Über die Gravitation kontinuierlich ausgebreiteter Massen.

Autor(en): **Scherrer, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **24 (1950)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20298

Über die Gravitation kontinuierlich ausgebreiteter Massen

Von W. Scherrer, Bern

Einleitung

Anläßlich einer Vorlesung über die „Grundbegriffe der exakten Wissenschaften“ habe ich mir folgende Frage vorgelegt: Wie bewegt sich eine kontinuierlich ausgebreitete Masse, wenn sie *nur* der Gravitation unterliegt? Die klassische mathematische Physik enthält alle notwendigen Begriffe und Relationen, um diese Frage unter geeigneten Voraussetzungen exakt zu formulieren und — grundsätzlich gesprochen — zu beantworten. Doch werden — soweit ich bemerkt habe — in den traditionellen Darstellungen keine Betrachtungen in dieser Richtung angestellt. Da nämlich in den sogenannten konkreten Fällen bei einer kontinuierlich ausgebreiteten Masse die Materiekräfte bei weitem überwiegen, scheint ja die Fragestellung sinnlos zu sein.

Und doch liegt ein Fall vor, der auch ein naturwissenschaftliches Interesse bietet. In einem galaktischen System zum Beispiel ist eine große Menge von Partikeln (Fixsternen) praktisch kontinuierlich und gleichzeitig so dünn verteilt, daß man von den Begegnungen zwischen den einzelnen Partikeln absehen kann. Dieser Fall wird nun allerdings durch die Tatsache verkompliziert und aus dem Rahmen der klassischen Methoden herausgehoben, daß man den einzelnen Partikeln eine statistische Geschwindigkeitsverteilung zuschreiben muß. Dies mag wohl der Grund sein dafür, daß man den Fall reiner Strömungsgeschwindigkeit gewöhnlich übergeht. Nun aber haben die Astronomen ermittelt, daß zum Beispiel die rotative Strömungskomponente der Sonne in der Milchstraße etwa 15mal so groß ist, wie ihre statistische Komponente. Es ist also durchaus denkbar, daß Ermittlungen an reinen Strömungsmodellen, die durch ihre Anfangsbedingungen erfaßbar sind, Interesse verdienen. Daher habe ich mich entschlossen, hier die Grundgleichungen der Strömungsdynamik kurz zu entwickeln[1]).

[1]) Eine erste Mitteilung erfolgte am 28. Februar 1947 vor der Math. Vereinigung Bern. Vgl. das Referat in den Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern aus dem Jahre 1947.

§ 1. Das diskrete Ausgangssystem

Wir betrachten n Massenpunkte mit den Massen

$$m_1, m_2, \ldots, m_n \tag{1}$$

und den Ortsvektoren

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n \, . \tag{2}$$

Die Gravitationskraft, welche die k-te Masse auf die i-te ausübt, ist dann gegeben durch

$$\mathfrak{K}_{ik} = -\varkappa m_i m_k \cdot \frac{\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_k}{|\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_k|^3} \, .$$

Die gesamte auf die i-te Masse wirkende Gravitationskraft ergibt sich daher zu

$$\mathfrak{K}_i = -\varkappa m_i \sum_{\lambda=1}^{n}{}' \frac{m_\lambda (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_\lambda)}{|\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_\lambda|^3} \tag{3}$$

wo

$$\varkappa = 6{,}667 \cdot 10^{-8} \, \mathrm{gr}^{-1} \cdot \mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{sec}^{-2} \tag{4}$$

die Gravitationskonstante ist. Der Strich bei Σ in (3) bedeutet, daß der Index i in der Summe übersprungen werden muß.
Die von der i-ten Masse entwickelte Trägheitskraft ist gegeben durch

$$\mathfrak{T}_i = -m \cdot \ddot{\mathfrak{x}}_i \tag{5}$$

Aus der Bedingung des dynamischen Gleichgewichts

$$0 = \mathfrak{T}_i + \mathfrak{K}_i$$

ergibt sich also gemäß (3) und (5) das „Bewegungsgesetz“:

$$\boxed{\begin{array}{l} m_i \ddot{\mathfrak{x}}_i = -\varkappa m_i \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{n}{}' \frac{m_\lambda (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_\lambda)}{|\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_\lambda|^3} \\ (i = 1, 2, \ldots n) \end{array}} \quad . \tag{6}$$

Führen wir nun die Komponenten der Ortsvektoren gemäß

$$\mathfrak{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \tag{7}$$

ein und bezeichnen wir die Distanzen durch

$$r_{i\lambda} = |\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_\lambda| = \sqrt{(x_{i1} - x_{\lambda 1})^2 + (x_{i2} - x_{\lambda 2})^2 + (x_{i3} - x_{\lambda 3})^2} \, , \tag{8}$$

so können wir in bekannter Weise (6) umformen in die Gestalt

$$\boxed{\begin{gathered} m_i \ddot{x}_{ik} = -m_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_{ik}} \\ \Phi_i = -\varkappa \sum_{\lambda=1}^{n}{}' \frac{m_\lambda}{r_{i\lambda}} \\ (i = 1, 2, \ldots n), \quad (k = 1, 2, 3) \end{gathered}} \quad . \tag{9}$$

Die Funktion Φ_i wird dabei als das von den Massen $m_1 \ldots m_{i-1}, m_{i+1} \ldots m_n$ am Orte $\mathfrak{x}_i$ der Masse m_i erzeugte „*Gravitationspotential*" bezeichnet.

Der Übergang von einem diskreten zu einem kontinuierlichen System hat gerade an die Gleichungen (9) anzuknüpfen. Die diskrete Punktdynamik aber treibt die Formalisierung weiter, indem sie die Funktion

$$\Phi \equiv \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} m_\lambda \Phi_\lambda \equiv -\frac{\varkappa}{2} \sum_{\lambda,\mu}{}' \frac{m_\lambda m_\mu}{r_{\lambda,\mu}} \tag{10}$$

einführt, wobei nun rechts über alle λ und μ von 1 bis n, aber unter Auslassung der Koinzidenzen $\lambda = \mu$, zu summieren ist. Mit Hilfe dieser „*potentiellen Energie*" Φ vereinfacht sich (9) weiter zu

$$\boxed{\begin{gathered} m_i \ddot{x}_{ik} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_{ik}} \\ \Phi \equiv -\frac{\varkappa}{2} \sum_{\lambda,\mu}{}' \frac{m_\lambda m_\mu}{r_{\lambda,\mu}} \\ (i, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n), \quad (k = 1, 2, 3) \end{gathered}} \quad . \tag{11}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nun die klassischen intermediären Integrale, die wir der Kürze halber wieder vektoriell schreiben wollen:

1. Führt man eine Hilfsfunktion

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} m_\lambda \dot{\mathfrak{x}}_\lambda^2 , \tag{12}$$

die „*kinetische Energie*", sowie eine Konstante E ein, so ergibt sich der „*Energiesatz*"

$$T + \Phi = E . \tag{13}$$

2. Als „*Impulssatz*" bezeichnet man das Integral

$$\sum_{\lambda=1}^{n} m_\lambda \dot{\mathfrak{x}}_\lambda = \mathfrak{J} , \tag{14}$$

wo $\mathfrak{J}$ einen konstanten Vektor, den „Totalimpuls", darstellt.

3. Unter dem „*Drehimpulssatz*" schließlich versteht man das Integral

$$\sum_{\lambda=1}^{n} m_\lambda [\mathfrak{x}_\lambda , \ \dot{\mathfrak{x}}_\lambda] = \mathfrak{D} \ , \tag{15}$$

wo der konstante Vektor $\mathfrak{D}$ den „totalen Drehimpuls" darstellt.

Da aus (14) leicht ein weiteres Integral, der „*Schwerpunktsatz*", gewonnen werden kann, so stehen also insgesamt — nach Komponenten gezählt — immer 10 intermediäre Integrale zur Verfügung.

Diese wohlbekannten Dinge habe ich hier noch einmal der Reihe nach aufgezählt, damit der Leser klar vor Augen hat, wo die kontinuierliche Betrachtungsweise abzweigt und wie sie später in die diskrete Dynamik eingeordnet werden muß.

§ 2. Die Grundgleichungen für ein Kontinuum

Wir stellen uns jetzt vor, die Anzahl der Partikel wachse ins Unendliche unter der Nebenbedingung, daß die Gesamtmasse konstant bleibe und überdies die diskrete Verteilung im Raum in eine kontinierliche übergehe. Zur entsprechenden Umformung eignet sich, wie schon oben erwähnt wurde, das System (9). Dies hat seinen Grund darin, daß man die Bewegungsgleichung vor Ausführung des Grenzüberganges durch die gegen Null strebende Einzelmasse m_i kürzen kann.

Da jetzt eine Zählung der Teilchen nicht mehr möglich ist, wählen wir für den Ortsverkehr $\mathfrak{x}_i$ des einzelnen „Aufpunktes" in (9) die Bezeichnung

$$\mathfrak{x} = (x_1 , x_2 , x_3) \ . \tag{16}$$

Alle übrigen Punkte aber, die auf den Aufpunkt wirkenden „Quellpunkte", charakterisieren wir einheitlich durch den Vektor

$$\mathfrak{y} = (y_1 , y_2 , y_3) \ . \tag{17}$$

Nehmen wir an, die gesamte Masse M sei mit der Dichte

$$\mu = \mu \,(y_1 , y_2 , y_3) = \mu(\mathfrak{y}) \tag{18}$$

über einem Raumteil Γ kontinuierlich verteilt, und bezeichnen wir das Volumenelement $dy_1 dy_2 dy_3$ kurz mit dy, so gilt

$$M = \int\limits_{\Gamma} \mu \,(\mathfrak{y})\, dy \ , \tag{19}$$

und an Stelle der Potentialfunktion Φ_i tritt sinngemäß

$$\Phi(\mathfrak{x}) = -\varkappa \int \frac{\mu(\mathfrak{y})\, dy}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|} \;. \tag{20}$$

Die Bewegungsgleichung aber geht nach vorgängiger Kürzung mit m_i über in

$$\ddot{x}_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \;. \tag{21}$$

Die Gleichungen (21) aber werden erst brauchbar, wenn folgende einschneidende Einschränkung getroffen wird:

Die Geschwindigkeiten sollen ein stetiges Vektorfeld bilden, das überdies so oft differenzierbar sein soll, als es die Umstände erfordern

$$\dot{x}_k = u_k\,(x_1, x_2, x_3\,; t) \;. \tag{22}$$

Führt man dies in (21) ein, so ergibt sich

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_\lambda} u_\lambda + \frac{\partial u_k}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \;. \tag{23}$$

Als Ersatz für die Zählung im diskreten System hat man schließlich noch die Kontinuitätsgleichung zu fordern:

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial(\mu u_\lambda)}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \;. \tag{24}$$

Die Gleichungen (20), (23) und (24) fassen wir nun in folgender Gestalt zusammen

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\\
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\mu u_3)}{\partial x_3} = 0\\
&\Phi = -\varkappa \int\!\!\int\!\!\int \frac{\mu(y_1, y_2, y_3\,;\, t)\, dy_1\, dy_2\, dy_3)}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}}
\end{aligned}} \tag{25}$$

Es handelt sich also um die *Eulerschen Gleichungen* ohne Druckglied. Das Charakteristische dieses Systems ist nun der Umstand, daß nach der letzten Gleichung die Kräfte ihrerseits wiederum von der zu bestimmenden Verteilung abhängen. Es liegt also ein geschlossener Systemzusammenhang vor. Nimmt man zum Beispiel die eingehenden Funktionen als analytisch an, so erkennt man durch sukzessive Berechnung der zeitlichen Ableitungen, daß der ganze Ablauf durch Vorgabe der Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung zur Zeit $t = 0$ eindeutig bestimmt ist.

Aus der Potentialdarstellung in (25) folgt bekanntlich die *Poissonsche Gleichung*

$$\Delta \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 4 \pi \varkappa \mu (x_1, x_2, x_3; t) . \tag{26}$$

Diese Relation wird uns gestatten, im nächsten Paragraphen vollständige differentielle Erhaltungssätze zu gewinnen. Dieser Umstand ist wichtig, denn nachdem wir in § 1 schon beim System (9) vom vorgezeichneten Schema abgewichen sind, muß auf anderem Wege ein Ersatz für die vorderhand ausgefallenen Integrale (13), (14) und (15) gesucht werden.

§ 3. Die Erhaltungssätze

Für die nun vorzunehmenden Umformungen ist es zweckmäßig, die vier ersten Gleichungen von (25) abgekürzt zu schreiben mittels der Vorschrift, daß über doppelt auftretende Indizes summiert wird, und überdies die letzte Gleichung von (25) durch (26) zu ersetzen, wobei ebenfalls die abgekürzte Schreibweise verwendet werden kann. Wir erhalten so folgende Gleichungen

$$A_i \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \tag{27 a}$$

$$B \equiv \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial (\mu u_\lambda)}{\partial x_\lambda} = 0 \tag{27 b}$$

$$C \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\lambda \, \partial x_\lambda} - 4 \pi \varkappa \mu = 0 . \tag{27 c}$$

Bildet man nun nacheinander die nach der Summationsvorschrift zu lesenden Kombinationen

$$\begin{aligned} \mu u_i A_i + \tfrac{1}{2} u_i u_i B &= 0 , \\ \mu A_i + u_i B &= 0 , \\ \mu (x_k A_i - x_i A_k) + (x_k u_i - x_i u_k) B &= 0 , \end{aligned}$$

so erhält man auf Grund geläufiger partieller Umformungen folgende Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\mu u_i u_i + \mu\Phi\right) + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left[\left(\tfrac{1}{2}\mu u_i u_i + \mu\Phi\right) u_\lambda\right] - \mu\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{28a}$$

$$\frac{\partial(\mu u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(\mu u_i u_\lambda) + \mu\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \tag{28b}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu(x_k u_i - x_i u_k)\right] + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left[\mu(x_k u_i - x_i u_k) u_\lambda\right]\\ &\qquad + \mu\left(x_k\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - x_i\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right) = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{28c}$$

Diese Relationen stellen noch keine vollständigen differentiellen Erhaltungssätze dar, da eben die Schlußglieder

$$-\mu\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \mu\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \mu\left(x_k\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - x_i\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right) \tag{29}$$

nicht Divergenzgestalt haben. Führt man jetzt aber in diesen Gliedern den aus (27c) fließenden Ausdruck

$$\mu = \frac{1}{4\pi\varkappa}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\lambda\,\partial x_\lambda} \tag{30}$$

ein, so kann man durch geeignete partielle Umformungen Divergenzgestalt erzielen. Damit verwandeln sich die Gleichungen (28) in eigentliche *differentielle Erhaltungssätze.*

1. Als *Energiesatz* ergibt sich

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \tag{31}$$

mit der *Energiedichte*

$$U \equiv \tfrac{1}{2}\mu u_\lambda u_\lambda + \mu\Phi + \frac{1}{8\pi\varkappa}\frac{\partial \Phi}{\partial x_\lambda}\frac{\partial \Phi}{\partial x_\lambda} \tag{31a}$$

und der *Energiestromdichte*

$$U_i = \left(\tfrac{1}{2}\mu u_\lambda u_\lambda + \mu\Phi\right) u_i - \frac{1}{4\pi\varkappa}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial x_\lambda}\,. \tag{31b}$$

2. Der *Impulssatz* lautet

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} + \frac{\partial J_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{32}$$

mit der *Impulsvektordichte*

$$J_i = \mu\, u_i \tag{32a}$$

und der *Impulsvektorstromdichte*

$$J_{ik} = \mu u_i u_k + \frac{1}{4\pi\varkappa}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} - \tfrac{1}{2}\,\delta_{ik}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_\lambda}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_\lambda}\right), \tag{32b}$$

wo δ_{ik} wie üblich die Einheitsmatrix bedeutet.

3. Der *Drehimpulssatz* schließlich erhält die Gestalt

$$\frac{\partial R_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial R_{ikl}}{\partial x_l} = 0 \tag{33}$$

mit der *Drehimpulstensordichte*

$$R_{ik} = \mu\,(x_k\, u_i - x_i\, u_k) \tag{33a}$$

und der *Drehimpulstensorstromdichte*

$$\left.\begin{aligned} R_{ikl} = \mu\,(x_k u_i - x_i u_k)\, u_l &+ \frac{1}{4\pi\varkappa}\left(x_k\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} - x_i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_l} \\ &+ \frac{1}{8\pi\varkappa}\,(\delta_{kl}\, x_i - \delta_{il}\, x_k)\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_\lambda}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{33b}$$

In den Gleichungen (31) bis (33) haben wir den vollständigen differentiellen Ersatz für die Erhaltungssätze (13) bis (15) der diskreten Punktdynamik.

Durch Integration über den ganzen Raum folgen hierauf die integralen Erhaltungssätze:

$$\int U\, dx = E \tag{34}$$

$$\int J_i\, dx = I_i \tag{35}$$

$$\int R_i\, dx = D_{ik} \tag{36}$$

wo also rechts die konstante Energie E und die konstanten Komponenten I_i und D_{ik} des Impulses und des Drehimpulses stehen, während dx das Volumelement $dx_1\, dx_2\, dx_3$ bedeutet.

§ 4. Störungsrechnung

Wir schreiben (25) mit Hilfe der in § 3 gebrauchten Abkürzung in der Gestalt

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{37 a}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial (\mu u_k)}{\partial x_k} = 0 \tag{37 b}$$

$$\Phi = - \varkappa \int \frac{\mu \, dy}{\sqrt{(x_k - y_k)(x_k - y_k)}} \, . \tag{37 c}$$

Gestützt auf den Umstand, daß $\varkappa$ gemäß (4) eine kleine Zahl ist, kann man folgenden *Störungsansatz* machen

$$u_i = \sum_{\alpha=0}^{\infty} u_{i\alpha} \varkappa^{\alpha} = u_{i\alpha} \varkappa^{\alpha} \tag{38 a}$$

$$\mu = \sum_{\beta=0}^{\infty} \mu_\beta \varkappa^\beta = \mu_\beta \varkappa^\beta \, . \tag{38 b}$$

Führt man diese Reihen in die Gleichungen (37) ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich vorerst für die *nullte Näherung* das System

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + u_{k0} \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_k} = 0 \\ &\frac{\partial \mu_0}{\partial t} + \frac{\partial (\mu_0 u_{k0})}{\partial x_k} = 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(39_0) \\ &(40_0) \end{aligned}$$

und hierauf für die *Näherung der Stufe* γ das System

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial u_{i\gamma}}{\partial t} + \sum_{\alpha=0}^{\gamma} u_{k\alpha} \frac{\partial u_{i,\gamma-\alpha}}{\partial x_k} = \int_\Gamma \frac{\mu_{\gamma-1} (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})}{r^3} \, d_\gamma \\ &\frac{\partial \mu_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\gamma} \mu_\alpha u_{k,\gamma-\alpha} \right\} = 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(39) \\ &(40) \end{aligned}$$

wo $\sqrt{(x_k - y_k)(x_k - y_k)} = r$ gesetzt wurde.

Die drei Gleichungen (39_0) bilden zusammen ein nichtlineares System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung der drei Funktionen

$$u_{i0} = u_{i0}(x_1, x_2, x_3; t) \tag{41}$$

aus den Anfangsgeschwindigkeiten

$$a_{i0} = u_{i0}(x_1, x_2, x_3; 0) \tag{42}$$

zur Zeit $t = 0$. Das System (39_0) beschreibt einfach die Trägheitsbewegung des Massenkontinuums im gravitationslosen Falle. Nach Ermittlung der Lösungen (41) hat man in (40_0) eine lineare partielle Differentialgleichung zur Bestimmung der Dichte

$$\mu_0 = \mu_0(x_1, x_2, x_3; t) \tag{43}$$

auf Grund der Anfangsdichte

$$b_0 = \mu_0(x_1, x_2, x_3; 0) \tag{44}$$

zur Zeit $t = 0$.

Die drei Gleichungen (39) werden gelöst unter Voraussetzung der Kenntnis der Funktionen

$$u_{i\alpha} = u_{i\alpha}(x_1, x_2, x_3; t) \ ; \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, \gamma - 1) \tag{45}$$

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha(x_1, x_2, x_3; t) \ ; \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, \gamma - 1) \ . \tag{46}$$

Sie bilden dann drei individuelle lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung für die individuellen Funktionen

$$u_{i\gamma} = u_{i\gamma}(x_1, x_2, x_3; t) \ ; \qquad (i = 1, 2, 3) \ . \tag{47}$$

Nach Ermittlung der Funktionen (47) hat man schließlich in (40) wiederum eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung zur Bestimmung der Funktion

$$\mu_\gamma = \mu_\gamma(x_1, x_2, x_3 \ ; t) \ . \tag{48}$$

Hier ist noch auf folgenden Umstand aufmerksam zu machen. Falls man, wie es dem allgemeinen Falle entspricht, die Anfangswerte für (47) und (48) zur Zeit $t = 0$ vorgibt, also die Funktionen

$$a_{i\gamma} = u_{i\gamma}(x_1, x_2, x_3; 0) \tag{50}$$

und $$b_\gamma = \mu_\gamma(x_1, x_2, x_3; 0) \ , \tag{51}$$

die wirkliche Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsdichte nicht durch a_{i0} und b_0, sondern durch

$$a_i = \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_{i\gamma}\,\varkappa^\gamma \tag{52}$$

und

$$b = \sum_{\gamma=0}^{\infty} b_\gamma\,\varkappa^\gamma \tag{53}$$

gegeben sind.

Es ist also denkbar, daß diese Freiheit zur Anpassung in konkreten Fällen ausgenützt werden kann.

§ 5. Der kugelsymmetrische Fall

Im Falle der Kugelsymmetrie ergibt sich unter geeigneten Anfangsbedingungen ein vollständig integrierbares System, das aufs engste zusammenhängt mit den Ergebnissen der dynamischen Kosmologie, über welche *Heckmann*[2]) berichtet hat.

Wir nehmen jetzt also an, sowohl das Geschwindigkeitsfeld als auch die Dichteverteilung seien in bezug auf den Ursprung kugelsymmetrisch. Mit

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{54}$$

heißt das

$$u_i = \frac{x_i}{r}\, v(r, t) \ , \tag{55}$$

$$\mu = \mu(r, t) \ . \tag{56}$$

Die entsprechende Spezialisierung des Systems (37) liefert dann

$$\frac{\partial v}{\partial t} + r\,\frac{\partial v}{\partial r} = -\,\frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{57 a}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial r} = -\,\frac{2\mu v}{r} \tag{57 b}$$

$$\Phi = -\,\frac{4\pi\varkappa}{r}\int_0^r \mu(\varrho, t)\,\varrho^2\,d\varrho - 4\pi\varkappa\int_r^\infty \mu(\varrho, t)\,\varrho\,d\varrho \ . \tag{57 c}$$

[2]) Theorien der Kosmologie, Springer, Berlin 1942.

Aus (57c) folgt
$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{4\pi\varkappa}{r^2}\int_0^r \mu(\varrho, t)\,\varrho^2\,d\varrho \tag{58}$$

und man kann daher dem System (57) folgende Gestalt geben

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\chi}{r^2} && \text{(59a)}\\ &\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial r} = -\frac{2\mu v}{r} && \text{(59 b)}\\ &\chi = 4\pi\varkappa\int_0^r \mu(\varrho, t)\,\varrho^2\,d\varrho && \text{(59 c)}\end{aligned}}$$

Die Anfangsbedingungen für die Funktionen $v(r, t)$ und $\mu(r, t)$ schreiben wir in der Gestalt

$$v(r, o) = a(r)\,; \qquad \mu(r, o) = b(r)\,. \tag{60}$$

Der eingangs erwähnte integrable Fall ergibt sich nun, wenn man speziell setzt

$$\boxed{v(r, 0) = a\,r\;; \quad \mu(r, 0) = b} \tag{61}$$

wo a und b Konstanten sind.

Wird diese Anfangsbedingung auf den unbegrenzten Raum bezogen, so haben wir offenbar den kosmologischen Fall vor uns. Im Falle einer begrenzten Masse sollten dagegen die Anfangsdaten auf eine Kugel von endlichem Radius beschränkt werden. Doch zeigen ja die Gleichungen (59) den wohlbekannten Effekt, daß die Kraftwirkung auf eine Schale nur von den Massen im Innern abhängt. Die Bewegung einer begrenzten Kugelmasse ist also in dem vorliegenden kugelsymmetrischen Falle unabhängig davon, ob im Außenraum die Dichte Null gesetzt wird oder nicht.

Schon die ersten Schritte der Störungsrechnung zeigen, daß der mit den Anfangsbedingungen verträgliche Ansatz

$$v(r, t) = r\,\omega(t)\,; \qquad \mu = \mu(t) \tag{62}$$

eine Separation liefert. Es folgt

$$\chi = 4\pi\varkappa\mu \int_0^r \varrho^2\, d\varrho = \frac{4\pi\varkappa}{3} r^3 \mu \tag{63}$$

und die Gleichungen (59a) und (59b) gehen über in

$$\dot{\omega} = -\omega^2 - \frac{4\pi\varkappa}{3}\mu \tag{64a}$$

$$\dot{\mu} = -3\omega\mu\ . \tag{64b}$$

Aus diesen Gleichungen aber ergibt sich die lineare Differentialgleichung

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{d(\omega^2)}{d\mu} - \frac{2}{3\mu}\omega^2 = \frac{8\pi\varkappa}{9} \\ \mu = b\ ; \qquad \omega = a \end{gathered}} \tag{65}$$

wo in der zweiten Zeile die Anfangsbedingungen eingetragen sind.

Ihre Integration liefert

$$\omega = 2\sqrt{\frac{2\pi\varkappa}{3}}\, \mu^{\frac{1}{3}} \sqrt{\mu^{\frac{1}{3}} - A^{\frac{1}{3}}} \tag{66}$$

mit

$$A = b\left(1 - \frac{3a^2}{8\pi\varkappa b}\right)^3 \ . \tag{67}$$

Führt man die gefundene Lösung in (64b) ein und integriert, so folgt die Zeitgleichung

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{6\pi\varkappa}} \int_b^\mu \frac{d\nu}{\nu^{\frac{4}{3}}\sqrt{\nu^{\frac{1}{3}} - A^{\frac{1}{3}}}} \tag{68}$$

Das Integral rechts werten wir aus durch die Substitution

$$\nu = A\,(1 + \zeta^2)^3\ . \tag{69}$$

Bezeichnet man die den alten Grenzen μ und b entsprechenden neuen Grenzen mit z und β, so ergibt sich

$$\boxed{\begin{gathered} t = \frac{3}{2\sqrt{6\pi\varkappa A}} \left[\frac{\zeta}{1+\zeta^2} + Ar\operatorname{ctg}\zeta\right]_z^\beta \\ \beta = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{b}{A}} - 1}\ ; \quad z = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{\mu}{A}} - 1} \end{gathered}} \tag{70}$$

Dieser Ausdruck ist offenbar dem Falle $A > 0$ angepaßt. Im Falle $A < 0$ setzen wir

$$- A = b \left(\frac{3 a^2}{8 \pi \varkappa b} - 1 \right)^3 = B \tag{71}$$

und verwenden die Substitution

$$v = B (\zeta^2 - 1)^3 \ . \tag{72}$$

An Stelle von (70) erhalten wir dann

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \frac{3}{2 \sqrt{6 \pi \varkappa B}} \left[\frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} - \mathrm{Lg} \sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}} \right]_\beta^z \\ \beta &= \sqrt{\sqrt[3]{\frac{b}{B}} + 1} \ ; \quad z = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{\mu}{B}} + 1} \end{aligned}} \tag{73}$$

Offenbar sind nun in der Interpretation drei Fälle zu unterscheiden, die wir nach dem Grenzeffekt für große Zeiten benennen wollen:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{I.} & A = - B > 0 & ; & \text{Kontraktion.} \\ \text{II.} & A = \ \ \ B = 0 & ; & \text{Stagnation.} \\ \text{III.} & - A = \ \ \ B > 0 & ; & \text{Expansion.} \end{array}\right\} \tag{74}$$

Das Vorzeichen der Wurzel in (68) ist für alle Fälle zutreffend, falls wir

$$a > 0 \tag{75}$$

annehmen und die in Aussicht genommene Zeit nicht zu groß ist. Dann sinkt nämlich anfänglich die Dichte μ von b auf tiefere Werte. Das Differential $d\mu$ in (68) ist also negativ und t wird positiv, wie es sein muß.

Um nun eine Vorstellung vom Ablauf zu bekommen, müssen wir die Bewegung eines einzelnen Partikels verfolgen. Nach (55) ist seine totale Geschwindigkeit

$$\sqrt{u_i \, u_i} = v = \dot{r} \ . \tag{76}$$

Nach (62) haben wir also

$$\dot{r} = r \omega \ . \tag{77}$$

Verbinden wir diese Beziehung mit (64b), so folgt

$$\frac{dr}{r} + \frac{d\mu}{3\mu} = 0 ,$$

was integriert

$$r = r_0 \sqrt[3]{\frac{b}{\mu}} \tag{78}$$

ergibt, wo r_0 den Abstand des Partikels vom Ursprung zur Zeit $t = 0$ darstellt. Führen wir diesen Wert und ω gemäß (66) in (77) ein, so erhalten wir

$$\dot{r} = 2\sqrt{\frac{2\pi\varkappa}{3}\sqrt[3]{b}}\sqrt{\sqrt[3]{\mu} - \sqrt[3]{A}} \cdot r_0 . \tag{79}$$

Nun ergibt sich die kinematische Interpretation der drei Fälle (74).

1. Fall: $A > 0$. Es findet anfänglich Dilatation statt bis die Dichte μ auf den kritischen Wert

$$\mu_1 = A = b\left(1 - \frac{3a^2}{8\pi\varkappa b}\right)^3 \tag{80}$$

gesunken ist. Die dazu erforderliche Zeit ist

$$\tau = \frac{6}{C^3}\left(a^2\sqrt{3} + 2\pi\varkappa b \, A r \operatorname{ctg}\frac{a\sqrt{3}}{C}\right) \tag{81}$$

mit

$$C = \sqrt{|\, 8\pi\varkappa b - 3a^2 \,|} . \tag{82}$$

Im Moment $t = \tau$ wechselt die Wurzel in (79) das Vorzeichen. Nachher findet *Kontraktion* statt. Nach Ablauf der Zeitspanne

$$T = \frac{3\pi}{4\sqrt{6\pi\varkappa A}} = \frac{4\sqrt{3}\pi^2\varkappa b}{C^3} \tag{83}$$

vom Moment der Umkehr an gerechnet hat sich die ganze Masse auf einen Punkt im Ursprung zusammengezogen, denn nach (78) und (62) kontrahiert sie sich synchron.

2. Fall: $A = 0$. Man überblickt die Verhältnisse am bequemsten, wenn man im Falle *1.* die Größe A abnehmend gegen Null streben läßt. Die kritische Dichte μ_1 sowie die Konstante C streben dann gegen Null und (79) geht über in

$$\dot{r} = 2\sqrt{\frac{2\pi\varkappa}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}\, \mu^{\frac{1}{6}}\, r_0 \,, \tag{84}$$

während die Dilatationsdauer τ unendlich wird. Auf Grund von (78) und (84) ergibt sich also folgendes Bild: Jeder Partikel wandert ins Unendliche, wobei seine Geschwindigkeit gegen Null absinkt. Im Endeffekt liegt also *Stagnation* vor. Als für diesen Fall chakteristische Relation können wir gemäß (67) notieren

$$a = 2\sqrt{\frac{2\pi\varkappa b}{3}} \,. \tag{85}$$

3. Fall: $-A = B > 0$. Wir können ihn durch

$$a > 2\sqrt{\frac{2\pi\varkappa b}{3}} \tag{86}$$

charakterisieren. Die zur Erreichung der Dichte $\mu = 0$ erforderliche Zeit ist laut (73) wegen

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{z^2 - 1} - \operatorname{Lg} \sqrt{\frac{z+1}{z-1}} \right) = \infty$$

unendlich. Qualitativ liegen die Verhältnisse wie beim Fall II. Die wesentliche Abweichung beruht darauf, daß jetzt nach (79) jeder Partikel einer von Null verschiedenen Grenzgeschwindigkeit

$$\dot{r}_\infty = r_0 a \sqrt{1 - \frac{8\pi\varkappa b}{3a^2}} \tag{87}$$

zustrebt. In diesem Sinne kann man von einer eigentlichen *Expansion* sprechen.

§ 6. Schlußbetrachtung

Wie schon erwähnt wurde, gelten die in § 5 gemachten Feststellungen unabhängig davon, ob es sich um eine begrenzte Massenkugel oder um ein den ganzen Raum erfüllendes Massenkontinuum handelt. Im letzteren Falle also ordnen sich diese Feststellungen ein in die Resultate, welche die dynamische Kosmologie auf Grund ihrer spezifischen Annahmen gefunden hat.

Mein Eindruck geht nun allerdings dahin, daß kosmologische Betrachtungen im unbegrenzten euklidischen Raum wohl didaktisch nützlich, aber grundsätzlich unbefriedigend sind. Gewisse einfache Beziehungen, die man dabei findet, können doch wohl bestenfalls nur als kosmologische Symptome gelten. Einen guten Sinn bekommt die ganze Fragestellung erst in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Lediglich als kosmologische Symptome will ich nun aus § 5 noch zwei Einzelfälle auswählen.

1. Wählt man als Anfangspunkt der Zeitmessung den Umkehrpunkt von Fall I, § 5, so ergibt sich folgende Aussage:

Sind die Partikel einer homogenen Massenkugel der Dichte b zur Zeit $t = 0$ in Ruhe $(a = 0)$, so zieht sich die Massenkugel in der Zeitspanne

$$T = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{2\varkappa b}} \tag{88}$$

auf einen Punkt zusammen.

Diese Zeit hängt also *nur* von der Dichte und nicht von der Größe der Kugel ab.

Für den universellen Proportionalitätsfaktor findet man aus (4)

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{2\varkappa}} = 2{,}10 \cdot 10^3 \ \mathrm{gr.}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{cm}^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{sec}^1\,. \tag{89}$$

Auf Grund von Daten, wie sie heute die Astronomie liefert, erhält man daher folgende Tabelle:

	gr cm^{-3}	T
Erde . . .	5,3	15,2 min
Milchstraße	10^{-24}	$6{,}7 \cdot 10^7$ Jahre
Weltraum .	$1{,}40 \cdot 10^{-28}$	$5{,}6 \cdot 10^9$ Jahre

(90)

Die Erde würde also in einer Viertelstunde auf einen Punkt zusammenschrumpfen, wodurch offenbar das Überwiegen der Materiekräfte illustriert wird.

Die Weltraumdichte aber ergibt 5,6 Milliarden Jahre, eine Zahl also, die in der Größenordnung des heute gelegentlich diskutierten Weltalters liegt.

2. Wenn man die mit zunehmender Distanz wachsende Rotverschiebung der Sternspektren im Sinne der vorrelativistischen Physik einfach als Effekt einer Fluchtgeschwindigkeit interpretiert, resultiert ein Bewegungszustand, der genau dem in § 5 behandelten Schema entspricht.

Die empirischen Daten gestatten, die auf die Distanz 1 cm normierte Fluchtgeschwindigkeit a festzustellen. Es ist aber üblich, dieselbe auf die Distanz

$$\begin{aligned} D &= 1 \text{ Megaparsec} \\ &= 10^6 \text{ Parsec} \\ &= 3{,}26 \cdot 10^6 \text{ Lichtjahre} \\ &= 3{,}08 \cdot 10^{24} \text{ cm} \end{aligned}$$

zu normieren. In unserer Bezeichnung bedeutet also die von von Astronomen zu 580 km $\sec^{-1}$ pro Megaparsec angegebene Fluchtgeschwindigkeit die Gleichung

$$a\,D = 5{,}80 \cdot 10^7 \text{ cm}^2 \sec^{-1} , \tag{92}$$

woraus sich

$$a = 1{,}88 \cdot 10^{-17} \text{ cm} \sec^{-1} \tag{93}$$

ergibt.

Herr Schürer, dem ich diese Angaben verdanke, wies mich darauf hin, daß wohl der Fall der Stagnation ein besonderes Interesse verdiene, einmal, weil dann nach (85) die Weltraumdichte durch a allein bestimmt ist, dann aber auch, weil dieser Fall wohl am ehesten als natürliches Gleichgewicht angesehen werden kann.

Mit den Werten a und b aus (93) und (90) finden wir nun für das kritische Verhältnis

$$\gamma = \frac{a}{2\sqrt{\dfrac{2\pi\varkappa b}{3}}}$$

den Wert $\gamma = 2{,}1$. Dies entspricht nach (86) dem Fall einer *Expansion.* Nun hat mir aber Herr Zwicky (Pasadena) kürzlich mündlich mitgeteilt, daß nach den neuesten Durchmusterungen des Fixsternhimmels mit Hilfe des Schmidt-Spiegels die Zahl der weißen Zwerge schätzungsweise zehnmal so groß sei wie der „normalen" Sonnen! Entsprechend wäre unser b zu ersetzen durch $11b$, was dann den Wert $\gamma = 0{,}64$ ergäbe. Nach (80) entspricht dies der *Kontraktion.* Man kann sich nun wirklich fragen, ob es nicht mehr als ein Zufall ist, daß die Diskussion in die Nähe der Stagnationsziffer $\gamma = 1$ führt.

(Eingegangen den 7. Februar 1949.)