Sur une nouvelle solution particulière du problème de trois corps.

Autor(en): **Egerváry, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **24 (1950)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20295

Sur une nouvelle solution particulière du problème des trois corps

Par E. Egerváry, Budapest

Entre les diverses lois de forces centrales il y a deux qui entraînent une reduction dans la solution générale du problème des trois corps. Ce sont les forces proportionelles à la troisième puissance des distances mutuelles.

Dans le cas ou les masses s'attirent en raison inverse du cube des distances, on a, comme on sait, l'intégrale générale (independante des intégrales classiques)

$$\Sigma\, m_k(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 2C\, t^2 + C_1\, t + C_2 \tag{1}$$

ou C désigne la constante de l'intégrale des forces vives. Ce cas avait été étudié par plusieurs auteurs et c'était dans ce cas, que T. Banachiewitz [1]) avait réussi de trouver une solution particulière, ou les corps décrivent des courbes gauches.

Le cas des forces directement proportionelles au cube des distances semble être moins connu. Dans une mémoire de E. O. Lowette [2]) on trouve une remarque, que le spirale de sinus est une trajectoire possible, pourvu que les masses sont égales. Tout récemment D. Sokoloff [3]) montra que le mouvement réctiligne des trois masses égales dans ce cas se détermine par des quadratures.

Dans cette note nous allons indiquer que le problème des trois corps *égales* dans le cas des forces directement proportionelles au 3-ième puissance des distances admet une intégrale générale nouvelle (et indépendante des intégrales classiques)

$$\Sigma\, \dot{x}_1(x_2 - x_3) + \dot{y}_1(y_2 - y_3) + \dot{z}_1(z_2 - z_3) = \text{const.} \tag{2}$$

---

[1]) *T. Banachiewitz*, Cas particulier des n-corps, Comptes Rendus, 1906, t. 142, p. 510/12.

[2]) *E. O. Lovett*, Generalizations of the problem of several bodies, Quarterly Journal, 1910, vol. 42, p. 293.

[3]) *D. Sokoloff*, O novom clutchae integriruemosti v priamolineinoi zadatche treh tel, Dokladi Akademii Nauk CCCR, 1945, t. 46, p. 99—102.

et grace a cette intégrale dans le cas du mouvement plan il sera possible de déterminer une famille de solutions particulières, qui comprennent les solutions équidistances et collinéaires de Lagrange comme cas limites.

Pour arriver le plus directement a ces solutions particulières nous allons nous servir des coordonnées généralisées S, D, σ, δ qui sont liés aux coordonnées complexes $z_k = x_k + i\, y_k$ des masses $m_1 = m_2 = m_3$ par les équations suivantes

$$\sqrt{3}\, z_k = S\, e^{i\left(\sigma + \frac{2k\pi}{3}\right)} + D\, e^{i\left(\delta - \frac{2k\pi}{3}\right)} . \tag{3}$$

En choisissant les unités convenablement, pour la force vive on obtient l'expression suivante

$$2\,T = \Sigma \mid \dot{z}_k \mid^2 = \dot{S}^2 + \dot{D}^2 + S^2\, \dot{\sigma}^2 + D^2\, \dot{\delta}^2 \tag{4}$$

tandis que la potentielle des trois masses égales est exprimée par

$$V = \text{const.}\ \Sigma \mid z_k - z_h \mid^4 = \tfrac{1}{4}\,(S^4 + 4 S^2 D^2 + D^4)\ . \tag{5}$$

Les équations de Lagrange sont

$$\begin{aligned} &\ddot{S} - S\,\dot{\sigma}^2 = -\,S\,(S^2 + 2\,D^2)\ ; \qquad \frac{d}{dt}(S^2\,\dot{\sigma}) = 0 \\ &\ddot{D} - D\,\dot{\delta}^2 = -\,D\,(2\,S^2 + D^2)\ ; \qquad \frac{d}{dt}(D^2\,\dot{\delta}) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

et grâce aux deux coordonnées cycliques σ, δ on obtient immédiatement les deux intégrales

$$S^2\,\dot{\sigma} = C_1\ ; \qquad D^2\,\dot{\delta} = C_2\ . \tag{7}$$

(Dans le cas du mouvement plan l'intégrale indiquée plus haut est fournie par la combinaison linéaire

$$S^2\,\dot{\sigma} - D^2\,\dot{\delta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\Re\,\Sigma\,\dot{\bar{z}}_1\,(z_2 - z_3) = \text{const.}\ ,$$

tandis que l'intégrale des aires corresponde a l'autre combinaison

$$S^2\,\dot{\sigma} + D^2\,\dot{\delta} = \Im\,\Sigma\,\dot{\bar{z}}_1\,z_1 = \text{const.})\ .$$

A l'aide des intégrales (7) on obtient le système 4-ième ordre

$$\ddot{S} - \frac{C_1^2}{S^3} = -\,S\,(S^2 + 2\,D^2)\ ; \qquad \ddot{D} - \frac{C_2^2}{D^3} = -\,D\,(2\,S^2 + D^2) \tag{8}$$

que l'on peut ramener a un système du 2-ième ordre.

Le système (8) admets des solutions ou l'on a $S = S_0$ et $D = D_0$, tandis que les constantes C_1, C_2 se déterminent par les conditions

$$C_1^2 = S_0^4(S_0^2 + 2D_0^2) \; ; \qquad C_2^2 = D_0^4(2S^2 + D^2)$$

et les angles sont des fonctions linéaires du temps :

$$\sigma - \sigma_0 = \pm \sqrt{S_0^2 + 2D_0^2}\, t \; ; \qquad \delta - \delta_0 = \pm \sqrt{2S_0^2 + D_0^2}\, t \; .$$

Il est aisé de voir que la solution ainsi trouvée

$$\sqrt{3}\, z_k = S_0\, e^{i\left(\sqrt{S_0^2 + 2D_0^2}\, t + \frac{2k\pi}{3}\right)} + D_0\, e^{i\left(\sqrt{2S_0^2 + D_0^2}\, t - \frac{2k\pi}{3}\right)}$$

se réalise cinématiquement par le mouvement des trois points attachés convenablement à trois cercles égales, dont les centres sont équidistantes et qui roulent uniformément sur un cercle fixe.

La solution équidistante de Lagrange on obtient dans le cas $D_0 = 0$ (ou $S_0 = 0$), tandis que la solution collinéaire s'obtient dans le cas $S_0 = D_0$, $\dot{\sigma} = \dot{\delta}$.

Ce résultat fait nettement saisire la nature de labilité de la solution collinéaire. En effet, dans le cas de la collinéarité les trois cercles égales roulent sur un cercle de rayon 0, c'est-à-dire elles tournent autour de l'origine et les masses décrivent des cercles autour de ce point. Au contraire, dans le cas des conditions initiales infiniment voisines, les trois cercles roulent sur une cercle dont le rayon est différent de 0, alors les masses décrivent des hypocycloïdes en se rapprochant arbitrairement de l'origine.

(Reçu en Juin 1946.)