Die Grundgleichungen der Flächentheorie II.

Die Grundgleichungen der Flächentheorie II

von W. SCHERRER, Bern

§ 1. Einleitung

Im ersten Teil[1]) habe ich die Grundgleichungen der Flächentheorie für ein beliebiges Parameternetz dargestellt mit Hilfe des Dreibeins $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{N}$. Dabei bedeutet

$$\mathfrak{r} \equiv D_u \mathfrak{x} \qquad \text{resp.} \qquad \mathfrak{t} \equiv D_v \mathfrak{x} \tag{1}$$

den Tangentenvektor der u-Linien ($v =$ konst.) resp. der v-Linien ($u =$ konst.) und

$$\mathfrak{N} \equiv \frac{[\mathfrak{r}, \mathfrak{t}]}{\sin\theta} \tag{2}$$

die Flächennormale, falls man den Netzwinkel mit θ bezeichnet. Speziell habe ich die *Ableitungsgleichungen,* das heißt also die Darstellung der sechs normierten Ableitungen $D_u\mathfrak{r}$, $D_u\mathfrak{t}$, $D_u\mathfrak{N}$, $D_v\mathfrak{r}$, $D_v\mathfrak{t}$, $D_v\mathfrak{N}$ als Linearkombinationen der Basisvektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{N}$ so geschrieben, daß die sechs Linienkrümmungen γ_1, γ_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ_1, τ_2 des Parameternetzes neben dem Netzwinkel θ explizite in Erscheinung treten. Dabei bedeuten γ_1, γ_2 die geodätischen Krümmungen, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die Normalschnittkrümmungen und τ_1, τ_2 die geodätischen Torsionen der u- resp. v-Linien. Die dermaßen gewonnenen Ableitungsgleichungen, die wir hier nicht mehr benötigen, sind angegeben als die Systeme (6) und (7) in I, § 3. Sie bilden zusammen mit (1) ein totales System zur Bestimmung der Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{N}$. Als zugehörige *Integrabilitätsbedingungen* ergaben sich unter Beachtung der Definitionen I, § 3 (5)

$$\Gamma_1 \equiv \gamma_1 + D_u\theta \;; \qquad \Gamma_2 \equiv \gamma_2 - D_v\theta \tag{3}$$

nacheinander folgende Gleichungen:

$$\varkappa_1 \cos\theta + \tau_1 \sin\theta = \varkappa_2 \cos\theta - \tau_2 \sin\theta \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \operatorname{cotg}\theta \frac{D_u G}{G} - \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{D_v E}{E} \\ \Gamma_2 &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{D_u G}{G} + \operatorname{cotg}\theta \frac{D_v E}{E} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$(E\gamma_1)_v - (G\gamma_2)_u + \theta_{uv} = K \cdot EG \sin\theta \tag{6}$$

---

[1]) Diese Zeitschrift Bd. 29, S. 180—198 (1955), im Text zitiert unter I.

und

$$\left.\begin{aligned}&(E\varkappa_1)_v - [G(\varkappa_2 \cos\theta - \tau_2 \sin\theta)]_u\\&= EG[\Gamma_2\tau_1 - \gamma_1(\varkappa_2 \sin\theta + \tau_2\cos\theta)]\\&(G\varkappa_2)_u - [E(\varkappa_1\cos\theta + \tau_1\sin\theta)]_v\\&= GE[\Gamma_1\tau_2 - \gamma_2(-\varkappa_1\sin\theta + \tau_1\cos\theta)]\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

In (6) ist K, die GAUSSsche Krümmung, definiert durch

$$K \equiv \varkappa_1\varkappa_2 + \tau_1\tau_2 + (\varkappa_1\tau_2 - \varkappa_2\tau_1)\operatorname{cotg}\theta\ . \tag{8}$$

Denken wir uns jetzt die Größen E, G und θ vorgegeben als Funktionen der Parameter u, v, so ist die Bedeutung der Integrabilitätsbedingungen (4) bis (8) folgende:

1. Die Relation (4) ist der Ersatz für die Symmetrie der von uns nicht benutzten zweiten Grundform.

2. Die Gleichungen (5) liefern Γ_1 und Γ_2, worauf sich aus (3) γ_1 und γ_2 ergeben.

3. Die Gleichung (6) liefert die LIOUVILLEsche Darstellung der durch (8) definierten GAUSSschen Krümmung K.

4. Die Gleichungen (7) schließlich stellen das CODAZZIsche System dar.

Insbesondere ergibt sich nun folgender Schluß: Führen wir (3), (5) und (8) in (6) und (7) ein, so verfügen wir in (4), (6) und (7) über vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Linienkrümmungen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ_1, τ_2. Damit ist die erste Etappe in der Aufstellung der Grundgleichungen abgeschlossen.

Wir wenden uns jetzt zur zweiten Etappe, die auch schon in Teil I eingeleitet wurde. Wir ziehen die mittlere Krümmung H heran, welche sich nach I, § 3 (17) ergibt aus der Formel

$$H = \tfrac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2) - \tfrac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2)\operatorname{cotg}\theta\ . \tag{9}$$

Definieren wir jetzt einen Hilfswinkel ω durch

$$\operatorname{tg}\omega \equiv -\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\tau_1 - \tau_2}, \tag{10}$$

und machen wir außerdem Gebrauch von der Abkürzung

$$J \equiv \sqrt{H^2 - K}\ , \tag{11}$$

so können wir aus den Gleichungen (4), (8), (9) und (10) die vier Linienkrümmungen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ_1 und τ_2 berechnen. Es folgt:

$$\boxed{\begin{aligned}\varkappa_1 &= H + J\cos(\omega+\theta)\,; & \tau_1 &= J\sin(\omega+\theta)\\ \varkappa_2 &= H + J\cos(\omega-\theta)\,; & \tau_2 &= J\sin(\omega-\theta)\end{aligned}} \tag{12}$$

Dieses System unterscheidet sich vom System I, § 7 (10) nur dadurch, daß aus Gründen der Zweckmäßigkeit das Vorzeichen von ω umgekehrt worden ist. Durch (12) werden die Linienkrümmungen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ_1, τ_2 auf die Flächenkrümmungen H und J und den Hilfswinkel ω reduziert.

Jetzt sind wir in der Lage, die geometrische Bedeutung des Winkels ω zu ermitteln. Betrachten wir nämlich eine beliebige Flächenkurve durch den Punkt (u,v), deren Richtung daselbst mit der u-Linie ($v =$ konst.) den Winkel α bildet, so gehen die Gleichungen I, § 7 (11) nach Änderung des Vorzeichens von ω über in

$$\boxed{\begin{aligned}\varkappa &= H + J\cos(\omega+\theta-2\alpha)\\ \tau &= \phantom{H + {}} J\sin(\omega+\theta-2\alpha)\end{aligned}} \tag{13}$$

Dabei ist $\varkappa$ die Normalschnittkrümmung und τ die geodätische Torsion der betrachteten Kurve im Punkte (u,v). Wir erhalten somit

Satz 1. *Dreht man eine Winkelhalbierende des Parameternetzes um den Winkel* $\frac{\omega}{2}$, *so fällt sie mit einer Hauptkrümmungsrichtung zusammen.*

Wir wollen daher den Winkel kurz *Hauptwinkel* nennen. Wir können jetzt das Ziel der weiteren Untersuchung folgendermaßen umschreiben: Es sollen die Beziehungen zwischen mittlerer Krümmung und Hauptwinkel bei vorgegebenem Linienelement ermittelt werden.

§ 2. Integrabilitätsbedingungen zweiter Stufe

Führen wir die Ausdrücke (12) des vorausgehenden Paragraphen in die Codazzischen Gleichungen (7) daselbst ein, so verwandeln sich dieselben in ein totales System für den Hauptwinkel ω, welches neben ω nur noch die mittlere Krümmung H als unbekannte Funktion enthält, da wir ja das Linienelement als gegeben voraussetzen:

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_u &= P_{11}\cos\omega + P_{12}\sin\omega + P_1\\ \omega_v &= P_{21}\cos\omega + P_{22}\sin\omega + P_2\end{aligned}} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}P_{11} &\equiv -\frac{H_u}{\sin\theta J} + \operatorname{cotg}\theta\,\frac{EH_v}{GJ}\\ P_{12} &\equiv \qquad\qquad\quad -\frac{EH_v}{GJ}\\ P_1 &\equiv -\operatorname{cotg}\theta\,\frac{J_u}{J} + \frac{EJ_v}{\sin\theta\cdot GJ} - 2E\Gamma_1 + \theta_u\end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

$$\left.\begin{aligned}
P_{21} &\equiv -\operatorname{cotg}\theta\frac{GH_u}{EJ}+\frac{H_v}{\sin\theta\cdot J}\\
P_{22} &\equiv \qquad -\frac{GH_u}{EJ}\\
P_2 &\equiv -\frac{GJ_u}{\sin\theta\cdot EJ}+\operatorname{cotg}\theta\frac{J_v}{J}-2G\Gamma_2-\theta_v
\end{aligned}\right\}\tag{2b}$$

Die zum System (1) gehörige Integrabilitätsbedingung hat die Gestalt

$$\boxed{Q_1\cos\omega+Q_2\sin\omega+R=0}\tag{3}$$

wobei die nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\wedge(u,v)$ festgelegten Koeffizienten vermittels der BELTRAMIschen Operatoren ∇ und $\triangle$ sowie weiterer anschließend zu definierender Operatoren ∇_1, $\triangle_1$, ∇_2, $\triangle_2$ folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\left.\begin{aligned}
\wedge\, Q_1 &\equiv\frac{\triangle_1 H}{J}-\frac{2\nabla_1(H,J)}{J^2}\\
\wedge\, Q_2 &\equiv\frac{\triangle_2 H}{J}-\frac{2\nabla_2(H,J)}{J^2}\\
\wedge\, R &\equiv\frac{\triangle J}{J}-\frac{\nabla J+\nabla H}{J^2}-2K
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Die eben erwähnten neuen Operatoren sind für irgendwelche vorgegebenen Invarianten $\Phi(u,v)$ und $\Psi(u,v)$ folgendermaßen definiert:

$$\left.\begin{aligned}
EG\sin\theta\cdot\triangle_1\Phi &\equiv\left(-\frac{\Phi_u}{\sin\theta}+\operatorname{cotg}\theta\frac{E\Phi_v}{G}\right)_v-\left(\frac{\Phi_v}{\sin\theta}-\operatorname{cotg}\theta\frac{G\Phi_u}{E}\right)_u\\
&\quad-G\left(2\Gamma_1-\frac{\theta_u}{E}\right)\Phi_u+E\left(2\Gamma_2+\frac{\theta_v}{G}\right)\Phi_v\\
E^2G^2\sin^2\theta\,\nabla_1(\Phi,\Psi) &\equiv(G^2\Phi_u\Psi_u+E^2\Phi_v\Psi_v)\cos\theta-EG(\Phi_u\Psi_v+\Phi_v\Psi_u)
\end{aligned}\right\}\tag{5$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned}
EG\sin\theta\,\triangle_2\Phi &\equiv\left(\frac{G\Phi_u}{E}\right)_u-\left(\frac{E\Phi_v}{G}\right)_v\\
&\quad-\left[\frac{(G^2\sin\theta)_u}{EG\sin\theta}+\frac{\theta_v}{\sin\theta}\right]\Phi_u+\left[\frac{(E^2\sin\theta)_v}{EG\sin\theta}+\frac{\theta_u}{\sin\theta}\right]\Phi_v\\
E^2G^2\sin^2\theta\,\nabla_2(\Phi,\Psi) &\equiv(G^2\Phi_u\Psi_u-E^2\Phi_v\Psi_v)\sin\theta
\end{aligned}\right\}\tag{5$_2$}$$

Für Umrechnungszwecke notieren wir noch die BELTRAMIschen Operatoren:

$$\left.\begin{aligned}
EG\sin\theta\triangle\Phi &\equiv\left(\frac{E\Phi_v}{G\sin\theta}-\operatorname{cotg}\theta\Phi_u\right)_v-\left(-\frac{G\Phi_u}{E\sin\theta}+\operatorname{cotg}\theta\Phi_v\right)_u\\
E^2G^2\sin^2\theta\nabla(\Phi,\Psi) &\equiv(G^2\Phi_u\Psi_u+E^2\Phi_v\Psi_v)-EG\cos\theta(\Phi_u\Psi_v+\Phi_v\Psi_u)
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Schließlich erinnern wir noch an die Abkürzung $\nabla\Phi$ für $\nabla(\Phi,\Phi)$. Wir werden analog von den Symbolen $\nabla_1\Phi$ und $\nabla_2\Phi$ Gebrauch machen. Will man (6) mit den traditionellen Formeln vergleichen, so ist zu beachten, daß wir für das Linienelement die Gestalt

$$\dot{s}^2 \equiv E^2\dot{u}^2 + 2EG\cos\theta\,\dot{u}\,\dot{v} + G^2\dot{v}^2 \tag{7}$$

gewählt haben.

Will man explizite zum Ausdruck bringen, daß die Koeffizienten von (3) nur vom Linienelement und von $H(u,v)$ abhängen, so hat man in (4) das in § 1 (11) definierte Symbol

$$J \equiv \sqrt{H^2 - K} \tag{8}$$

zu eliminieren. An Stelle von (4) tritt dann folgende Tafel:

$$\boxed{\begin{aligned}
\wedge\, Q_1 &\equiv \frac{\Delta_1 H}{J} - \frac{2H\,\nabla_1 H - \nabla_1(K,H)}{J^3}\\
\wedge\, Q_2 &\equiv \frac{\Delta_2 H}{J} - \frac{2H\,\nabla_2 H - \nabla_2(K,H)}{J^3}\\
\wedge\, R &\equiv \frac{H\,\Delta H}{J^2} - \frac{2H[H\,\nabla H - \nabla(K,H)]}{J^4}\\
&\quad - \frac{\Delta K}{2J^2} - \frac{\nabla K}{2J^4} - 2K
\end{aligned}} \tag{9}$$

In (9) haben wir die Abkürzung J stehenlassen, soweit sie die Übersicht nicht beeinträchtigt. Die Gleichungen (3) und (9) stellen nun die endgültige Fassung der *Integrabilitätsbedingung zweiter Stufe* dar. Wenn wir ihren Einfluß auf das totale System (1) abklären wollen, müssen wir beachten, daß die Operatoren (5) im Gegensatz zu (6) keine Invarianten liefern. Unsere nächste Aufgabe wird also darin bestehen, die Wirkung der Parametertransformation auf die Operatoren (5) zu ermitteln.

§ 3. Parametertransformation

Wir betrachten die in (5) des vorausgehenden Paragraphen in bezug auf die Parameter u,v definierten Operatoren

$$\nabla_1(\Phi,\Psi), \nabla_2(\Phi,\Psi), \Delta_1\Phi, \Delta_2\Phi\ . \tag{1}$$

Führen wir nun durch eine Transformation

$$u = u(\bar{u}, \bar{v}) \qquad (2)$$
$$v = v(\bar{u}, \bar{v})$$

neue Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ ein, so treten an ihre Stelle die Operatoren

$$\bar{\nabla}_1(\Phi, \Psi), \bar{\nabla}_2(\Phi, \Psi), \bar{\Delta}_1\Phi, \bar{\Delta}_2\Phi \ . \qquad (3)$$

Da die Funktionen Φ und Ψ als Invarianten vorausgesetzt sind, ist die Bezeichnung durch (3) ausreichend. Die Frage ist jetzt, wie die Operatoren (3) mit den Operatoren (1) formelmäßig zusammenhängen.

Da die Operatoren ∇_1 und ∇_2 nur erste Ableitungen enthalten, bietet die Berechnung ihres Transformationsgesetzes keine Schwierigkeit. Das Gesetz lautet

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\nabla}_1(\Phi, \Psi) &= \alpha \nabla_1(\Phi, \Psi) + \beta \nabla_2(\Phi, \Psi) \\ \bar{\nabla}_2(\Phi, \Psi) &= -\beta \nabla_1(\Phi, \Psi) + \alpha \nabla_2(\Phi, \Psi) \end{aligned}} \qquad (4)$$

wobei die Koeffizienten α, β definiert sind durch

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{(E^2 u_{\bar{u}} u_{\bar{v}} + G^2 v_{\bar{u}} v_{\bar{v}}) \cos\theta + EG(u_{\bar{u}} v_{\bar{v}} + u_{\bar{v}} v_{\bar{u}})}{\bar{E}\bar{G}} \\ \beta &\equiv -\frac{E^2 u_{\bar{u}} u_{\bar{v}} - G^2 v_{\bar{u}} v_{\bar{v}}}{\bar{E}\bar{G}} \sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Da, wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \ , \qquad (6)$$

stellt (4) eine orthogonale Transformation dar.

Die Verkoppelung der Operatoren Δ_1 und Δ_2 mit den Operatoren ∇_1 und ∇_2 in den Formeln (4) des vorausgehenden Paragraphen und ihr gemeinsames Eingehen in die invariante Relation (3) daselbst läßt schon die Vermutung aufkommen, daß sich die Δ_1, Δ_2 kogredient zu den ∇_1, ∇_2 transformieren könnten. Tatsächlich zeigt die Berechnung, daß die Vermutung zutrifft. Es gilt somit das Gesetz

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\Delta}_1\Phi &= \alpha \Delta_1\Phi + \beta \Delta_2\Phi \\ \bar{\Delta}_2\Phi &= -\beta \Delta_1\Phi + \alpha \Delta_2\Phi \end{aligned}} \qquad (7)$$

Normiert man den willkürlichen Faktor in § 2 (4) auf $\wedge = 1$, so folgt aus

(4) und (7) die weitere Transformation

$$\left.\begin{aligned}\overline{Q}_1 &= \quad \alpha Q_1 + \beta Q_2 \ , \\ \overline{Q}_2 &= -\beta Q_1 + \alpha Q_2 \ .\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Führen wir (8) in § 2 (3) ein, so ergibt sich wegen der Invarianz von R auch das Transformationsgesetz für den Hauptwinkel ω:

$$\left.\begin{aligned}\cos\bar{\omega} &= \quad \alpha\cos\omega + \beta\sin\omega \ , \\ \sin\bar{\omega} &= -\beta\cos\omega + \alpha\sin\omega \ .\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Aus (9) und (6) schließlich folgt

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \cos(\bar{\omega} - \omega) \ , \\ \beta &= \sin(\bar{\omega} - \omega) \ .\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Hieraus ergibt sich wegen § 1, Satz 1, die geometrische Bedeutung der Transformationszahlen α und β.

Die zur Gewinnung von (7) erforderliche Rechnung ist ebenso verwickelt wie umfangreich. Ich gebe daher einige Hinweise auf das von mir eingeschlagene Verfahren.

1. Die algebraischen Umformungen werden übersichtlicher, wenn man das Linienelement § 2 (7) in seine übliche Gestalt überführt, indem man setzt

$$A \equiv E^2; \quad B \equiv EG\cos\theta; \quad C \equiv G^2; \quad D \equiv EG\sin\theta \ , \tag{11}$$

so daß also gilt

$$D^2 = AC - B^2 \ . \tag{12}$$

Die in § 2 (5) angegebenen Operatoren $\triangle_1$, $\triangle_2$ lassen sich dann folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned}D^3EG\triangle_1\Phi = {} & D[B(C\Phi_{uu} + A\Phi_{vv}) - 2AC\Phi_{uv}] \\ & + [D(CA_v - BB_v) + B(BD_v - CD_u)]\Phi_u \\ & + [D(AC_u - BB_u) + B(BD_u - AD_v)]\Phi_v\end{aligned}\right\} \tag{13_1}$$

$$\left.\begin{aligned}D^2EG\triangle_2\Phi = {} & D(C\Phi_{uu} - A\Phi_{vv}) \\ & + [DB_v - (CD_u + BD_v)]\Phi_u \\ & - [DB_u - (AD_v + BD_u)]\Phi_v \ .\end{aligned}\right\} \tag{13_2}$$

2. Es ist wichtig, die in den Formeln (5) sich ankündigende Zeichenbelastung zu mildern. Wir gebrauchen daher die Abkürzungen

$$\left.\begin{array}{lll} a = u_{\bar u}\,, \quad b = u_{\bar v} & ; & c = v_{\bar u}\,, \quad d = v_{\bar v} \\ U_1 = u_{\bar u \bar u} & ; & V_1 = v_{\bar u \bar u} \\ U_2 = u_{\bar u \bar v} & ; & V_2 = v_{\bar u \bar v} \\ U_3 = u_{\bar v \bar v} & ; & V_3 = v_{\bar v \bar v} \end{array}\right\} \tag{14}$$

Es ergeben sich so die Transformationsformeln

$$\left.\begin{array}{r} \Phi_{\bar u} = a\Phi_u + c\Phi_v \\ \Phi_{\bar v} = b\Phi_u + d\Phi_v \\ \Phi_{\bar u \bar u} = a^2\Phi_{uu} + 2ac\Phi_{uv} + c^2\Phi_{vv} + U_1\Phi_u + V_1\Phi_v \\ \Phi_{\bar u \bar v} = ab\Phi_{uu} + (ad + bc)\Phi_{uv} + cd\Phi_{vv} + U_2\Phi_u + V_2\Phi_v \\ \Phi_{\bar v \bar v} = b^2\Phi_{uu} + 2bd\Phi_{uv} + d^2\Phi_{vv} + U_3\Phi_u + V_3\Phi_v \end{array}\right\} \tag{15}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \bar A = Aa^2 + 2Bac + Cc^2 \\ \bar B = Aab + B(ad + bc) + Ccd \\ \bar C = Ab^2 + 2Bbd + Cd^2 \\ \bar D = D(ad - bc) \end{array}\right\} \tag{16}$$

Außerdem empfiehlt sich die Aufstellung derjenigen Tabelle, welche die acht Ableitungen

$$(\bar A_{\bar u}, \ldots, \bar D_{\bar v}) \tag{17}$$

auf die 14 Ableitungen

$$(A_{\bar u}, \ldots, D_{\bar v}, U_1, \ldots, V_3) \tag{18}$$

reduziert.

In einer ersten Etappe werden nun die den Gleichungen (13) entsprechenden Gleichungen

$$\bar D^3 \bar E \bar G \bar\triangle_1 \Phi = \ldots \ , \qquad \bar D^2 \bar E \bar G \bar\triangle_2 \Phi = \ldots \tag{19}$$

auf die Ableitungen (18) umgerechnet. Dabei zeigt sich, daß alle mit $U_1, \ldots, V_3$ behafteten Glieder herausfallen.

In einer zweiten Etappe werden dann die noch verbleibenden acht Ableitungen (18) auf die acht Ableitungen

$$(A_u, \ldots, D_v) \tag{20}$$

reduziert. Jetzt kann man an Hand der mit Φ_{uu}, Φ_{uv}, Φ_{vv} behafteten Glieder feststellen, daß der lineare Anteil der Transformation von der Gestalt

$$\left.\begin{array}{l} \bar E \bar G \bar\triangle_1 \Phi = \quad\ \alpha^* EG\triangle_1\Phi + \beta^* EG\triangle_2\Phi \\ \bar E \bar G \bar\triangle_2 \Phi = -\beta^* EG\triangle_1\Phi + \alpha^* EG\triangle_2\Phi \end{array}\right\} \tag{21}$$

sein muß, wobei α^* und β^* gegeben sind durch

$$\left.\begin{aligned} \alpha^* &= \frac{B(Aab + Ccd) + AC(ad + bc)}{AC}, \\ \beta^* &= -\frac{D(ad - bc)}{AC}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Hierauf kann man verifizieren, daß auch die mit Φ_u und Φ_v behafteten Glieder sich der Transformation (21) fügen. Da nun aus (11) und (22) folgt

$$EG\alpha^* = \bar{E}\bar{G}\alpha \; ; EG\beta^* = \bar{E}\bar{G}\beta \tag{23}$$

geht (21) über in (4), w. z. b. w.

Das wesentliche Ergebnis dieses Paragraphen ist nun also, daß die beiden Paare $\nabla_1(\Phi, \Psi)$, $\nabla_2(\Phi, \Psi)$ und $\Delta_1\Phi$, $\Delta_2\Phi$ orthogonale Vektoren bilden. Für unsere Zielsetzung speziell wichtig ist die daraus sich ergebende Transformation (8). Wir formulieren daher diese Folgerung als

Satz 2. *Die Koeffizienten Q_1, Q_2 der Integrabilitätsbedingung zweiter Stufe bilden einen orthogonalen Vektor.*

§ 4. Folgerungen

Wir kehren jetzt wieder zurück zum totalen System § 2 (1)

$$\left.\begin{aligned} \omega_u &= P_{11} \cos \omega + P_{12} \sin \omega + P_1 \\ \omega_v &= P_{21} \cos \omega + P_{22} \sin \omega + P_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und der zugehörigen Integrabilitätsbedingung § 2 (3)

$$Q_1 \cos \omega + Q_2 \sin \omega + R = 0 . \tag{2}$$

Wir haben nun zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem Q_1 und Q_2 auf der ganzen Fläche verschwinden oder nicht. Wir treffen daher die

Definition 1. *Eine Fläche heiße* ***integrabel****, wenn auf ihr überall gilt*

$$Q_1 = Q_2 = 0 . \tag{3}$$

Daß es sich dabei um eine invariante Eigenschaft der Fläche handelt, folgt unmittelbar aus Satz 2, § 3. Infolge von (2) muß dann auch R überall auf der Fläche verschwinden. In anderen Worten: Auf einer integrablen Fläche ist die

Integrabilitätsbedingung (2) identisch in u, v und ω erfüllt. Für das totale System (1) ist somit die klassische Voraussetzung erfüllt, und es ergibt sich

Satz 3. *Auf einer integrablen Fläche kann der Wert des Hauptwinkels ω in einem beliebigen Punkt der Fläche vorgegeben werden, falls dieser Punkt kein Nabelpunkt ist.*

Auf Grund dieser Vorgabe ist nun durch das totale System (1) *der Wert des Hauptwinkels für jeden weiteren Punkt der Fläche festgelegt, falls dieser weitere Punkt mit dem Ausgangspunkt durch eine Flächenkurve verbunden werden kann, welche keinen Nabelpunkt trifft.*

Wichtig ist nun, daß durch eine beliebige Änderung des Anfangswertes von ω weder das Linienelement noch die den Gleichungen

$$Q_1 = Q_2 = R = 0 \tag{4}$$

genügende mittlere Krümmung $H(u,v)$ beeinflußt wird. Da weiter durch Linienelement, H und ω nach den Formeln (11) und (12) von § 1 die Fläche bis auf Kongruenz festgelegt ist, ergibt sich als Folgerung

Satz 4. *Jede integrable Fläche gestattet eine einparametrige Schar von Verbiegungen, bei welcher die Werte der mittleren Krümmung erhalten bleiben.*

Natürlich ist dieser Satz «im kleinen» zu interpretieren. Wie ein Blick auf die Tafel (9) in § 2 zeigt, bilden die Flächen konstanter mittlerer Krümmung die einfachsten Vertreter der integrablen Flächen. Der bekannte Satz über die Verbiegung der Flächen konstanter mittlerer Krümmung ist daher in Satz 4 enthalten.

Wir wenden uns jetzt zu den nichtintegrablen Flächen. Nach Satz 2, § 3 ist nun neben R auch

$$Q \equiv \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} \neq 0 \tag{5}$$

eine Invariante. Jetzt kann man den Hauptwinkel ω aus der Gleichung (2) berechnen. Setzt man abkürzend

$$S \equiv \sqrt{Q^2 - R^2}\,, \tag{6}$$

so findet man

$$\boxed{\begin{gathered} \cos\omega = -\frac{Q_1 R - Q_2 S}{Q^2}\;;\quad \sin\omega = -\frac{Q_1 S + Q_2 R}{Q^2} \\ \omega = Ar\,\mathrm{ctg}\,\frac{Q_2}{Q_1} + Ar\,\mathrm{ctg}\,\frac{S}{R} \end{gathered}} \tag{7}$$

Aus den Relationen (5), (6) und (7) in Verbindung mit der Tafel (9) von § 2 erhalten wir also den

Satz 5. *Ist eine Fläche nicht integrabel, so kann man ihren Hauptwinkel berechnen aus dem Linienelement und der mittleren Krümmung durch elementare algebraische Prozesse in Verbindung mit Differentiationen bis zur zweiten Ordnung.*

Da nun, wie schon erwähnt, eine Fläche durch Linienelement, $H(u,v)$ und $\omega(u,v)$ bis auf Kongruenzen festgelegt ist, folgt weiter

Satz 6. *Eine nichtintegrable Fläche ist durch das Linienelement und die Funktion der mittleren Krümmung bis auf Kongruenz festgelegt.*

Hieraus folgt nun unmittelbar die Umkehrung von Satz 4, nämlich

Satz 7. *Gestattet eine Fläche eine einparametrige Schar von Verbiegungen, bei welcher die Werte der mittleren Krümmung erhalten bleiben, so ist sie integrabel.*

Führen wir schließlich die Ausdrücke (7) in die Gleichungen (1) ein, so erhalten wir unter Beachtung von (5) und (6) das System

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial u}+SP_{11}\right)\cos\omega+\left(\frac{\partial Q_2}{\partial u}+SP_{12}\right)\sin\omega+\frac{\partial R}{\partial u}+SP_1=0\,,\\ \left(\frac{\partial Q_1}{\partial v}+SP_{21}\right)\cos\omega+\left(\frac{\partial Q_2}{\partial v}+SP_{22}\right)\sin\omega+\frac{\partial R}{\partial v}+SP_2=0\,.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

in das wir der Kürze halber die Werte (7) für $\cos\omega$ und $\sin\omega$ nicht eingetragen haben.

Es gilt somit

Satz 8. *Ist eine Fläche nichtintegrabel, so besteht ihre Integrabilitätsbedingung zweiter Stufe aus zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung für die mittlere Krümmung, deren Koeffizienten durch das Linienelement bestimmt sind.*

§ 5. Zusätzliche Formeln

Da es sich empfiehlt, die eingeführten Operatoren dem jeweiligen Zweck anzupassen, gebe ich sie hier noch in einer dritten Gestalt an, welche die in Teil I gebrauchten absoluten Ableitungen

$$D_u\equiv\frac{1}{E}\,\frac{\partial}{\partial u}\;;\quad D_v\equiv\frac{1}{G}\,\frac{\partial}{\partial v}\qquad(1)$$

verwertet.

$$\sin^2\theta\nabla(\Phi,\Psi) = D_u\Phi D_u\Psi + D_v\Phi D_v\Psi - \cos\theta(D_u\Phi D_v\Psi + D_v\Phi D_u\Psi)\,, \tag{2}$$

$$\sin^2\theta\nabla_1(\Phi,\Psi) = \cos\theta(D_u\Phi D_u\Psi + D_v\Phi D_v\Psi) - (D_u\Phi D_v\Psi + D_v\Phi D_v\Psi)\,, \tag{2_1}$$

$$\sin^2\theta\nabla_2(\Phi,\Psi) = \sin\theta(D_u\Phi D_u\Psi - D_v\Phi D_v\Psi)\,. \tag{2_2}$$

Um die $\triangle$-Operatoren übersichtlich zu schreiben, gebrauchen wir die Abkürzungen

$$t_1 \equiv \frac{D_u\theta}{\sin\theta} - \operatorname{cotg}\theta\, D_v\theta\ ; \quad t_2 \equiv \frac{D_v\theta}{\sin\theta} - \operatorname{cotg}\theta D_u\theta\ . \tag{3}$$

Damit erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\theta\triangle\Phi &= (D_uD_u + D_vD_v)\Phi - \cos\theta(D_uD_v + D_vD_u)\Phi \\ &\quad + (\gamma_2\sin\theta - t_1\cos\theta)D_u\Phi - (\gamma_1\sin\theta + t_2\cos\theta)D_v\Phi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\theta\triangle_1\Phi &= \cos\theta(D_uD_u + D_vD_v)\Phi - (D_uD_v + D_vD_u)\Phi \\ &\quad - (\gamma_1\sin\theta + t_1)D_u\Phi + (\gamma_2\sin\theta - t_2)D_v\Phi \end{aligned}\right\} \tag{4_1}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\theta\triangle_2\Phi &= \sin\theta(D_uD_u - D_vD_v)\Phi \\ &\quad + (\cos\theta\gamma_1 - \gamma_2)D_u\Phi + (\cos\theta\gamma_2 - \gamma_1)D_v\Phi \end{aligned}\right\} \tag{4_2}$$

Diese Darstellung gewährt offenbar den besten Einblick in den formalen Bau der Operatoren. Sie wird allerdings dadurch erkauft, daß man beim Rechnen vom Kommutator

$$D_vD_u - D_uD_v = \frac{D_uG}{G}D_v - \frac{D_vE}{E}D_u \tag{5}$$

Gebrauch machen muß.

(Eingegangen den 8. März 1957.)