

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 33 (1959)

**Artikel:** Sur les structures homographiques d'une surface de RIEMANN.  
**Autor:** Teleman, C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26018>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 28.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur les structures homographiques d'une surface de RIEMANN

par C. TELEMAN

## Introduction

Soit  $R$  une surface de RIEMANN. Nous considérons des systèmes de  $p + 1$  fonctions analytiques sur  $R$ ,  $u_1, \dots, u_{p+1}$ , satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Si l'on prolonge analytiquement le système  $u = (u_1, \dots, u_{p+1})$ , le long d'un chemin fermé de  $R$ , les fonctions  $u_i$  subissent une transformation homographique

$$\rho \bar{u}_i = c_i^1 u_1 + \dots + c_i^{p+1} u_{p+1}, \quad (i = 1, \dots, p + 1) \quad (1)$$

$c_j^i$  étant des constantes complexes et  $\rho$  une fonction analytique.

2. Le wronskien des fonctions  $u_i$  :

$$W = \begin{vmatrix} u_1^{(p)} & \dots & u_1' & u_1 \\ u_2^{(p)} & \dots & u_2' & u_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{p+1}^{(p)} & \dots & u_{p+1}' & u_{p+1} \end{vmatrix} \quad (2)$$

n'est nul en aucun point de  $R$  (on a désigné par  $u^{(h)}$  les dérivées de  $u$  par rapport à un uniformisateur local  $z$  de  $R$ . La condition  $W \neq 0$  ne dépend pas du choix de cet uniformisateur).

3. Les fonctions  $u_i$  n'ont pas d'autres singularités que des pôles.

Au point de vue géométrique, ces conditions nous disent que les fonctions  $u_i$  associent à tout domaine simplement connexe de  $R$  une courbe de l'espace projectif complexe à  $p$  dimensions, et cette courbe a en chaque point une tangente et un hyperplan osculateur déterminés.

Convenons de dire que deux tels systèmes  $u, \bar{u}$  sont équivalents si entre une détermination  $u_1, \dots, u_{p+1}$  du premier et une détermination  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{p+1}$  du second, dans un domaine simplement connexe de  $R$ , existe une relation de la forme (1). Nous appellerons *structure homographique d'ordre  $p$*  de  $R$  toute classe  $H$  de tels systèmes contenant tous les systèmes équivalents à l'un d'eux.

Dans un autre travail [1] nous avons considéré le cas  $p = 1$  et nous avons obtenu le résultat suivant :

*Les structures homographiques d'ordre 1 d'une surface  $R$  sont en correspondance biunivoque avec les formes différentielles, quadratiques et régulières de  $R$ .*

Nous rappellerons brièvement la démonstration de ce théorème et nous le généraliserons ensuite pour  $p > 1$ .

Nous remercions M. le Prof. GEORGES DE RHAM pour les précieuses indications données.

1. Considérons le cas  $p = 1$ . Au système  $u = (u_1, u_2)$  on peut associer la fonction analytique

$$h = \frac{u_1}{u_2}$$

qui a les propriétés suivantes :

a) Par prolongement analytique, la fonction  $h$  subit une transformation homographique.

b) Les dérivées de  $h$  et  $1/h$  ne s'annulent en aucun point de  $R$ ; donc  $h$  n'a pas d'autres singularités que des pôles simples.

Sur toute surface  $R$  on peut trouver une telle fonction. Par exemple, on peut considérer la fonction  $w$  qui fournit la représentation conforme de la surface universelle de recouvrement  $\tilde{R}$  de  $R$ , sur le cercle unité  $|w| < 1$  ou sur le plan  $w$ , complété ou non par le point à l'infini, suivant que  $R$  est du type hyperbolique, elliptique ou parabolique.

Supposons qu'on ait deux fonctions  $h, k$  satisfaisant aux conditions a), b). Soit  $q$  un point de  $R$  et  $\Delta$  un domaine simplement connexe contenant  $q$ . Les déterminations  $h_i, k_i$  des fonctions  $h, k$  dans  $\Delta$  se déduisent de deux déterminations particulières,  $h_0, k_0$ , par des transformations homographiques

$$h_i = \frac{a_i h_0 + b_i}{c_i h_0 + d_i}, \quad k_i = \frac{\alpha_i k_0 + \beta_i}{\gamma_i k_0 + \delta_i}, \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{3}$$

$a_i, b_i, c_i, d_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  étant des constantes complexes à déterminants  $a_i d_i - b_i c_i, \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i$  non nuls. On peut couvrir la surface  $R$  par une famille de domaines  $\Delta$ , de manière que chacune des déterminations  $h_i, k_i$  puisse être prise comme coordonnée complexe dans tout  $\Delta$ . Pour toute paire d'indices  $i, j$  on peut considérer le schwarzien

$$\{h_i\}_{k_j} = \frac{d^2}{dk_j^2} \left( \log \frac{dh_i}{dk_j} \right) - \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dk_j} \left( \log \frac{dh_i}{dk_j} \right) \right]^2. \tag{4}$$

L'expression (4) ne dépend pas de la détermination  $h_i$  de  $h$ ; on peut donc la désigner par  $\{h\}_{k_j}$ . En formant le schwarzien de  $h$  par rapport à une autre détermination  $k_l$  de  $k$ , on obtient la relation de CAYLEY [2, p. 57]

$$\{h\}_{k_l} = \left( \frac{dk_j}{dk_l} \right)^2 [\{h\}_{k_j} - \{k_l\}_{k_j}].$$

Mais en vertu de (3) on a  $\{k_i\}_{k_j} = 0$ , donc

$$\{h\}_{k_i} dk_i^2 = \{h\}_{k_j} dk_j^2.$$

Il en résulte qu'aux fonctions  $h, k$  on peut associer une forme différentielle quadratique

$$\omega_2 = \{h\}_k dk^2 = - \{k\}_h dh^2 \quad (5)$$

qui ne dépend pas des déterminations choisies pour  $h, k$ ; c'est donc une forme uniforme sur la surface  $R$  et en tenant compte de la propriété de régularité b), on montre facilement que la forme (5) est partout régulière.

En fixant la fonction  $k$ , on en déduit qu'à toute fonction  $h$  on peut associer une forme différentielle, quadratique et régulière  $\omega_2$  et cette forme  $\omega_2$  détermine la fonction  $h$  à une homographie près.

En tenant compte de la définition des structures homographiques donnée dans l'Introduction, on peut énoncer le théorème suivant:

*Les structures homographiques d'ordre 1 d'une surface de RIEMANN sont en correspondance biunivoque avec les formes différentielles, quadratiques et régulières de cette surface.*

2. Considérons maintenant le cas  $p > 1$ . Associons au système  $u = (u_1, \dots, u_{p+1})$  satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3°, l'équation différentielle, linéaire et homogène, d'ordre  $p + 1$ , ayant les fonctions  $u_i$  comme solutions linéairement indépendantes:

$$\begin{vmatrix} \theta^{(p+1)} & \dots & \theta' & \theta \\ u_1^{(p+1)} & \dots & u_1' & u_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{p+1}^{(p+1)} & \dots & u_{p+1}' & u_{p+1} \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Cette équation est déterminée dans chaque domaine simplement connexe  $\Delta$  de  $R$ , dès qu'on connaît la détermination du système  $u$  et la coordonnée complexe  $z$ . Ecrivons l'équation (6) sous la forme

$$\theta^{(p+1)} + \binom{p+1}{1} q_1 \theta^{(p)} + \dots + \binom{p+1}{p} q_p \theta' + q_{p+1} \theta = 0; \quad (7)$$

les coefficients  $q_1, \dots, q_{p+1}$  sont des fonctions holomorphes dans le domaine  $\Delta$ .

Les invariants de l'équation (7), par rapport aux transformations du paramètre  $z$  et par rapport aux transformations

$$\theta = \lambda \bar{\theta} \quad (\lambda = \text{fonction holomorphe dans } \Delta)$$

sont évidemment des invariants du système  $u$  et même des systèmes équivalents à  $u$ . De plus, la donnée de l'équation (7) nous permet de déterminer le système  $u$  à une transformation (1) près.

Donc l'étude des structures homographiques de  $R$  se réduit à l'étude des invariants des équations (7) par rapport aux transformations

$$\bar{z} = \bar{z}(z), \quad \theta = \lambda \bar{\theta}. \tag{8}$$

Cette dernière étude a été faite par LAGUERRE et FORSYGHT [2] et nous allons appliquer leurs résultats.

On sait que dans tout domaine  $\Delta$  de  $R$  on peut trouver une coordonnée  $\bar{z} = h$  et une fonction  $\lambda$  telles que l'équation (7) se transforme en une équation ayant  $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 0$ . Les fonctions  $h, \lambda$  sont données par les équations [2, p. 26]

$$\begin{aligned} \{h\}_z &= \frac{\sigma}{p+2} (q_2 - q_1^2 - q_1'), \\ \lambda &= \left(\frac{dh}{dz}\right)^{-\frac{p}{2}} e^{-\int q_1 dz}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la coordonnée  $h$  est déterminée à une homographie près :

$$\bar{h} = \frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta} \tag{9}$$

et pour une telle transformation,  $\lambda$  est donnée par

$$\lambda = (\gamma h + \delta)^p. \tag{10}$$

Les coordonnées  $h$  définissent donc une structure homographique d'ordre 1 sur  $R$ .

Nous avons donc un premier résultat :

*A toute structure homographique  $H$  d'ordre  $p$  on peut associer une structure d'ordre 1. On peut donc associer à  $H$  une forme différentielle quadratique  $\omega_2$ .*

Supposons qu'on a choisi dans chaque domaine simplement connexe  $\Delta$  de  $R$ , comme coordonnée, une détermination d'une des fonctions  $h$  associées à la structure  $H$ . Cette structure sera définie, dans chaque  $\Delta$ , par une équation différentielle

$$\theta^{(p+1)} + \binom{p+1}{3} q_3 \theta^{p-2} + \dots + q_{p+1} \theta = 0. \tag{11}$$

La théorie de LAGUERRE et FORSYGHT nous donne les invariants de l'équation (11) par rapport aux transformations (9), (10) : pour chaque  $m (3 \leq m \leq p+1)$  on peut construire l'expression [2, p. 32]

$$\omega_m = \left[ \sum_{s=0}^{m-3} (-1)^s \frac{(m-2)! m! (2m-s-2)!}{(m-s-1)! (m-s)! (2m-3)! s!} q_{m-s}^{(s)} \right] dh^m, \tag{12}$$

qui est un invariant par rapport aux transformations (9), (10), donc

Donc: 
$$\bar{\omega}_m = \omega_m, (m = 3, \dots, p + 1).$$

*Etant donnée une structure homographique  $H$  d'ordre  $p$  sur une surface de RIEMANN  $R$ , on peut lui associer  $p$  formes différentielles régulières  $\omega_2, \dots, \omega_{p+1}$  d'ordres  $2, \dots, p + 1$ .*

On sait que les invariants  $\omega_2, \dots, \omega_{p+1}$  définissent complètement l'équation différentielle (7), car la connaissance de  $\omega_2$  nous permet de réduire l'équation (7) à la forme (11), dont les coefficients  $q_3, \dots, q_{p+1}$  peuvent être déduits des formules (12).

Donc:

*Les structures homographiques d'ordre  $p$  d'une surface  $R$  sont en correspondance biunivoque avec les systèmes  $(\omega_2, \dots, \omega_{p+1})$  de  $p$  formes différentielles, régulières d'ordres  $2, 3, \dots, p + 1$  de  $R$ .*

4. Si nous considérons des systèmes  $u$  satisfaisant seulement aux conditions 1°, 3°, alors les zéros du wronskien (2) seront des pôles d'ordres  $m$  pour les formes  $\omega_m$ .

Supposons qu'on a par exemple une surface  $R$  fermée et soit  $C$  une courbe algébrique plane ayant  $R$  pour type conforme. Si  $u_1, u_2, u_3$  sont des coordonnées homogènes d'un point de  $C$ , alors  $u = (u_1, u_2, u_3)$  est un système qui satisfait aux conditions 1°, 3°, mais le wronskien (2) s'annule aux points d'inflexion et de rebroussement de  $C$ . Si le genre de  $C$  n'est pas nul, alors ce système ne peut jamais satisfaire à la condition 2°, car une courbe de genre  $g \neq 0$  a au moins un point d'inflexion ou un point de rebroussement.

5. Supposons la surface  $R$  fermée et de genre  $g > 1$ . Soit  $A$  une différentielle abélienne de première espèce de  $R$ . On peut représenter toute forme différentielle, régulière  $\omega_m$ , d'ordre  $m$ , sous la forme

$$\omega_m = \varphi_m A^m,$$

où  $\varphi_m$  est une fonction rationnelle sur  $R$ , ayant des pôles d'ordre  $m$  au plus dans les  $2(g - 1)$  zéros de  $A$ . D'après le théorème de RIEMANN-ROCH, la fonction  $\varphi_m$  dépend de

$$2(g - 1)m - g + 1 = (2m - 1)(g - 1)$$

constantes complexes arbitraires.

*Donc les structures homographiques  $H$  d'ordre  $p$  d'une surface fermée de genre  $g > 1$  dépendent de*

$$(g - 1) \sum_{m=2}^{p+1} (2m - 1) = (p^2 + 2p)(g - 1)$$

*constantes complexes arbitraires.*

Pour  $g = 1$ , les fonctions  $\varphi_m$  doivent être des constantes, donc les structures  $H$  dépendent de  $p$  constantes arbitraires.

Pour  $g = 0$ , on n'a pas d'autres formes  $\omega_m$  régulières que celles identiquement nulles. Dans le cas  $\omega_m = 0$ , l'équation (11) s'écrit

$$\theta^{(p+1)} = 0$$

et possède les solutions linéairement indépendantes  $1, h, h^2, \dots, h^p$ ; ces fonctions sont uniformes sur  $R$  et définissent une application de  $R$  dans l'espace projectif complexe à  $p + 1$  dimensions, l'image de  $R$  étant la courbe normale bien connue.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. TELEMAN, *O clasă de funcții multiforme pe o suprafață riemanniană*. Studii și Cercetări Matematice, Nr. 1-2, 1957.
- [2] E. J. WILCZYNSKI, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*. Leipzig 1906.

(Reçu le 25 juin 1958)