrho| \geqslant \frac{1}{\tau} \quad \text{und} \quad |f(\xi + iy) - w'_\sigma| \geqslant \frac{1}{\tau} .$$

$C(\xi)$ ist ihrer Definition gemäß eine offene Menge. Für jedes $\xi \in [x_1, x_2] - N$ enthält sie nach Voraussetzung mindestens zwei Werte, welche zu verschiedenen Seiten der reellen Achse liegen. Folglich gibt es zu jedem $\xi \in [x_1, x_2] - N$ natürliche Zahlen ϱ, σ, τ, so daß für $0 < y \leqslant \frac{1}{\tau}$

$$|f(\xi + iy) - w_\varrho| \geqslant \frac{1}{\tau}, \quad |f(\xi + iy) - w'_\sigma| \geqslant \frac{1}{\tau} .$$

Daraus schließt man

$$[x_1, x_2] = N + \Sigma M(\varrho, \sigma, \tau) .$$

Aus dem Baireschen Kategoriensatz folgt wieder, daß wenigstens eine der (abgeschlossenen) Mengen $M(\varrho, \sigma, \tau)$ ein ganzes Teilintervall $[x'_1, x'_2] \subset [x_1, x_2]$ umfaßt; es sei dies $M(r, s, t)$. Also:

$$M(r, s, t) \supset [x'_1, x'_2] .$$

Im Gebiet $\left(x'_1 \leqslant x \leqslant x'_2\,,\ 0 < y < \frac{1}{t}\right)$ sind nun w_r und w'_s keine Häufungswerte von $f(z)$. Da w_r und w'_s zu verschiedenen Seiten der reellen Achse liegen, folgt damit nach einem Satz von C. Carathéodory [8], daß $f(z)$ in jedem Randpunkt $\xi \in (x'_1, x'_2)$ entweder regulär ist oder einen Pol besitzt. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

II. HINREICHENDE BEDINGUNGEN FÜR ANALYTIZITÄT

1. Die Funktion $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ $(z = x + iy)$ sei in einem Gebiet G der xy-Ebene eindeutig definiert, und es sollen Bedingungen in möglichst abgeschwächter Form angegeben werden, welche die Existenz mindestens eines Punktes $z \in G$ sichern, in welchem $f(z)$ regulär analytisch ist.

Auch hier spielen wieder, wie im ersten Teil, gewisse Häufungswertmengen eine Rolle. Wir definieren:

$a \in H(z)$ gelte dann und nur dann, falls eine gegen z konvergierende Folge $z_1, z_2, \ldots$ existiert, so daß

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(z_k) - f(z)}{z_k - z} = a \quad .$$

Mit $C(z)$ bezeichnen wir das Komplement von $H(z)$ in bezug auf die Vollebene E.

$H'(z)$ und $H''(z)$ seien analog wie $H(z)$ definiert, jedoch werden nur solche Punktfolgen $z_1, z_2, \ldots$ zugelassen, welche auf der durch z gehenden Parallele zur x-Achse bzw. y-Achse gegen z konvergieren.

Mit dieser Definition gilt nun folgender

Satz 4. Voraussetzungen:

1) $f(z)$ sei stetig in G.
2) $C(z) \neq 0$ für $z \in G - N$ (N Menge erster Kategorie bezüglich G).
3) $H'(z) \cdot H''(z)$ enthalte für jedes z mindestens einen endlichen Wert.

Behauptung: Es existiert mindestens ein Punkt $z \in G$, in welchem $f(z)$ regulär ist. (Natürlich folgt daraus sofort, daß unter den angegebenen Voraussetzungen die Punkte z, in welchen $f(z)$ regulär ist, im Gebiet G überall dicht liegen.)

2. Beweis zu Satz 4. $w_1, w_2, \ldots$ sei eine Folge von Punkten $w \neq \infty$, welche zur Vollebene E dicht liegt. Die Menge $M(\varrho, \sigma, \tau)$ (ϱ, σ, τ natürliche Zahlen) sei folgendermaßen definiert: $z \in G$ sei dann und nur dann Element von $M(\varrho, \sigma, \tau)$, falls

$$\left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} - w_\varrho \right| \geqslant \frac{1}{\sigma} \quad ; \quad 0 < |z' - z| \leqslant \frac{1}{\tau} \quad .$$

Für $z \in G - N$ ist nach Voraussetzung $C(z) \neq \Phi$, also $H(z) \neq E$. Da $H(z)$ abgeschlossen ist, gibt es natürliche Zahlen ϱ, σ, τ, so daß

$$\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}-w_\varrho\right| \geqslant \frac{1}{\sigma}, \quad 0<|z'-z|\leqslant \frac{1}{\tau} .$$

Folglich gilt: $G = N + \Sigma M(\varrho, \sigma, \tau)$.

Die Menge N ist von erster Kategorie, und infolge der Stetigkeit von $f(z)$ sind die Mengen $M(\varrho, \sigma, \tau)$ abgeschlossen. Damit folgt aus dem in der Einleitung erwähnten Kategoriesatz von R. Baire, daß mindestens eine der Mengen $M(\varrho, \sigma, \tau)$ ein volles Teilgebiet von G enthält. Es gibt also natürliche Zahlen r, s, t, sowie ein Teilgebiet $G^* \subset G$, so daß $M(r, s, t) \supset G^*$.

Wir nehmen im folgenden an, G^* besitze einen Durchmesser $\leqslant \frac{1}{t}$. Für die Funktion $F(z) = f(z) - z\, w_r$ gilt nun

$$\left|\frac{F(z')-F(z)}{z'-z}\right| \geqslant \frac{1}{s},$$

sofern $z \neq z'$, $z \in G^*$, $z' \in G^*$.

Durch $w = F(z)$ wird das Gebiet G^* also schlicht und stetig auf ein Gebiet Γ^* der w-Ebene abgebildet. Man kann daher in Γ^* die Umkehrungsfunktion $z = \Phi(w)$ einführen, welche ebenfalls stetig ist.

Für $w \neq w'$, $w \in \Gamma^*$, $w' \in \Gamma^*$ gilt nun

$$\left|\frac{\Phi(w')-\Phi(w)}{w'-w}\right| \leqslant s$$

und daher besitzt $\Phi(w)$ in fast jedem Punkt von Γ^* ein totales Differential im Sinn von Stoltz-Frechet [9].

Es sei nun $w_0 = F(z_0)$ ein Punkt, in welchem $\Phi(w)$ ein totales Differential besitzt. Nach Voraussetzung 3 existieren zwei Punktfolgen

$$z'_k, z''_k; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

welche längs der durch z gezogenen Parallele zur x-Achse bzw. y-Achse gegen z_0 konvergieren, so daß

$$\frac{f(z'_k)-f(z_0)}{z'_k - z_0} \quad \text{und} \quad \frac{f(z''_k)-f(z_0)}{z''_k - z_0}$$

denselben endlichen Grenzwert besitzen, der wegen

$$\left|\frac{f(z)-f(z')}{z-z'}-w_r\right| \geqslant \frac{1}{s} \; (z \neq z', \quad z \in G^*, \quad z' \in G^*)$$

von w_r verschieden ist. Die beiden Bildfolgen

$$w_k' = F(z_k'), \quad w_k'' = F(z_k''); \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

fallen daher unter rechtem Winkel in den Punkt w ein und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Phi(w_k') - \Phi(w_0)}{w_k' - w_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{\Phi(w_k'') - \Phi(w_0)}{w_k'' - w_0} .$$

Daraus folgt aber, daß $\Phi(w)$ im Punkt w_0 differenzierbar ist [4].

$\Phi(w)$ ist also in fast allen Punkten $w \in \Gamma^*$ differenzierbar. Da $\Phi(w)$ ferner stetig ist und beschränkte Differenzenquotienten besitzt, schließt man auf die Regularität von $\Phi(w)$ in Γ^*, z. B. auf Grund des Satzes von Looman-Menchoff [7]).

Daraus ergibt sich sofort die Behauptung des Satzes.

3. Mit der Bezeichnung $Q(z, h) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}$ gilt ferner:

Satz 5. Voraussetzungen:

1) Im Gebiet G sei $f(z)$ längs den Parallelen zur x- und y-Achse stetig.

2) $\lim\limits_{h\to 0} Q(z, h) = 0$ (h reell) für $z \in G - N$ (N: Menge vom Flächenmaß 0 und von erster Kategorie bezüglich G).

Behauptung: Es existiert mindestens ein Punkt $z \in G$, in welchem $f(z)$ regulär ist.

4. Der Beweis stützt sich auf folgende zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Voraussetzungen:

1) Im Gebiet D sei $F(z)$ längs den Parallelen zur x- und y-Achse stetig.

2) Im Punkt $z \in D$ sei $|F(z)| < M \; (> M)$.

Behauptung: Es existiert mindestens ein Teilgebiet von D, in welchem $|F(z)| < M \; (> M)$.

Ich führe den Beweis dieses Hilfssatzes nur für den Fall $|F(z)| < M$ durch. Der Fall $|F(z)| > M$ läßt sich ganz analog behandeln.

Beweis des Hilfssatzes 1: Ist $|F(z_0)| < M$, so existiert wegen der Stetigkeit von $F(z)$ nach x ein reelles $h_0 > 0$, so daß $|F(z_0 + h)| < M$ für alle reellen h mit $|h| \leq h_0$.

---

[7]) Vgl. [6]. Beachte die Bemerkung S. 200, unten.

Es sei nun $M(\lambda)$ (λ natürliche Zahl) die Menge der Werte h mit $|h| \leqslant h_0$, für welche $|F(z_0 + h + i\,k)| < M$, sofern $|k| \leqslant \frac{1}{\lambda}$ (k reell). Die Mengen $M(\lambda)$ sind abgeschlossen (infolge der Stetigkeit von $F(z)$ nach x) und es gilt (wegen der Stetigkeit von $F(z)$ nach y)

$$[-h_0, +h_0] = \Sigma\, M(\lambda) \ .$$

Es existiert daher nach Baire ein Teilintervall $(h_1, h_2) \subseteqq (-h_0, h_0)$ und eine natürliche Zahl l, so daß $M(l) \supset (h_1, h_2)$.

$|F(z)| < M$ gilt nun im ganzen Rechteck mit den Ecken

$$z_0 + h_1 + i \cdot \frac{1}{l}\,, \quad z_0 + h_1 - i \cdot \frac{1}{l}\,, \quad z_0 + h_2 - i \cdot \frac{1}{l}\,, \quad z_0 + h_2 + i \cdot \frac{1}{l}\,.$$

Hilfssatz 2. Voraussetzungen:

1) $u(x, y)$ und $v(x, y)$ seien im Gebiet D integrierbar und längs den Parallelen zur x- und y-Achse stetig.

2) In jedem Punkt $z \in D$ sei $|Q(z, h)| \leqslant m$ für jedes reelle h mit $|h| \leqslant \frac{1}{m}$.

3) $\lim\limits_{h \to 0} Q(z, h) = 0$ (h reell) fast überall in D.

Behauptung: $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ ist im Gebiet D holomorph.

Der Beweis des Hilfssatzes 2 ergibt sich leicht aus dem untenstehenden Satz 7 (vgl. Bemerkung a).

5. Beweis zu Satz 5. Ist $M(\lambda)$ (λ natürliche Zahl) die Menge der Punkte $z \in G$, in welchen $|Q(z, h)| \leqslant \lambda$ für alle reellen h mit $0 < |h| \leqslant \frac{1}{\lambda}$ so gilt wegen Voraussetzung 2

$$G = N + \Sigma\, M(\lambda) \ .$$

N ist eine Menge von ersten Kategorie. Damit folgt aus dem Baireschen Kategoriesatz, daß mindestens eine der Mengen $\overline{M}(\lambda)$ ein ganzes Teilgebiet von G enthält. Es existieren also eine natürliche Zahl l und ein Gebiet $G_1 \subset G$, so daß $\overline{M}(l) \supset G_1$. Aus Hilfssatz 1 folgt nun leicht sogar $M(l) \supset G_1$.

Der Hilfssatz 1 sichert ferner die Existenz eines Gebietes $G^* \subset G_1$, in welchem $f(z)$ beschränkt ist, und damit sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ als beschränkte, nach x und y stetige Funktionen über G^* integrierbar [8]).

[8]) Vgl. [10], S. 644.

Die Funktion $f(z)$ erfüllt nun in G^* sämtliche Voraussetzungen von Hilfssatz 2.

6. Eine ähnliche Aussage macht folgender Satz 6:

Satz 6. Voraussetzungen:

1) Im Gebiet G sei $f(z)$ längs den Parallelen zur x- und y-Achse stetig.

2) $$\limsup_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| < +\infty \; ; \quad \limsup_{h \to 0} \left| \frac{f(z+ih) - f(z)}{h} \right| < +\infty$$

(h reell) gelte für alle $z \in G - N$ (N Menge erster Kategorie bezüglich G)

3) Auf der Menge der Punkte $z \in G$, in welchen zugleich $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ existieren, sei fast überall $\frac{\partial f}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Behauptung: Es existiert mindestens ein Punkt $z \in G$, in welchem $f(z)$ regulär ist.

7. Beweis zu Satz 6. Es sei $M(\lambda)$ (λ natürliche Zahl) die Menge aller Punkte $z \in G$, in welchen $|f(z+h) - f(z)| \leqslant \lambda |h|$ und $|f(z+ih) - f(z)| \leqslant \lambda \cdot |h|$ (h reell) für $|h| \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

Es gilt wieder $G = N + \Sigma M(\lambda)$. Aus dem Baireschen Kategoriesatz und dem Hilfssatz 1 schließt man wieder (wie im Beweis zum Satz 5), daß eine natürliche Zahl l, sowie ein Gebiet $G_1 \subset G$ existieren, so daß $M(l) \supset G_1$.

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue, nach welchem eine reelle Funktion mit beschränkten Differenzenquotienten fast überall eine Ableitung besitzt, ergibt sich daher, daß in G_1 die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ fast überall existieren. Wegen Voraussetzung 3 gilt also fast überall in G_1

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \; .$$

Der Hilfssatz 1 sichert nun wieder die Existenz eines Gebietes $G^* \subset G_1$, über welches $u(x, y)$ und $v(x, y)$ integrierbar sind, und damit sind in G^* wieder alle Bedingungen von Hilfssatz 2, Satz 5, erfüllt.

8. Zum Schluß dieser Arbeit gebe ich noch eine Bedingung an, welche die Regularität der Funktion $f(z)$ im ganzen Definitionsgebiet G nach sich zieht. Ich führe hier diesen Satz an, obwohl seine Beweismethode

etwas aus dem Rahmen der obigen Betrachtungen herausfällt; denn es lassen sich daraus leicht zwei Sätze herleiten, auf welche wir uns in dieser Arbeit wiederholt gestützt haben: Hilfssatz 2 und der Satz von Morera in der von P. T. Maker bewiesenen verschärften Form.

Wir führen folgende Bezeichnung wieder ein

$$Q(z,h) = \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} =$$

$$= \frac{f(z+h)-f(z)+i\cdot f(z+ih)-i\cdot f(z)}{h} .$$

Damit $Q(z,h)$ unabhängig von $z \in G$ und h definiert ist, setzen wir fest: $f(z) \equiv 0, \quad z \notin G$.

Ist $h_1, h_2, \ldots$ eine Nullfolge von reellen Zahlen, so sagen wir, die zugehörige Funktionenfolge $Q_\lambda(z) = Q(z, h_\lambda)$ konvergiere auf dem Rechteck $R(x_1 \leqslant x \leqslant x_2, y_1 \leqslant y \leqslant y_2)$ „im Mittel" gegen 0, falls

$$\lim_{\lambda \to \infty} \iint_R Q_\lambda \, dx\, dy = 0 .$$

Wir sagen ferner, eine gewisse Bedingung sei für „fast alle Rechtecke $R \in G$" erfüllt, falls die Ecken jener Rechtecke, für welche diese Bedingung nicht erfüllt ist, auf einer festen Punktmenge vom Flächenmaß 0 liegen.

9. Mit diesen Bezeichnungen gilt nun folgender

Satz 7. Voraussetzungen:

1) $u(x, y)$ und $v(x, y)$ seien über G integrierbar.

2) Es existiere eine Nullfolge $h_1, h_2, \ldots$ von reellen Zahlen, so daß die zugehörige Funktionenfolge $Q_\lambda(z) = Q(z, h_\lambda)$ auf fast jedem Rechteck $R(x_1 \leqslant x \leqslant x_2, y_1 \leqslant y \leqslant y_2)$, welches in G liegt, im Mittel gegen 0 strebt.

Behauptung: Es existiert eine in G reguläre Funktion $F(z)$, so daß $F(z) = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ in fast allen Punkten $z \in G$.

10. Beweis zu Satz 7.

a) Der Einfachheit halber nehmen wir an, G sei die ganze Ebene. Ist nun eine reelle Funktion $\lambda(x, y)$ über jedes endliche Intervall $R(x_1 \leqslant x \leqslant x_2, y_1 \leqslant y \leqslant y_2)$ integrierbar, so besitzt das Mittel $(\varrho > 0)$

$$\lambda_\varrho(x, y) = \frac{1}{4\varrho^2} \int_{-\varrho}^{+\varrho} \int_{-\varrho}^{+\varrho} \lambda(x+s, y+t)\, dt\, ds$$

folgende Eigenschaften [9]):

α) $\lim_{\varrho \to 0} \lambda_\varrho(x, y) = \lambda(x, y)$ in fast allen Punkten (x, y),

β) $\lambda_\varrho(x, y)$ ist auf jedem endlichen Intervall

$$R(x_1 \leqslant x \leqslant x_2, y_1 \leqslant y \leqslant y_2)$$

absolut stetig im Tonellischen Sinn, das heißt $\lambda_\varrho(x, y)$ ist auf R stetig; ferner im Intervall $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ absolut stetig als Funktion von x für fast alle $y \in (y_1, y_2)$ und im Intervall $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ absolut stetig als Funktion von y für fast alle $x \in (x_1, x_2)$, und dazu sind die Ableitungen

$$\frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial x}, \quad \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial y}$$

über R integrierbar.

b) Setzen wir nun $f_\varrho(z) = u_\varrho(x, y) + i \cdot v_\varrho(x, y)$, so wird

$$\frac{1}{h_\lambda}\Big[f_\varrho(z+h_\lambda) - f_\varrho(z) + i \cdot f_\varrho(z+ih_\lambda) - i \cdot f_\varrho(z)\Big] =$$

$$= \frac{1}{4\varrho^2} \int_{-\varrho}^{+\varrho} \int_{-\varrho}^{+\varrho} Q_\lambda\Big[x+s+i(y+t)\Big]\, dt\, ds \;.$$

Die linke Seite dieser Gleichung besitzt für $\lambda \to \infty$ in fast allen Punkten z den Grenzwert

$$\frac{\partial f_\varrho}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial f_\varrho}{\partial y} \;.$$

(Wegen β existieren ja $\frac{\partial f_\varrho}{\partial x}$ und $\frac{\partial f_\varrho}{\partial y}$ fast überall.)

Die rechte Seite hingegen strebt wegen Voraussetzung 2 für fast alle $z = x + iy$ gegen 0.

Die Funktion $f_\varrho(z)$ erfüllt also in fast allen Punkten die Cauchy-Riemannsche Bedingung

$$\frac{\partial f_\varrho}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial f_\varrho}{\partial y} = 0 \;.$$

---

[9]) Vgl. [11], S. 258.

Da ferner $u_\varrho(x, y)$ und $v_\varrho(x, y)$ absolut stetig (Tonelli) sind, folgt nach einem Satz von P.T.Maker, daß $f_\varrho(z)$ in G regulär analytisch ist [5].

c) Das Quadrat $x - h \leqslant \xi \leqslant x + h$, $y - h \leqslant \eta \leqslant y + h$ werde mit $R(x, y, h)$ bezeichnet. Wir betrachten ein bestimmtes solches Quadrat $R_0 = R(x_0, y_0, h_0) \subset G$ und beweisen, daß die Funktionen $f_\varrho(z)$ auf diesem Quadrat gleichmäßig beschränkt sind.

Zu diesem Zweck wählen wir ein $h_1 > h_0$ (h_1 bleibt im folgenden fest), für welches jedes Quadrat $R(x, y, h_1) \supset R_0$ ganz in G liegt.

Mit $\lambda(x, y)$ bezeichnen wir die Funktion $|u(x, y)| + |v(x, y)|$ und $I(x, y)$ sei das Integral $\int \lambda\, ds$, erstreckt über den Rand des Quadrates $R(x, y, h_1)$. Nach α gilt für fast alle (x, y):

$$\lim_{\varrho \to 0} I_\varrho(x, y) = I(x, y) \ .$$

Wir wählen nun den Punkt (x_1, y_1) so, daß $2\,|x_1 - x_0| < h_1 - h_0$, $2\,|y_1 - y_0| < h_1 - h_0$ und $\lim\limits_{\varrho \to 0} I_\varrho(x_1, y_1)$ existiert und endlich ist.

Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt nun für $z \in R_0$ leicht

$$|f_\varrho(z)| \leqslant \frac{1}{\pi(h_1 - h_0)} \int |f_\varrho|\, ds \ .$$

(Integral über den Rand von $R(x_1, y_1, h_1)$ erstreckt.)

Ferner gilt

$$\int |f_\varrho|\, ds \leqslant \int \lambda_\varrho\, ds$$

und (Änderung der Integrationsreihenfolge)

$$\int \lambda\, \varrho\, ds = I_\varrho(x_1, y_1) \ .$$

Für $\varrho \to 0$ bleibt aber die rechte Seite beschränkt.

d) Die Funktionen $f_\varrho(z)$ sind also in R_0 regulär und gleichmäßig beschränkt; ferner existiert nach α $\lim\limits_{\varrho \to 0} f_\varrho(z)$ fast überall in R_0.

Auf Grund des bekannten Satzes von Vitali schließt man daraus leicht, daß die Grenzfunktion

$$\lim_{\varrho \to 0} f_\varrho(z) = F(z) \ ,$$

welche nach α fast überall $= f(z)$ ist, in R_0 regulär ist.

11. Bemerkungen zu Satz 7.

a) Aus Satz 7 folgt leicht:

Satz 7′. Voraussetzungen:

1) $u(x, y)$ und $v(x, y)$ seien über G integrierbar.

2) Es existiere eine reelle Nullfolge $h_1, h_2, \ldots$, so daß fast überall in G $\lim_{\lambda \to \infty} Q(z, h_\lambda) = 0$.

3) Es existiere eine über G integrierbare Funktion $g(z) \geqslant 0$, so daß $|Q(z, h_\lambda)| \leqslant g(z)$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$.

Behauptung: wie in Satz 7.

Die Gültigkeit dieses Satzes ergibt sich sofort mit Hilfe des Lebesgueschen Grenzwertsatzes: Aus 2 und 3 (Satz 7′) folgt damit nämlich Voraussetzung 2 zu Satz 7.

Satz 7′ ist eine weitgehende Verschärfung eines von S. Kametani [4] ganz ähnlich bewiesenen Satzes.

Der obige Satz enthält außerdem das Hauptresultat eines Satzes von J. Ridder [3] und liefert ferner sofort den Hilfssatz 2 zu Satz 5.

b) $Z \subset G$ sei eine Menge vom Maß 0 und $f(z)$ sei regulär in allen Punkten $z \in G - Z$.

Hinreichend dafür, daß $f(z)$ über die Menge Z analytisch fortgesetzt werden kann (d. h., daß eine in G holomorphe Funktion $F(z)$ existiert, welche $\equiv f(z)$ ist auf $G - Z$) ist folgende Bedingung, die sich fast unmittelbar aus Satz 7′ ergibt:

$u(x, y)$ und $v(x, y)$ seien über G integrierbar und es existiere eine integrierbare Funktion $g(z) \geqslant 0$, so daß $|Q(z, h)| \leqslant g(z)$, sofern $z \in G - Z$, $z + h \in G - Z$, $z + ih \in G - Z$ (h reell).

c) Mit Hilfe der Beweismethode des Satzes 7 leitet man auch leicht die von P. T. Maker herrührende Verschärfung des Satzes von Morera her [5]:

Satz. Voraussetzungen:

1) $u(x, y)$ und $v(x, y)$ seien über G integrierbar.

2) Für fast jedes Rechteck $R(x_1 \leqslant x \leqslant x_2, y_1 \leqslant y \leqslant y_2)$ aus G verschwinde das über seinen Rand erstreckte $\int f(z)\, dz$.

Behauptung wie in Satz 7.

Man kann hier den Beweis von Satz 7 in fast unveränderter Form übernehmen: Neu zu begründen ist nur, daß für $f(z)$ die Cauchy-Riemannsche Bedingung

$$\frac{\partial f_\varrho}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial f_\varrho}{\partial y} = 0$$

fast überall erfüllt ist, und dies folgt sofort aus der Relation [10])

$$\frac{\partial f_\varrho}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial f_\varrho}{\partial y} = - \frac{i}{4\varrho^2} \int f(z)\, dz \, .$$

(Das Integral ist über den Rand des Quadrates $R(x, y; \varrho)$ zu erstrecken.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] *A. Pleßner*, Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs. Journ. Math. 158, S. 219—227 (1927).

[2] *F. Wolf*, Extension of analytic functions. Duke Math. J. 14, S. 877—887 (1947).

[3] *J. Ridder*, Über den Cauchyschen Integralsatz für reelle und komplexe Funktionen. Math. Ann. 102, S. 132—156 (1929).

[4] *S. Kametani*, On conditions for a function to be regular. Jap. J. Math. 17, S. 337—345 (1941).

[5] *P. T. Maker*, Conditions on $u(x, y)$ and $v(x, y)$ necessary and sufficient for the regularity of $u + iv$. Trans. Amer. Math. Soc. 45, S. 265—275 (1939).

[6] *S. Saks*, Theory of the Integral. New York 1937.

[7] *N. Lusin und J. Privaloff*, Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. Ann. Ecole norm. (3) 42, S. 143—191 (1924).

[8] *C. Carathéodory*, Zum Schwarzschen Spiegelungsprinzip. Comm. Math. Helv. 19 (1946) S. 266.

[9] *W. Stepanoff*, Über totale Differenzierbarkeit. Math. Ann. 90, S. 318 (1923).

[10] *C. Carathéodory*, Vorlesungen über reelle Funktionen. New York (1948).

[11] *L. M. Graves*, Theory of functions of real variables. New York 1946.

(Eingegangen den 5. Januar 1950.)

---

[10]) Nach L. M. Graves [11], S. 58, gilt fast überall

$$\frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial x} = \frac{1}{4\varrho^2} \int_{y-\varrho}^{y+\varrho} [\lambda(x+\varrho, t) - \lambda(x-\varrho, t)]\, dt$$

und daraus folgt leicht obige Relation.