Isotrope Vektoren im erweiterten Hermiteschen Raum.

Isotrope Vektoren im erweiterten Hermiteschen Raum

Von M. Pinl, Dacca (Pakistan)

In H. Becks „Koordinatengeometrie" findet sich die folgende Bemerkung[1]: „Erst bei Einführung hyperimaginärer Punkte würde der Hermitesche Kreis uneigentliche Punkte erhalten. Ebenso gibt es im komplexen Gebiet keine getrennten Punkte von der Entfernung Null." Sind im Koordinatensystem ($\mathfrak{C}$), bestehend aus dem Anfangspunkt 0 und n unitär-orthogonalen Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$, die komplexen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{x}$ im Hermiteschen n-dimensionalen Raum H_n, so ist die zugehörige Hermitesche metrische Fundamentalform

$$\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{x}} = x_1\,\bar{x}_1 + x_2\,\bar{x}_2 + \cdots + x_n\,\bar{x}_n = \bar{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}$$

(x_k und $\bar{x}_k$ konjugiert komplex)

positiv definit. Das bedeutet: *Im H_n gibt es keine isotropen Vektoren, keinen absoluten Kegelschnitt, keine Laguerresche Winkeldefinition, keine isotropen Kurven, keine Erzeugung von Minimalflächen durch Translation isotroper Kurven usw.*

Um diese Verluste etwas auszugleichen, soll im folgenden versucht werden, durch Einführung von Punkten mit gewissen hyperkomplexen Koordinaten den Hermiteschen Raum zu erweitern und damit die Einführung isotroper Vektoren in diesem erweiterten H_n zu ermöglichen.

Bei derartigen hyperkomplexen Erweiterungen des Hermiteschen Raumes hat man von vornherein zu beachten:

(a) die zugelassenen hyperkomplexen Systeme müssen den Körper der komplexen Zahlen enthalten;

(b) von den Automorphismen dieser Systeme muß ein solcher zur Definition der zur hyperkomplexen Zahl x konjugierten Zahl $\bar{x}$ verwendet werden, für welchen die Summe $x + \bar{x}$ reell ist und für den die

---

[1]) Vgl. *H. Beck*, Koordinatengeometrie I, S. 221, Berlin 1919, Springer.

erweiterte Fundamentalform $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}$ die Hermitesche metrische Fundamentalform als Spezialfall enthält.

Wegen (a) scheiden die „Ternionen“ für unsere Zwecke aus, denn keines der hyperkomplexen Systeme in drei Einheiten enthält den komplexen Zahlkörper [2]). Geeignete hyperkomplexe Erweiterungen des Hermiteschen Raumes sind daher erst bei Verwendung von hyperkomplexen Systemen in vier Einheiten zu erwarten. Unter diesen wiederum ist der Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen auszuschließen, denn der zu erweiternde Körper der komplexen Koordinaten des Hermiteschen Raumes ist algebraisch abgeschlossen und jede seiner hyperkomplexen Erweiterungen daher notwendig nullteilerbehaftet. Ferner haben wir noch zu unterscheiden zwischen Erweiterungen mit nilpotenten Einheiten und solchen ohne nilpotente Einheiten.

§ 1. Erweiterung ohne nilpotente Einheiten

Unter den irreduziblen Systemen hyperkomplexer Zahlen in vier Einheiten e_0, e_1, e_2, e_3 gibt es drei, welche den Körper der komplexen Zahlen enthalten. Davon scheidet der Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen aus, von den beiden übrigen ist eines mit nilpotenten Einheiten behaftet und nur eines mit der Multiplikationstabelle [3]) :

$$\begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_0 & e_3 & e_2 \\ e_2 & -e_3 & e_0 & -e_1 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & -e_0 \end{array} \tag{1}$$

kann zur Erweiterung des Hermiteschen Raumes ohne Verwendung nilpotenter Einheiten herangezogen werden. Sind ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 beliebige reelle Zahlen, so ist die allgemeinste Zahl des hyperkomplexen Systems (1) durch

$$x = \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 = e_0 \xi_0 + e_1 \xi_1 + e_2 \xi_2 + e_3 \xi_3 \tag{2}$$

gegeben. Die komplexen Zahlen ergeben sich daraus für $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $e_0 = 1$, $e_3 = i$. Um die Bedingung (b) auf S. 1 zu erfüllen, setzen wir:

$$\bar{x} = \xi_0 e_0 - \xi_1 e_1 - \xi_2 e_2 - \xi_3 e_3 = e_0 \xi_0 - e_1 \xi_1 - e_2 \xi_2 - e_3 \xi_3 \tag{3}$$

[2]) Vgl. *E. Study*, Math. Enzykl. I A 4, S. 167; *H. Beck*, Math. Z. *40* (1936), 509—520.
[3]) Vgl. *E. Study*, Math. Enzykl. I A 4, S. 167.

und bezeichnen die Paare x, $\bar{x}$ als hyperkomplex-konjugierte Zahlen im Sinne von (1). Dann wird die Summe $x + \bar{x}$ reell und für das Produkt $x\bar{x}$ erhalten wir mit Rücksicht auf (1), (2) und (3):

$$x\bar{x} = e_0(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2) = \bar{x}x \,. \tag{4}$$

Das Produkt $x\bar{x}$ ist für $\xi_1 = \xi_2 = 0$, das heißt für komplexe Zahlen x und $\bar{x}$ positiv-definit. Jetzt betrachten wir das Paar hyperkomplex-konjugierter Vektoren

$$\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \,, \qquad \bar{\mathfrak{x}} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\} \,,$$

deren Komponenten x_k und $\bar{x}_k$ durch

$$x_k = \xi_0^{(k)} e_0 + \xi_1^{(k)} e_1 + \xi_2^{(k)} e_2 + \xi_3^{(k)} e_3 \,,$$
$$\bar{x}_k = \xi_0^{(k)} e_0 - \xi_1^{(k)} e_1 - \xi_2^{(k)} e_2 - \xi_3^{(k)} e_3 \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

gegeben sind. Die Vektorsumme $\mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}$ ist reell und für das Skalarprodukt $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}$ ergibt sich

$$\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}} = x_1\bar{x}_1 + \cdots + x_n\bar{x}_n = e_0 \sum_{k=1}^{n} (\xi_0^{(k)2} - \xi_1^{(k)2} - \xi_2^{(k)2} + \xi_3^{(k)2}) = \bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} \,. \tag{5}$$

Für $\xi_1^{(k)} = \xi_2^{(k)} = 0$, das heißt für komplexe Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ ist die quadratische Form (5) positiv-definit. Wir betrachten daher (5) als die gemäß (1) erweiterte Hermitesche metrische Fundamentalform und benutzen sie zur Einführung isotroper Vektoren im so erweiterten Hermiteschen H_n.

Definition I. *Ein Vektor*

$$\mathfrak{x} = \{\xi_0^{(1)} e_0 + \xi_1^{(1)} e_1 + \xi_2^{(1)} e_2 + \xi_3^{(1)} e_3, \ldots,$$
$$\xi_0^{(n)} e_0 + \xi_1^{(n)} e_1 + \xi_2^{(n)} e_2 + \xi_3^{(n)} e_3\} \neq 0$$

heißt ein isotroper Vektor erster Art im gemäß (1) erweiterten Hermiteschen n-dimensionalen Raum H_n, wenn er der Bedingung:

$$\sum_{k=1}^{n} (\xi_0^{(k)2} - \xi_1^{(k)2} - \xi_2^{(k)2} + \xi_3^{(k)2}) = 0$$

genügt $(n \geqq 1)$.

Deuten wir (um den Fall $\mathfrak{x} = 0$ auszuschließen) die Verhältnisse

$$\xi_0^{(1)} : \xi_0^{(2)} : \cdots : \xi_0^{(n)} : \cdots : \xi_3^{(1)} : \xi_3^{(2)} : \cdots : \xi_3^{(n)}$$

als homogene Koordinaten eines reellen $(4n-1)$-dimensionalen projektiven Raumes, so bedeutet die Bedingung $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}} = 0$ in Definition I: *die Bildpunkte*

$$\xi_0^{(1)} : \xi_0^{(2)} : \dots : \xi_0^{(n)} : \dots : \xi_3^{(1)} : \xi_3^{(2)} : \dots : \xi_3^{(n)}$$

der isotropen Vektoren erster Art des Hermiteschen H_n liegen auf der absoluten Maßhyperfläche

$$\sum_{k=1}^{n} (\xi_0^{(k)2} - \xi_1^{(k)2} - \xi_2^{(k)2} + \xi_3^{(k)2}) = 0$$

eines $(4n-1)$-dimensionalen nichteuklidischen Raumes dieser Maßbestimmung. Es gibt ∞^{4n-2} isotrope Vektoren erster Art (reelle Parameterzählung, $n \geqq 1$).

§ 2. Erweiterung mit nilpotenten Einheiten

Das in Paragraph 1 erwähnte dritte hyperkomplexe System in vier Einheiten, welches den Körper der komplexen Zahlen enthält, ist mit den nilpotenten Einheiten e_2, e_3 behaftet [4]). Seine Multiplikationstabelle lautet:

$$\begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_2 & 0 & 0\,. \end{array} \tag{6}$$

Haben $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ die gleiche Bedeutung wie in Paragraph 1, so ist die allgemeine Zahl des hyperkomplexen Systems (6) durch

$$x = \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 = e_0 \xi_0 + e_1 \xi_1 + e_2 \xi_2 + e_3 \xi_3 \tag{7}$$

gegeben und die komplexen Zahlen ergeben sich jetzt für $\xi_2 = \xi_3 = 0$, $e_0 = 1$, $e_1 = i$. Um die Bedingung (b) auf S. 1 zu erfüllen, setzen wir

$$\bar{x} = \xi_0 e_0 - \xi_1 e_1 - \xi_2 e_2 - \xi_3 e_3 = e_0 \xi_0 - e_1 \xi_1 - e_2 \xi_2 - e_3 \xi_3 \tag{8}$$

und bezeichnen die Paare $x, \bar{x}$ jetzt als hyperkomplex-konjugierte Zahlen im Sinne von (6). Die Summe $x + \bar{x}$ ist wieder reell und für das Produkt $x\bar{x}$ erhalten wir jetzt mit Rücksicht auf (7), (8) und (6) an Stelle von (4):

$$x\bar{x} = e_0(\xi_0^2 + \xi_1^2) = \bar{x}x\,. \tag{9}$$

[1]) Vgl. Fußnote 3.

Das Produkt (9) ist für $\xi_2 = \xi_3 = 0$, das heißt für komplexe Zahlen x und $\bar{x}$ positiv-definit. Dasselbe gilt auch für das Paar hyperkomplex-konjugierte Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$. Man erhält analog:

$$\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}} = e_0 \sum_{k=1}^{n} (\xi_0^{(k)2} + \xi_1^{(k)2}) = \bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} \ , \quad \mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}} = 2e_0\{\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \ldots, \xi_0^{(n)}\} \ . \tag{10}$$

Das Skalarprodukt $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}$ ist insbesondere für $\xi_2^{(k)} = \xi_3^{(k)} = 0$, das heißt für komplexe Vektoren, positiv-definit. Betrachten wir daher das Skalarprodukt $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}$ in (10) als die gemäß (6) erweiterte Hermitesche metrische Fundamentalform und benutzen sie zur Einführung isotroper Vektoren, so ergibt sich, da alle ξ reell sind:

Definition II. *Ein Vektor*

$$\mathfrak{x} = \{\xi_0^{(1)} e_0 + \xi_1^{(1)} e_1 + \xi_2^{(1)} e_2 + \xi_3^{(1)} e_3, \ldots, \xi_0^{(n)} e_0 + \xi_1^{(n)} e_1 + \xi_2^{(n)} e_2 + \xi_3^{(n)} e_3\} \neq 0$$

heißt ein isotroper Vektor zweiter Art im gemäß (6) erweiterten Hermiteschen n-dimensionalen Raum H_n, wenn er den Bedingungen

$$\xi_0^{(k)} = \xi_1^{(k)} = 0 \ , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

genügt $(n \geqq 1)$.

Bezeichnet man die hyperkomplexen Zahlen (7) mit $\xi_0 = \xi_1 = 0$ als rein hyperimaginär, so kann man Definition II auch folgendermaßen formulieren: *Die isotropen Vektoren zweiter Art im gemäß (6) erweiterten Hermiteschen H_n sind die rein hyperimaginären Vektoren dieses erweiterten H_n. Die Bildpunkte*

$$\xi_0^{(1)} : \xi_0^{(2)} : \ldots : \xi_0^{(n)} : \ldots : \xi_3^{(1)} : \xi_3^{(2)} : \ldots : \xi_3^{(n)}$$

dieser isotropen Vektoren zweiter Art liegen auf dem $(2n - 1)$-*dimensionalen Koordinatenraum* $\xi_0^{(k)} = \xi_1^{(k)} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *des projektiven* $(4n - 1)$-*dimensionalen Raumes aller*

$$\xi_0^{(1)} : \xi_0^{(2)} : \ldots : \xi_0^{(n)} : \ldots : \xi_3^{(1)} : \xi_3^{(2)} : \ldots : \xi_3^{(n)} \ .$$

Es gibt ∞^{2n-1} *isotrope Vektoren zweiter Art in* H_n *(reelle Parameterzählung,* $n \geqq 1$).

Oberrahmede (Sauerland), im Juni 1952.

(Eingegangen den 26. Juli 1952.)