Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 33 (1959)

Artikel: Tenseurs harmoniques et groupes de mouvement d'un espace de RIEMANN.

Autor: Vranceanu, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26015

Tenseurs harmoniques et groupes de mouvement d'un espace de Riemann

par G. Vranceanu, Bucarest

On sait d'après des résultats dus à G. de Rham et W. Hodge [1]), qu'étant donné un espace de Riemann compact orientable, le nombre des tenseurs harmoniques indépendants d'un certain ordre p qu'on peut construire dans l'espace, est égal au nombre de Betti B_p. D'autre part on sait, d'après un théorème de K. Yano [2]) que chaque tenseur harmonique est un invariant par rapport à un mouvement de l'espace. Il y a donc une relation étroite entre le nombre r des paramètres du groupe de mouvement d'un espace V_n compact et les nombres de Betti de cet espace. D'autre part, comme chaque tenseur harmonique est en même temps un tenseur à dérivée extérieure nulle, ou comme on dit encore un tenseur fermé, il y a une relation étroite entre le nombre des tenseurs fermés invariants et le groupe G_r de l espace.

Dans la première partie nous allons donner certaines formules qui lient les tenseurs symétriques gauches avec le groupe de mouvement G_r de l'espace.

Dans la seconde partie nous allons supposer que l'espace est rapporté à un système de congruences orthogonales et nous allons montrer que dans le cas où l'espace possède un groupe de mouvement *simplement transitif* et l'on utilise les congruences orthogonales à coefficients de rotation constants [3]), la recherche des tenseurs harmoniques de l'espace devient un problème algébrique, ce qui généralise un résultat de Hodge relatif aux espaces des groupes semi-simples.

I

Etant donné un espace de Riemann V_n, défini comme une variété différentiable, dont la métrique dans un certain voisinage est donnée par la formule

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j \; , \tag{1}$$

on sait que si l'espace V_n est compact, il peut être couvert par un nombre fini de voisinages. Une certaine propriété est valable pour l'espace V_n compact, si elle est valable dans chacun de ces voisinages. Considérons alors un tenseur symétrique gauche quelconque $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ covariant d'ordre p. On sait qu'on peut

---

1) W. Hodge, *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge Univ. Press, 1952.

2) K. Yano, *Curvature and* Betti *numbers*, Annals of Math. Studies, Princeton 1953, p. 48–49.

3) G. Vranceanu, *Sur les espaces de* Riemann *ayant leurs coefficients de rotation constants*, C. R. Paris, t. 184, 1929, p. 386–388.

former avec ce tenseur un tenseur symétrique gauche d'ordre $p + 1$

$$\Delta_k \xi_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_{k \dots i_p}}{\partial x^{i_1}} - \dots - \frac{\partial \xi_{i_1 \dots k}}{\partial x^{i_p}} \tag{2}$$

qu'on appelle, la dérivée extérieure du tenseur $\xi_{i_1 \dots i_p}$. Si cette dérivée extérieure est nulle on dit que le tenseur est fermé.

Considérons maintenant un vecteur contrevariant η^i. On sait qu'un tel vecteur définit un groupe G_1 continu à un paramètre, la transformation infinitésimale de ce groupe étant donné par la formule

$$x'^i = x^i + \eta^i \tag{3}$$

où η^i sont considérés comme des quantités du premier ordre. On peut former à l'aide du tenseur $\xi_{i_1 \dots i_p}$ et du vecteur η^i la dérivée de LIE

$$L\xi_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} \eta^k + \xi_{s i_2 \dots i_p} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^{i_1}} + \dots + \xi_{i_1 \dots s} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^{i_p}} \tag{4}$$

et cette dérivée est nulle si le tenseur $\xi_{i_1 \dots i_p}$ admet le groupe de mouvement G_1, ou comme on dit encore, s'il est invariant par le groupe G_1, ou bien par le mouvement (3).

D'autre part, on peut associer aux deux tenseurs $\xi_{i_1 \dots i_p}$ et η^i le tenseur symétrique gauche d'ordre $p - 1$

$$b_{i_1 \dots i_{p-1}} = \xi_{i_1 \dots i_{p-2} l} \eta^l . \tag{5}$$

Cela fait, nous avons les formules

$$\begin{aligned} L b_{i_1 \dots i_{p-1}} &= \eta^l L \xi_{i_1 \dots i_{p-1} l} \\ \Delta_k b_{i_1 \dots i_{p-1}} &= \eta^l \Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-1} l} + L \xi_{i_1 \dots i_{p-1} k} . \end{aligned} \tag{6}$$

Pour la démonstration, on remarque que la formule (4), si l'on utilise la formule (2) pour éliminer la dérivée de $\xi_{i_1 \dots i_p}$ par rapport à x^k devient la seconde formule (6) si l'on remarque que $\Delta_k b_{i_1 \dots i_{1-p}}$, c'est-à-dire la dérivée extérieure du tenseur (5), peut encore s'écrire

$$\Delta_k b_{i_1 \dots i_{p-1}} = \frac{\partial}{\partial x^k} (\xi_{i_1 \dots i_{p-1} s} \eta^s) + \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} (\xi_{s \dots k} \eta^s) + \dots + \frac{\partial}{\partial x^{i_{p-1}}} (\xi_{i_1 \dots s k} \eta^s) \tag{7}$$

et que nous avons

$$\eta^k \Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-1} l} = - \eta^k \Delta_l \xi_{i_1 \dots i_{p-1} k} . \tag{8}$$

De même il en résulte facilement les premières formules (6).

Nous avons donc le théorème suivant:

Etant donné un tenseur symétrique gauche d'ordre p fermé $\xi_{i_1 \dots i_p}$, invariant *par rapport au mouvement* η^i, *le tenseur associé* (5) *est aussi fermé et invariant par rapport à* η^i.

En prenant la dérivée covariante de la formule (5) par rapport à x^j nous avons

$$b_{i_1 \ldots i_{p-1}, j} = \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} i} \, \eta^i_{,j} + \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} i, j} \eta^i. \tag{9}$$

Nous pouvons donc écrire la formule

$$a^{sj} b_{i_1 \ldots i_{p-2} s, j} = a^{sj} \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} s i} \eta^i_{,j} + a^{sj} \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} s i, j} \eta^i. \tag{10}$$

Comme le tenseur $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ est harmonique si nous avons

$$a^{sj} \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} s i, j} = 0 \tag{11}$$

il en résulte que le premier membre de la formule (10) est aussi nul, donc le tenseur associé (5) est aussi harmonique, si le tenseur

$$I_{i_1 \ldots i_{p-2}} = \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} s i} \eta^i_{,j} a^{sj} = \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} s i} a^{sl} a^{ik} \eta_{k, l} \tag{12}$$

est nul.

Considérons maintenant dans l'espace V_n un groupe G_r et soient $\eta^i_\alpha (\alpha = 1, \ldots, r)$ les r vecteurs qui définissent les transformations infinitésimales du groupe. On sait alors que nous avons les formules

$$\eta^j_\alpha \frac{\partial \eta^i_\beta}{\partial x^j} - \eta^j_\beta \frac{\partial \eta^i_\alpha}{\partial x^j} = c^\varrho_{\alpha\beta} \eta^i_\varrho \tag{13}$$

où $c^\varrho_{\alpha\beta}$ sont les constantes de structure du groupe.

Nous voulons montrer que les formules (6) peuvent se généraliser à un tenseur symétrique gauche quelconque $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ d'ordre p et deux vecteurs η^i_α, η^i_β et même à un nombre quelconque de vecteurs. En effet, on peut toujours considérer les tenseurs associés d'ordre $p - 2$,

$$\xi_{i_1 \ldots i_{p-2} \alpha\beta} = \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} i j} \eta^i_\alpha \eta^j_\beta. \tag{14}$$

Nous allons démontrer en premier lieu la formule

$$L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} \beta} = \eta^j_\beta L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} j} + \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} \varrho} \, c^\varrho_{\alpha\beta} \tag{15}$$

où nous avons posé $\xi_{i_1 \ldots i_{p-1} \beta} = \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j} \, \eta^j_\beta$. En effet nous avons, en accord avec les premières formules (6)

$$L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} \beta} = \frac{\partial \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} j}}{\partial x^s} \eta^j_\beta \eta^s_\alpha + \xi_{i_1 \ldots p-1 j} \frac{\partial \eta^j_\beta}{\partial x^s} \eta^s_\alpha$$
$$+ \xi_{s \ldots i_{p-2} j} \eta^j_\beta \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^{i_1}} + \ldots + \xi_{i_1 \ldots s j} \eta^j_\beta \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^{i_{p-1}}}.$$

On voit que dans le second membre, les termes qui ont en facteur η^j_β constituent $L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j}$ sauf le dernier terme de L_α qui manque. Donc, dans le second membre, en dehors du terme $\eta^j_\beta L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j}$ restent les termes

$$\xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j} \frac{\partial \eta^j_\beta}{\partial x^s} \eta^s_\alpha - \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} s} \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^s} \eta^j_\beta .$$

En changeant s avec j dans le second de ces termes et en tenant compte des formules (13), il en résulte les formules (15), ce qui constitue une généralisation des premières formules (6).

Considérons maintenant $q+1$ vecteurs $\eta^i_\alpha, \eta^i_{\alpha_1}, \ldots, \eta^i_{\alpha_q}$ du groupe G_r et considérons le tenseur d'ordre $p-q$

$$\xi_{i_1 \ldots i_{p-q} \alpha_1 \ldots \alpha_q} = \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} j_1 \ldots j_q} \tag{16}$$

Nous avons alors la formule

$$\begin{aligned} L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} \alpha_1 \ldots \alpha_q} &= \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} j_1 \ldots j_q} \\ &+ \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} \varrho \alpha_2 \ldots \alpha_q} c^\varrho_{\alpha \alpha_1} + \ldots + \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} \alpha_1 \ldots \varrho} c^\varrho_{\alpha \alpha_q} . \end{aligned} \tag{17}$$

Pour la démonstration on remarque dans ce cas aussi que nous avons

$$\begin{aligned} L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} \alpha_1 \ldots \alpha_q} &= \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} \frac{\partial \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} j_1 \ldots j_q}}{\partial x^s} \eta^s_\alpha \\ &+ \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^s} [\eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q}] \\ &+ \left[\xi_{s \ldots i_{p-q} j_1 \ldots j_q} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^{i_1}} + \ldots + \xi_{i_1 \ldots s j_1 \ldots j_q} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^{i_{p-q}}} \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} \right] \end{aligned} \tag{17'}$$

On voit que les termes du second membre qui contiennent en facteur $\eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q}$ représentent les $n+1-q$ premiers termes de la dérivée de LIE $L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} j_1 \ldots j_q}$. En faisant apparaître dans le second membre de (17′) cette dérivée les autres termes du second membre de (17′) s'écrivent

$$\begin{aligned} &\xi_{i_1 \ldots i_{p-q} j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^s} (\eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q}) \eta^s_\alpha - \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} s j_2 \ldots j_q} \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^{j_1}} \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} \\ &- \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} j_1 \ldots s} \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^{j_q}} \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} \end{aligned}$$

de façon qu'en tenant compte des formules (13) il en résulte les formules (17).

Supposons maintenant que les vecteurs $\eta^i_{\alpha_1} \ldots, \eta^i_{\alpha_q}$ déterminent un groupe G_q à q paramètres, invariant dans G_r. En ce cas l'indice ϱ dans les seconds membres des (17) peut prendre seulement les valeurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. En tenant compte d'autre part de la gauche symétrie des $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ il en résulte que l'on peut avoir des termes non nuls seulement si dans $c^{\varrho}_{\alpha\alpha_1}$ nous posons $\varrho = \alpha_1$. Il en résulte donc que les formules (17) deviennent en ce cas

$$L_{\alpha}\xi_{i_1\ldots i_{p-q}\alpha_1\ldots\alpha_q} = \eta^{j_1}_{\alpha_1}\ldots\eta^{j_q}_{\alpha_q} L_{\alpha}\xi_{i_1\ldots i_{p-q}j_1\ldots j_q} - h_{\alpha}\xi_{i_1\ldots i_{p-q}\alpha_1\ldots\alpha_q}, \tag{17''}$$

où nous avons posé

$$h_{\alpha} = c^{\alpha_1}_{\alpha_1\alpha} + \ldots + c^{\alpha_q}_{\alpha_q\alpha}.$$

Nous avons donc le théorème:

Etant donné un tenseur gauche symétrique $\xi_{i_1\ldots i_p}$ d'ordre p invariant par une transformation η^i_{α} et un groupe G_q d'ordre $q \leqslant p$, invariant dans G_r le tenseur associé (16) au groupe G_q est aussi invariant par rapport à η^i_{α}, si la quantité h_{α} est nulle.

On peut remarquer que les quantités h_{α} sont nulles, si G_q est le groupe dérivé de G_r et si le vecteur de structure de G_r est nul.

Ecrivons maintenant les formules (14) sous la forme

$$\xi_{i_1\ldots i_{p-2}\alpha\beta} = \eta^i_{\alpha}\,\xi_{i_1\ldots i_{p-2}i\beta}, \quad (\xi_{i_1\ldots i_{p-q}i\beta} = \xi_{i_1\ldots i_{p-2}ij}\eta^j_{\beta})$$

et prenons les dérivées extérieures. Nous avons en appliquant la seconde formule (6)

$$\varDelta_k\xi_{i_1\ldots i_{p-2}\alpha\beta} = \eta^i_{\alpha}\varDelta_k\xi_{i_1\ldots i_{p-2}i\beta} + L_{\alpha}\xi_{i_1\ldots i_{p-2}k\beta}\,.$$

En tenant compte des formules (6) nous obtenons la formule

$$\varDelta_k\xi_{i_1\ldots i_{p-2}\alpha\beta} = \eta^i_{\alpha}\eta^j_{\beta}\varDelta_k\xi_{i_1\ldots i_{p-2}ij} + \eta^i_{\alpha}L_{\beta}\xi_{i_1\ldots i_{p-2}ik} + \eta^j_{\beta}L_{\alpha}\xi_{i_1\ldots i_{p-2}kj} + \xi_{i_1\ldots i_{p-2}k\varrho}c^{\varrho}_{\alpha\beta}\,.$$

Considérons encore la dérivée extérieure d'un tenseur associé à trois vecteurs. Nous avons la formule

$$\varDelta_k\xi_{i_1\ldots i_{p-3}\alpha\beta\gamma} = \eta\varDelta_k\xi_{i_1\ldots i_{p-3}i\beta\gamma} + L_{\alpha}\xi_{i_1\ldots i_{p-3}k\beta\gamma}.$$

En tenant compte de la formule (17) et (18) nous avons

$$\varDelta_k\xi_{i_1\ldots i_{p-3}\alpha\beta\gamma} = \eta^i_{\alpha}\eta^j_{\beta}\eta^l_{\gamma}\varDelta_k\xi_{i_1\ldots i_{p-3}ijl} + \eta^j_{\beta}\eta^l_{\gamma}L_{\alpha}\xi_{i_1\ldots i_{p-3}kjl} + \eta^i_{\alpha}\eta^l_{\gamma}L_{\beta}\xi_{i_1\ldots p-3\,ikl} + \eta^i_{\alpha}\eta^j_{\beta}L_{\gamma}\xi_{i_1\ldots i_{p-3}ijk} + S\xi_{i_1\ldots i_{p-3}k\varrho\alpha}c^{\varrho}_{\beta\gamma}$$

où S signifie qu'on fait la somme des termes qui s'obtiennent par les permutations circulaires des indices α, β, γ.

Considérons maintenant la dérivée extérieure du tenseur (16). On peut écrire évidemment

$$\varDelta_k\xi_{i_1\ldots i_{p-q}\alpha_1\ldots\alpha_q} = \eta^i_{\alpha_1}\varDelta_k\xi_{i_1\ldots i_{p-q}i\alpha_2\ldots\alpha_q} + L_{\alpha_1}\xi_{i_1\ldots i_{p-q}k\alpha_2\ldots\alpha_q}. \tag{18'}$$

Il s'agit maintenant de montrer que nous avons les formules

$$\begin{aligned}\Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-q} \alpha_1 \dots \alpha_q} = \eta^{j_1}_{\alpha_1} \dots \eta^{j_q}_{\alpha_q} \Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots j_q} + \eta^{j_2}_{\alpha_2} \dots \eta^{j_q}_{\alpha_q} L_{\alpha_1} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k j_2 \dots j_q} \\ + \dots + \eta^{j_1}_{\alpha_1} \dots \eta^{j_{q-1}}_{\alpha_{q-1}} L_{\alpha_q} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots k} + S \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \varrho \alpha_3 \dots \alpha_q} c^{\varrho}_{\alpha_1 \alpha_2}\end{aligned} \tag{19}$$

où S signifie qu'on fait la somme des termes correspondants à toutes les combinaisons qui s'obtiennent de $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ en associant à chaque paire α_i, α_j les autres $n-2, \alpha_s$ $(s \neq i, j)$ de façon que $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_{s_1}, \dots \alpha_{s_{q-2}}$ s'obtiennent de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ par une permutation paire.

Pour la démonstration on suppose que la formule (19) est vérifiée pour $q-1$ vecteurs. En ce cas, en tenant compte de la formule (18′) et des formules (17) il en résulte que la formule (19) est aussi vérifiée pour q vecteurs. En effet, il est facile à vérifier que dans le second membre de (18′) interviennent les termes du second membre de (18) qui contiennent la dérivée extérieure Δ_k et les dérivées de LIE. En ce qui concerne les termes en $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ dans (18′) ils s'écrivent

$$\eta^{i}_{\alpha_1} \bar{S} \xi_{i_1 \mathrm{b} .. i_{p-q} i k \varrho \alpha_4 \dots \alpha_q} c^{\varrho}_{\alpha_2 \alpha_3} + \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \varrho \alpha_3 \dots \alpha_q} c^{\varrho}_{\alpha_1 \alpha_2} + \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \alpha_2 \dots \varrho} c^{\varrho}_{\alpha_1 \alpha_q} \tag{19'}$$

où $\bar{S}$ signifie qu'on fait la somme par rapport à tous les couples formés avec $\alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_q$. Mais le premier terme peut aussi s'écrire

$$\bar{S} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \varrho \alpha_1 \alpha_4 \dots \alpha_q} c^{\varrho}_{\alpha_2 \alpha_3}$$

et il est facile à voir que la formule (19′) coïncide avec la somme S de la formule (19).

Les formules (17) et (19) peuvent donc être considérées comme une généralisation des formules (6) et nous avons le théorème suivant:

Etant donné un groupe G_r et un tenseur symétrique gauche $\xi_{i_1 \dots i_p}$ les différents tenseurs (16) *associés au groupe, satisfont aux formules* (17) *et* (19).

Supposons maintenant que $\eta^{i}_{\alpha_1}, \dots \eta^{i}_{\alpha_q}$ déterminent un groupe G_q. En ce cas l'indice ϱ dans les formules (19) peut prendre seulement les valeurs α_i. D'autre part, en tenant compte de la symétrie gauche du tenseur $\xi_{i_1 \dots i_p}$ il résulte que la formule (19) s'écrit, dans le cas où ce tenseur est fermé et invariant,

$$\Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-q} \alpha_1 \dots \alpha_q} = - c_{\alpha_1} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \alpha_2 \dots \alpha_q} + \dots (-1)^q c_{\alpha_q} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \alpha_1 \dots \alpha_{q-1}} \tag{20}$$

où nous avons posé $c_{\alpha_i} = c^{\varrho}_{\varrho \alpha_i}$, les c_{α_i} étant les composantes du vecteur de structure du groupe G_q.

Nous avons donc le théorème:

Etant donné un tenseur gauche symétrique $\xi_{i_1 \dots i_p}$ *fermé et invariant par rapport au groupe* G_q *le tenseur associé* (16) *est aussi fermé, si le vecteur de structure du groupe* G_q *est nul.*

On sait que tous les groupes simples ou semi-simples de même que les groupes qui coïncident avec leur groupe dérivé ont le vecteur de structure nul. Il en résulte donc que si l'espace V_n possède un groupe à q paramètres à vecteur de structure nul et si nous avons un tenseur fermé invariant $\xi_{i_1 \dots i_q}$, les quantités

$$\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \eta^{i_1}_{\alpha_1} \dots \eta^{i_q}_{\alpha_q} \xi_{i_1 \dots i_q} \tag{20'}$$

sont des constantes, ce qui constitue une généralisation dans le cas d'un espace V_n compact du théorème de BOCHNER, qui correspond au cas $q = 1$.

II

Supposons maintenant que l'on considère dans l'espace de Riemann V_n un système de n congruences orthogonales. Celà signifie que la métrique (1) a été écrite sous la forme canonique

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \dots + (ds^n)^2 \tag{21}$$

et que nous avons des formules de la forme

$$ds^a = \lambda^a_i dx^i,\ dx^i = \mu^i_a ds^a,\ \lambda^a_i \mu^i_b = \delta^a_b,\ a_{ij} = \lambda^a_i \lambda^a_j,\ a^{ij} = \mu^i_a \mu^j_a \tag{21'}$$

et l'on dit d'après RICCI et LEVI-CIVITA que $\mu^i_a (a = 1, \dots, n)$ sont les paramètres des n congruences orthogonales et $\lambda^a_i (a = 1, \dots, n)$ sont les moments. On dit aussi que ds^a sont les différentielles des arcs des congruences, car si toutes les ds^a sont nulles, sauf une, disons ds^1, alors nous avons un déplacement sur la première congruence.

Supposons maintenant que nous ayons une transformation (3) de l'espace V_n, donc que sont vérifiées les formules

$$La_{ii} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^x} \eta^k + a_{sj} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^i} + a_{is} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^j} = 0. \tag{21''}$$

En tenant compte des formules (21') on peut écrire ces formules sous la forme

$$La_{ij} = \lambda^a_j L\lambda^a_i + \lambda^a_i L\lambda^a_j = 0 \tag{22}$$

où nous avons posé

$$L\lambda^a_i = \frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} \eta^j + \lambda^a_j \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \tag{22'}$$

En multipliant par μ_b^i, μ_c^j et en sommant nous obtenons les formules

$$\mu_b^i L \lambda_i^c + \mu_c^i L \lambda_i^b = 0 \tag{23}$$

Supposons maintenant que l'espace V_n possède un groupe de mouvement simplement transitif G défini par les n vecteurs η_α^i ($\alpha = 1, \ldots, n$). Nous avons alors des formules de la forme (13) où $c_{\alpha\beta}^{\varrho}$ ($\alpha, \beta, \varrho = 1, \ldots, n$) sont les constantes de structure du groupe. En ce cas on peut choisir un système de congruences orthogonales dans l'espace V_n qui soient en même temps invariantes par rapport au groupe G_n, donc de façon à avoir

$$L_\alpha \lambda_i^a = \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} \eta_\alpha^j + \lambda_j^a \frac{\partial \eta_\alpha^j}{\partial x^i} = 0. \tag{24}$$

Il est facile à voir que les congruences (λ) ainsi définies forment elles aussi par les vecteurs μ_a^i un groupe simplement transitif H_n et on peut s'arranger de façon que H_n possède les mêmes constantes de structure que G_n, car les deux groupes sont réciproques[1]) et les coefficients de rotation de RICCI des n congruences (λ) sont des constantes définies par les formules

$$\gamma_{bc}^a = \tfrac{1}{2}(c_{bc}^a + c_{ca}^b + c_{ba}^c). \tag{24''}$$

Considérons maintenant un tenseur gauche symétrique $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ et soient $\xi_{a_1 \ldots a_p}$ ses composantes sur les congruences (λ). Nous avons alors les formules

$$\xi_{i_1 \ldots i_p} = \xi_{a_1 \ldots a_p} \lambda_{i_1}^{a_1} \ldots \lambda_{i_p}^{a_p}, \quad \xi_{a_1 \ldots a_p} = \xi_{i_1 \ldots i_p} \mu_{a_1}^{i_1} \ldots \mu_{a_p}^{i_p}.$$

Si l'on considère maintenant les dérivées extérieures, il est facile à voir qu'on obtient les formules

$$\Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_p} = \Delta_a \xi_{a_1 \ldots a_p} \lambda_{i_1}^{a_1} \ldots \lambda_{i_p}^{a_p} \lambda_k^a$$

où nous avons posé

$$\Delta_a \xi_{a \ldots a_p} = \frac{\partial \xi_{a_1 \ldots a_p}}{\partial s^a} - \frac{\partial \xi_{a \ldots a_p}}{\partial s^{a_1}} - \ldots - \frac{\partial \xi_{a_1 \ldots a}}{\partial s^{a_p}}$$

$$+ \xi_{f \ldots a_p} w_{a_1 a}^f + \ldots + \xi_{a_1 \ldots f} w_{a_p a}^f - \xi_{fa \ldots a_p} w_{a_1 a_2}^f - \ldots - \xi_{a_1 \ldots fa} w_{a_{p-1} a_p}^f \tag{25}$$

les termes négatifs du second membre de (25) provenant du terme général

$$- \xi_{a_1 \ldots a_{s-1} f \ldots a_{q-1} a \ldots a_p} w_{a_s a_q}^f$$

où $s < q$. En ce qui concerne les quantités w_{bc}^a elles sont les coefficients des covariants bilinéaires Δs^a des formes ds^a et nous avons

$$\Delta s^a = \delta ds^a - d\delta s^a = w_{bc}^a ds^b \delta s^c \,. \tag{26}$$

[1]) G. VRANCEANU, *Sur les espaces de* RIEMANN *ayant leurs coefficients de rotation constants*, C. R. 189, 1929, p. 386 et *Leçons de géométrie différentielle*, vol. I, 1947, p. 291.

Autrement dit Δs^a sont les dérivées extérieures des ds^a, exprimées à l'aide des formes $ds^1, \ldots, ds^n$. On voit donc que la condition pour que le tenseur $\xi_{a_1 \ldots a_p}$ soit fermé est donnée dans le système des congruences (λ) par la condition $\Delta_a \xi_{a_1 \ldots a_p} = 0$. D'autre part en considérant la dérivée de LIE du tenseur $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ nous avons les formules

$$L\xi_{i_1 \ldots i_p} = \left[\frac{\partial \xi_{a_1 \ldots a_p}}{\partial x^k}\eta^k + \xi_{f \ldots a_p}\mu^i_{a_1} L\lambda^f_i + \ldots + \xi_{a_1 \ldots f}\mu^i_{a_p} L\lambda^f_i\right]\lambda^{a_1}_{i_1} \ldots \lambda^{a_p}_{i_p}. \tag{26'}$$

Supposons maintenant que l'espace V_n possède un groupe simplement transitif G_n et que les congruences (λ) sont invariantes par ce groupe. En ce cas comme nous avons montré plus haut que $L_\alpha \lambda^f_i$ sont toutes nulles et w^a_{bc} sont égales aux constantes c^a_{bc} de la structure du groupe G_n, les équations (26') nous disent que le tenseur $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ est invariant par le groupe G_n, si les composantes $\xi_{a_1 \ldots a_p}$ sont toutes des constantes et la formule (25) nous dit que le tenseur $\xi_{a_1 \ldots a_p}$ est en même temps fermé si nous avons les conditions

$$\xi_{f a_2 \ldots a_p} c^f_{a_1 a} + \ldots + \xi_{a_1 \ldots f} c^f_{a_p a} - \xi_{f a \ldots a_p} c^f_{a_1 a_2} - \ldots - \xi_{a_1 \ldots f a} c^f_{a_{p-1} a_p} = 0. \tag{27}$$

Nous avons donc le théorème:

Etant donné un espace V_n possédant un groupe simplement transitif G_n la recherche des tenseurs gauches symétriques fermés et invariants, se réduit à la recherche des solutions des équations algébriques (27).

Considérons maintenant les dérivées covariantes, $\xi_{a_1 \ldots a_p, a}$ du tenseur $\xi_{a_1 \ldots a_p}$. En tenant compte que les composantes $\xi_{a_1 \ldots a_p}$ sont des constantes et que les coefficients de la connexion dans le système des congruences (λ) sont γ^a_{bc} nous avons

$$\xi_{a_1 \ldots a_p, a} = \xi_{f \ldots a_p}\gamma^f_{a_1 a} + \ldots + \xi_{a_1 \ldots f}\gamma^f_{a_p a} \tag{27'}$$

et il est facile à voir que l'on peut exprimer les formules (27) aussi sous la forme

$$\xi_{a_1 \ldots a_p, a} - \xi_{a \ldots a_p, a_1} - \ldots - \xi_{a_1 \ldots a, a_p} = 0.$$

En tenant compte que dans un système de congruences orthogonales les composantes du tenseur métrique sont δ^a_b il en résulte qu'en posant dans les formules (27') $a_1 = a$ et en contractant on obtient comme conditions pour que le tenseur soit harmonique

$$\xi_{f a_2 \ldots a_p}\gamma^f_{aa} + \xi_{a f \ldots a_p}\gamma^f_{a_2 a} + \ldots + \xi_{a a_2 \ldots f}\gamma^f_{a_p a} = 0. \tag{28}$$

Les conditions (27) et (28) représentent donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que le tenseur $\xi_{a_1 \ldots a_p}$ soit harmonique.

On voit aussi qu'une condition suffisante est que

$$\xi_{a_1 \ldots a_p, a} = \xi_{f \ldots a_p} \gamma^f_{a_1 a} + \ldots + \xi_{a_1 \ldots f} \gamma^f_{a_p a} = 0 \tag{28'}$$

En tenant compte des formules (24″) nous obtenons

$$\gamma^f_{aa} = c^a_{af} = c_f$$

où c_f est ce qu'on appelle le vecteur de structure du groupe G_n et les équations (28) s'écrivent en tenant compte des formules (24″)

$$\xi_{f \ldots a_p} c_f + \xi_{as \ldots a_p} c^{a_2}_{as} + \ldots + \xi_{aa_2 \ldots s} c^{a_p}_{as} = 0 \tag{29}$$

où l'indice a est plus petit que s. Nous avons donc le théorème:

Etant donné un espace V_n compact orientable possédant un groupe simplement transitif G_n la recherche des tenseurs harmoniques revient à la recherche des solutions des équations algébriques (27) *et* (29).

Supposons maintenant que nous ayons un vecteur harmonique dont les composantes sur les congruences (λ) sont ξ_a. Ce vecteur est fermé si nous avons conformément aux équations (27)

$$\xi_f c^f_{ab} = 0 \tag{30}$$

ces équations ne possédant pas des solutions si le groupe G_n coïncide avec son groupe dérivé. Il n'y a donc plus de vecteur harmonique et nous avons le théorème:

Etant donné un espace V_n compact à groupe G_n qui coïncide avec son groupe dérivé, le nombre de BETTI *B_1 est nul.*

Si le groupe dérivé de G_n est un groupe $G_{n-m(m>0)}$ les équations (30) possèdent m solutions. En tenant compte que les équations (29) s'écrivent

$$\xi_f c_f = 0 \tag{30'}$$

il en résulte qu'une des solutions des équations (30) nous donne un vecteur harmonique si son produit scalaire avec le vecteur c_f est nul. Nous avons le théorème suivant:

Le nombre de BETTI *B_1 d'un espace V_n compact à groupe G_n possédant un groupe dérivé G_{n-m} est égal à $m - 1$ ou à m.*

En effet supposons que nous avons choisi les transformations infinitésimales $X_\alpha f$ du groupe G_n de façon que $X_\alpha f (\alpha = m + 1, \ldots, n)$ soient les transformations de G_{n-m}. En ce cas $c^h_{ab} = 0 (h = 1, \ldots, m)$ et le vecteur c_f est égal à $c^{\alpha}_{\alpha f}$. Comme chaque vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_m, 0, \ldots, 0)$ est fermé, ce vecteur est harmonique si nous avons

$$\xi_h c_h = 0\,, \quad (c_h = c^{\alpha}_{\alpha h})\,, \quad (h = 1, \ldots, m) \tag{30''}$$

et le nombre de BETTI est égal à $m - 1$ si $c_h (h = 1, \ldots, m)$ ne sont pas toutes nulles, autrement il est égal à m. Il en résulte en particulier que le nombre de BETTI B_1 est égal à m, si le vecteur de structure du groupe G_n est nul.

Cherchons maintenant les tenseurs fermés du second ordre. Ils doivent satisfaire aux équations (27), qui en ce cas s'écrivent

$$\xi_{fb} c^f_{ac} + \xi_{fa} c^f_{cb} + \xi_{fc} c^f_{ba} = 0\,. \tag{31}$$

Pour que le tenseur soit harmonique il faut qu'il satisfasse aussi aux formules

$$\xi_{fb} c_f + \xi_{as} c^b_{as} = 0 \quad (a < s)\,. \tag{32}$$

On peut maintenant remarquer que l'on peut toujours satisfaire aux formules (31) en posant

$$\xi_{fb} = a_h c^h_{fb}$$

où a_h sont des constantes quelconques, donc il en existe une infinité de tenseurs fermés du second ordre.

Pour qu'un tel tenseur soit harmonique il faut qu'il satisfasse aux formules (32) qui s'écrivent

$$a_h (c^h_{fb} c_f + c^h_{as} c^b_{as}) = 0\,. \tag{32'}$$

Il faut donc que ce système possède des solutions dans a_h.

Supposons que nous avons une solution ξ_{ab}. On peut toujours par une transformation orthogonale à coefficients constants réduire le tenseur ξ_{ab} à la forme canonique où toutes les composantes sont nulles sauf $\xi_{12}, \ldots, \xi_{2q-1\,2q}$, où $2q \leqslant n$. Nous allons supposer que $2q < n$. En ce cas si dans les équations (31) les indices b, c varient de $2q + 1$ à n, nous avons les conditions

$$\xi_{2s-1\;2s}\, c^{2s}_{\beta\gamma} = 0\,, \quad \xi_{2s-1\;2s}\, c^{2s-1}_{\beta\gamma} = 0 \quad (\beta, \gamma > 2q)$$

où s est un indice fixe ayant les valeurs $1, \ldots, q$. Cela nous dit qu'on doit avoir $c^h_{\beta\gamma} = 0$ $(h \leqslant 2q)$ donc les opérateurs $X_\beta f$ $(\beta > 2q)$ forment un sous-groupe à $n - 2q$ paramètres du groupe G_n. Nous avons donc le théorème:

Une condition nécessaire pour qu'un espace V_n à groupe simplement transitif G_n possède un tenseur harmonique d'ordre 2 et de rang $2q$, est que le groupe G_n possède un sous-groupe G_{n-2q}.

Supposons cette condition vérifiée et supposons aussi que le groupe G_{n-2q} est un sous-groupe invariant. En ce cas on peut supposer dans les équations (31) que les indices a, b, c ont des valeurs plus petites que $2q+1$ et les formules (32) s'écrivent

$$\xi_{fb} c_f + \xi_{as} c^b_{as} = 0, \quad \xi_{as} c^\alpha_{as} = 0. \tag{33}$$

On voit que les équations (31) sont identiquement vérifiées si les opérateurs $X_a f$ $(a = 1, \dots, 2q)$ forment un groupe abélien et les (33) sont alors vérifiées si $c_f = 0$. Nous avons donc le théorème:

Une condition suffisante pour que l'espace V_n possède un tenseur arbitraire harmonique du second ordre et de rang $2q$ est que le groupe G_n possède un sous-groupe invariant G_{n-2q}, un groupe complémentaire G_{2q} abélien et que le vecteur de structure de G_n soit nul.

Supposons maintenant qu'on veut que le tenseur harmonique soit de rang 2, donc $q = 1$. En ce cas les équations (31) et (32) s'écrivent

$$\xi_{12}(c^1_{1\alpha} + c^2_{2\alpha}) = 0, \qquad \xi_{12} c_1 + \xi_{12} c^2_{12} = 0$$

$$\xi_{21} c_2 + \xi_{12} c^1_{12} = 0, \qquad c^\alpha_{12} = 0, \quad c^h_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 3, \dots, n)$$

donc $X_1 f$ et $X_2 f$ forment aussi un groupe. En tenant compte des valeurs de c_1, c_2 nous avons les conditions

$$c^\alpha_{\alpha 1} = 0, \qquad c^\alpha_{\alpha 2} = 0, \qquad c^1_{1\alpha} = -\, c^2_{2\alpha}.$$

Nous avons donc le théorème:

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace V_n à groupe simplement transitif G_n possède un tenseur harmonique du second ordre de rang 2 est que la structure du groupe G_n soit de la forme

$$\begin{aligned} &(X_1 X_2) = a X_1 + b X_2, \quad (X_\beta X_\gamma) = c^\varrho_{\beta\gamma} X_\varrho \quad (\alpha, \beta, \gamma, \varrho > 2) \\ &(X_1 X_\alpha) = a_\alpha X_1 + b_\alpha X_2 + m^\varrho_\alpha X_\varrho, \quad (x_2 X_\alpha) = c_\alpha X_1 - a_\alpha X_2 + n^\varrho_\alpha X_\alpha \end{aligned} \tag{34}$$

où $m^\alpha_\alpha = n^\alpha_\alpha = 0$. Il en résulte donc que si un espace V_n fermé orientable possède le groupe simplement transitif (34) le nombre de BETTI B_2 est au moins égal à l'unité.

Supposons maintenant que le groupe G_n est un groupe semi-simple. On sait qu'en ce cas le tenseur symétrique

$$c_{hk} = c^s_{hp} c^p_{ks}$$

n'est pas dégénéré et si le groupe G_n est un groupe fermé, le tenseur c_{hk} est défini négatif. Si l'on suppose ce tenseur réduit à la forme canonique $-\delta^h_k$

les constantes de structure c^h_{kl} sont gauches symétriques dans chaque paire d'indices. En tenant compte des formules (24″), il en résulte $2\gamma^h_{kl} = c^h_{kl}$. On dit alors que l'espace V_n est l'espace représentatif du groupe semi-simple G_n. Nous avons donc le théorème.

La détermination des tenseurs harmoniques d'un espace V_n représentatif d'un groupe semi-simple fermé se réduit à la recherche des solutions des équations (27) *et* (29) *avec* $c_f = 0$ *et* c^h_{kl} *gauches symétriques dans chaque paire d'indices*[1]).

En tenant compte du fait qu'un groupe G_n semi-simple coïncide avec son groupe dérivée, il en résulte, d'après un théorème démontré plus haut, que l'espace a le premier nombre de BETTI B_1 nul, ce qui est bien connu. De même, pour démontrer que le nombre B_2 est aussi nul, on observe qu'en multipliant les équations (31) par c^h_{ac} et en sommant par rapport à c et a nous avons en tenant compte de la gauche symétrie des c^a_{bc}

$$c_{hf}\xi_{bf} + 2\xi_{fa}c^b_{fs}c^s_{ha} = 0. \tag{35}$$

D'autre part en tenant compte des identités de LIE, nous avons

$$2\xi_{fa}c^b_{fc}c^c_{ha} = \xi_{fa}c^s_{af}c^b_{sh}$$

dont le second membre est nul en vertu des formules (32) et du fait que nous avons $c_f = 0$. Les formules (35) se réduisent donc aux premiers termes et comme le déterminant $|c_{hk}|$ est différent de zéro, il en résulte $\xi_{bf} = 0$, donc le nombre B_2 est aussi nul.

Supposons maintenant qu'on considère les tenseurs fermés du troisième ordre. Dans ce cas les formules (27) et (29) s'écrivent

$$\begin{gathered}\xi_{fbc}c^f_{ad} + \xi_{afc}c^f_{bd} + \xi_{abf}c^f_{cd} - \xi_{fdc}c^f_{ab} - \xi_{fbd}c^f_{ac} - \xi_{afd}c^f_{bc} = 0\\ \xi_{asa_3}c^{a_2}_{as} + \xi_{aa_2s}c^{a_3}_{as} = 0.\end{gathered} \tag{36}$$

Si le groupe G_n semi-simple est fermé et le tenseur c_{hk} a été réduit à la forme canonique $-\delta^h_k$ il est facile à voir que ces équations admettent la solution $\xi_{fbc} = c^f_{bc}$, car les premières équations (36) sont vérifiées à cause des identités de LIE du groupe G_n et les secondes à cause du fait que $c_{a_2a_3} = 0$. Il en résulte d'une manière très simple le résultat connu que le nombre $B_3 \geqslant 1$. D'autre part le calcul direct de tous les nombres de BETTI des groupes simples fait par HODGE montre que pour chaque groupe simple $B_3 = 1$ donc nous avons $B_3 = l$, pour l'espace V_n à groupe G_n semi-simple et qui est le produit de l groupes simples.

Reçu le 20 février 1958

---

[1]) W. HODGE montre dans son livre, *Harmonic integrals*, p. 255, que les conditions suffisantes (28′) sont aussi nécessaires dans le cas d'un espace V_n représentatif d'un groupe G_n semi-simple