# Abwickelbare Schiebflächen in Rn.

# Abwickelbare Schiebflächen in $R_n$

Von M. PINL, Dacca (Pakistan)

*E. Bessel-Hagen zum Gedächtnis*

Wenngleich die Schiebflächen eines $n$-dimensionalen affineuklidischen Raumes $R_n$ eine affininvariant charakterisierbare Flächenklasse darstellen, so sind für diese Flächen doch auch mehrfach schon zusätzliche metrische Bedingungen formuliert worden. Fordert man z. B. identisches Verschwinden des (metrisch definierten) mittleren Krümmungsvektors, so ergibt sich die Liesche Auffassung der Minimalflächen als Schiebflächen isotroper Kurven (auch für $n > 3$)[1]. Fordert man dagegen das identische Verschwinden der Gaußschen Krümmung, so ergeben sich im dreidimensionalen euklidischen Raum, wie wiederum S. Lie zuerst gezeigt hat[2], Zylinderflächen (einschließlich Ebenen). Gleichwie aber nun das identische Verschwinden der Gaußschen Krümmung einer Fläche in mehr als dreidimensionalen Räumen nicht mehr für Torsen charakteristisch ist, sind bereits für $n = 4$ die Zylinder und Ebenen nicht mehr die einzigen Typen abwickelbarer Schiebflächen des $R_n$.

## § 1. Die Gaußsche Krümmung der Schiebflächen

Wir bezeichnen mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kartesische Punktkoordinaten eines $n$-dimensionalen euklidischen Raumes $R_n$ und mit kleinen gotischen Buchstaben $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ Vektoren in $R_n$. Sind $u, v$ Gaußsche Parameter einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ dieses $R_n$, so kann eine Schiebfläche in der bekannten vektoriellen Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u) + \mathfrak{z}(v) \tag{1}$$

geschrieben werden. Bezeichnen wir Ableitungen nach $u$ mit Strichen und Ableitungen nach $v$ mit Punkten, so ergeben sich für die Kompo-

[1] Vgl. z. B. *E. Bompiani*, Surfaces de translation, C. r. **169** (1919) 840—843 (für Riemannsche Einbettungsräume).

[2] Vgl. *S. Lie*, Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, zweiter Teil, S. 554, Leipzig 1937.

nenten $g_{\alpha\beta}(u, v)$ des metrischen Fundamentaltensors der Fläche (1) die Werte

$$g_{11} = \mathfrak{y}'^2 , \quad g_{12} = \mathfrak{y}' \dot{\mathfrak{z}} , \quad g_{22} = \dot{\mathfrak{z}}^2 \; ; \quad g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = \mathfrak{y}'^2 \dot{\mathfrak{z}}^2 - (\mathfrak{y}' \dot{\mathfrak{z}})^2 \neq 0 \, . \tag{2}$$ [3]

Zur Berechnung der Gaußschen Krümmung $K$ verwenden wir den von R. Baltzer-W. Blaschke[4]) angegebenen Ausdruck, der sich, da $g_{11}$ und $g_{22}$ jeweils nur Funktionen eines Argumentes sind, auf

$$g^2 K = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}'' \ddot{\mathfrak{z}} , & \mathfrak{y}'' \mathfrak{y}' , & \mathfrak{y}'' \dot{\mathfrak{z}} \\ \mathfrak{y}' \ddot{\mathfrak{z}} , & \mathfrak{y}'^2 , & \mathfrak{y}' \dot{\mathfrak{z}} \\ \dot{\mathfrak{z}} \ddot{\mathfrak{z}} , & \dot{\mathfrak{z}} \mathfrak{y}' , & \dot{\mathfrak{z}}^2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

reduziert.

Nunmehr bezeichnen wir den Plückerschen Tensor zur Vektorbasis $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ mit $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$. Dann läßt sich die rechte Seite von (3) als Überschiebung zweier solcher Plückerscher Tensoren dritter Stufe schreiben und die Bedingung $K = 0$ lautet:

$$[\mathfrak{y}' , \dot{\mathfrak{z}} , y''] \, [\mathfrak{y}' , \dot{\mathfrak{z}} , \ddot{\mathfrak{z}}] = 0 \, . \tag{4}$$

Das Ergebnis kann man so formulieren:

(*I*) *Eine Schiebfläche des $R_n$ ist dann und nur dann abwickelbar*[5]), *wenn die Überschiebung der beiden Plückerschen Tensoren dritter Stufe, deren Basen durch die Schmiegebenen der Schiebkurven und je einen der Tangentenvektoren $\mathfrak{y}'$ und $\dot{\mathfrak{z}}$ aufgespannt werden, verschwindet.*

Im Falle $n = 3$ sind diese Plückerschen Tensoren offenbar die Determinanten $(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \dot{\mathfrak{z}})$ und $(\mathfrak{y}', \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}})$ und die Bedingung (4) bedeutet dann notwendig das Verschwinden mindestens eines der beiden Faktoren der rechten Seite, z. B.

$$[\mathfrak{y}', \dot{\mathfrak{z}}, \mathfrak{y}''] = (\mathfrak{y}', \dot{\mathfrak{z}}, \mathfrak{y}'') = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha \mathfrak{y}' + \beta \mathfrak{y}'' + \gamma \dot{\mathfrak{z}} = 0 \, . \tag{5}$$

---

[3]) Die Bedingung $g \neq 0$ ist notwendige Voraussetzung für die Existenz der Gaußschen Krümmung $K$.

[4]) Vgl. *W. Blaschke*, Differentialgeometrie, Bd. I, 3. Aufl., S. 93, Berlin 1930.

[5]) Der Begriff „abwickelbar" wird hier immer im Sinne von „abwickelbar auf eine Ebene" gebraucht; zu einer allgemeineren Formulierung im Falle einer Fläche mit einem einzigen Netz konjugierter Kurven gelangt E. Bompiani im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung Bd. **51** (1941), Heft 1, S. 82—100.

Für $\gamma \neq 0$ kann

$$\dot{\mathfrak{z}} = \lambda \mathfrak{y}' + \mu \mathfrak{y}'' \tag{6}$$

geschrieben werden. Differentiation nach $u$ ergibt:

$$0 = \lambda' \mathfrak{y}' + (\lambda + \mu') \mathfrak{y}'' + \mu \mathfrak{y}''' .$$

Somit ist entweder $\lambda' = \mu = \mu' = \lambda = 0$ und dann $\dot{\mathfrak{z}} = 0$ oder $(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''') = 0$. Im zweiten Falle liegt $\dot{\mathfrak{z}}$ nach (6) in der Ebene der Kurve $\mathfrak{y}(u)$ und alle weiteren Ableitungen $\ddot{\mathfrak{z}}\,\dddot{\mathfrak{z}},\ldots$ bleiben darin. Der erste Fall widerspricht der Voraussetzung $g \neq 0$, der zweite führt auf eine Ebene. Ist jedoch $\gamma = 0$, so ergeben sich aus (5) keinerlei Beschränkungen für $\mathfrak{z}(v)$, wohl aber eine solche für $\mathfrak{y}(u)$: die Kurven $\mathfrak{y}(u)$ sind dann notwendig Gerade und die Flächen $\mathfrak{x}$ daher Zylinderflächen. *Damit ist der bekannte Liesche Satz wiedergefunden.*

Im Falle $n = 4$ sind die Plückerschen Tensoren $[\mathfrak{y}', \dot{\mathfrak{z}}, \mathfrak{y}'']$ und $[\mathfrak{y}', \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}}]$ Plückersche Vektoren, nämlich die Stellungsvektoren der von den Basisvektoren $\mathfrak{y}', \dot{\mathfrak{z}}, \mathfrak{y}''$ und $\mathfrak{y}', \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}}$, jeweils aufgespannten dreidimensionalen Räume. Dann bedeutet die Bedingung (4):

*(II) Die Schiebflächen des $R_4$ sind dann und nur dann abwickelbare Flächen, wenn in jedem Punkte der Fläche die beiden von der (gemeinsamen) Flächentangentialebene und den Schmiegebenen der Schiebkurven in diesem Punkte aufgespannten dreidimensionalen Räume orthogonal sind.*

Für $[\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \dot{\mathfrak{z}}] = 0$ bzw. $[\dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}}, \mathfrak{y}'] = 0$ enthält die Schmiegebene jeweils der einen Schiebkurve einen Vektor der Schmiegebene der andern Schiebkurve und die beiden Schmiegebenen liegen in einem dreidimensionalen Raum. Im allgemeinen Falle $[\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \dot{\mathfrak{z}}] \neq 0$ und $[\dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}}, \mathfrak{y}'] \neq 0$ liegen diese Schmiegebenen in einem vierdimensionalen Raum. Da sie stets den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ gemeinsam haben, sind sie niemals windschief. Daher gilt allgemein:

*(III) Die abwickelbaren Schiebflächen des $R_n$ zerfallen in drei Klassen je nachdem, ob die Schmiegebenen der beiden Schiebkurven in jedem Flächenpunkt zusammenfallen oder einen dreidimensionalen oder einen vierdimensionalen Raum aufspannen.*

Im ersten Falle ergeben sich Ebenen, im zweiten Zylinder, im dritten allgemeine abwickelbare Schiebflächen, diese frühestens im $R_4$.

## § 2. Die Killingsche Fläche in $R_4$

Die Fläche in $R_4$

$$2\mathfrak{x} = \{\cos u + \cos v, \sin u - \sin v, \sin u + \sin v, -\cos u + \cos v\} \quad (7)$$

die, in etwas modifizierter Gestalt, bereits von W. Killing angegeben worden ist[6]), ist offensichtlich eine Schiebfläche. Die Vektoren $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ ihrer Schiebkurven sind

$$\mathfrak{y} = \{\cos u, \sin u, \sin u, -\cos u\}, \quad \mathfrak{z} = \{\cos v, -\sin v, \sin v, \cos v\}\,. \quad (8)$$

Für die Determinante $(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}})$ ergibt sich

$$(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}}) = \begin{vmatrix} -\sin u, & -\cos u, & -\sin v, & -\cos v \\ \cos u, & -\sin u, & -\cos v, & \sin v \\ \cos u, & -\sin u, & \cos v, & -\sin v \\ \sin u, & \cos u, & -\sin v, & -\cos v \end{vmatrix} .$$

Für $u = v = 0$ erhält sie den Wert $-4 \neq 0$. Somit verschwindet $(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}})$ nicht identisch und die Schmiegebenen der Schiebkurven spannen den $R_4$ auf. Ferner gilt nach (8) und (2)

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{y}^2 = \mathfrak{z}^2 = 2\,; \; y_1 + y_4 = 0\,, \; y_2 - y_3 = 0\,, \; z_1 - z_4 = 0\,, \; z_2 + z_3 = 0 \\ &g_{12} = \mathfrak{y}'\dot{\mathfrak{z}} = 0\,; \quad \mathfrak{y}'\ddot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{y}''\dot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{y}''\ddot{\mathfrak{z}} = 0\,. \end{aligned}\right\}. \quad (9)$$

Die Schiebkurven sind also ebene hypersphärische Kurven, d. h. Kreise; jeder Vektor der Schmiegebene (Ebene) der Kreise $\mathfrak{y}$ steht orthogonal zu jedem Vektor der Schmiegebene (Ebene) der Kreise $\mathfrak{z}$. Die Ebenen der beiden Kreisscharen sind totalorthogonal und schneiden einander in dem einzigen Punkt $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$. Die Schiebkurven bilden auf der Fläche ein orthogonales Netz.

Schließlich berechnen wir noch die Determinante (3) unter Benutzung von (9) und erhalten

$$\begin{vmatrix} 0, & \mathfrak{y}'\mathfrak{y}'', & 0 \\ 0, & \mathfrak{y}'^2, & 0 \\ \dot{\mathfrak{z}}\ddot{\mathfrak{z}}, & 0, & \dot{\mathfrak{z}}^2 \end{vmatrix} = 0\,, \quad g = \mathfrak{y}'^2\dot{\mathfrak{z}}^2 \neq 0\,.$$

Somit existiert $K$ und verschwindet identisch. (7) ist also abwickelbar und ein Beispiel einer allgemeinen Schiebfläche im Sinne von (III).

(Eingegangen den 18. Mai 1949.)

[6]) Vgl. *W. Killing*, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, S. 241, Leipzig 1885.