Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten.

Autor(en): **Frei, Margrit**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **35 (1961)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-27342

Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten

von Margrit Frei, Zürich

Einleitung

Jede Lösung $w_0 (\not\equiv 0)$ einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung (abgekürzt DGl.) n-ter Ordnung

$$w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + \dots\dots + a_1 \cdot w' + a_0 \cdot w = 0 \tag{1}$$

läßt sich aus n linear-unabhängigen Integralen von (1): $w_1, \dots, w_n$ superponieren:

$$w_0 = c_1 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2 + \dots\dots + c_n \cdot w_n \,, \tag{2}$$

wobei die c_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ konstant und nicht sämtliche 0 sind. Die n Funktionen bilden ein Fundamentalsystem der DGl. (1).

Im folgenden setzen wir voraus, daß sämtliche Koeffizienten der DGl. (1) *ganze* Funktionen sind. Dann sind auch ihre Lösungen *ganz*.

Wenn die Koeffizienten von (1) *Polynome* oder konstant sind und mindestens einer von ihnen $\not\equiv 0$, so ist nach den Untersuchungen von Wiman, Valiron und Wittich bekannt, daß das allgemeine Integral von (1) eine ganze *transzendente* Funktion vom Mitteltypus einer *endlichen* Wachstumsordnung[1] $\varrho \geq 1$ ist. Mindestens *eine* der Funktionen eines Fundamentalsystems von (1) ist also eine ganze transzendente Funktion der W.O. ϱ. Doch können Funktionen von schwächerem Wachstum, insbesondere Polynome, als partikuläre Lösungen auftreten, jedoch höchstens $n - 1$ linear-unabhängige.

Unsere Untersuchungen werden zeigen, daß ein *Analogon* vorliegt, wenn als Koeffizienten von (1) auch *transzendente* Funktionen zugelassen werden: Die allgemeine Lösung von (1) ist nämlich eine ganze Funktion *unendlicher* W.O., wenn wenigstens einer der Koeffizienten transzendent ist. Funktionen *endlicher* W.O. können aber als partikuläre Integrale auftreten, das heißt von den n Funktionen eines Fundamentalsystems der DGl. (1) ist mindestens 1 von unendlicher W.O., während höchstens $n - 1$ von endlicher W.O. sein können.

Das ist unser wichtigstes Resultat. Dabei macht aber der Hauptsatz (§ 2) noch eine genauere Aussage über die Höchstzahl möglicher partikulärer Integrale endlicher W.O.

---

[1]) Um die Begriffe «Ordnung einer Differentialgleichung» und «Ordnung einer meromorphen Funktion» auseinanderzuhalten, werde ich von jetzt an die Ordnung einer meromorphen Funktion als «Wachstumsordnung» bezeichnen, abgekürzt W.O.

Wenn wir nach einer schärferen Abschätzung für das Wachstum der allgemeinen Lösung der DGl. (1) mit mindestens 1 transzendenten Koeffizienten fragen, zeigt sich, daß die Analogie zum Fall der linearen DGl. mit Polynomen bzw. Konstanten als Koeffizienten noch tiefer geht. Dort sind nämlich die Lösungen nach VALIRON [1] von «vollkommen *regelmäßigem* Wachstum», entsprechend den regelmäßig wachsenden Koeffizienten.

In unserm Fall aber – besonders wenn wir als transzendente Koeffizienten nur Funktionen von endlicher W.O. $\varrho \geq 0$ zulassen – zeigt sich, daß die allgemeine Lösung eine Funktion ist, die exponentiell-iteriert denjenigen Koeffizienten überlagert ist, die für diese $r > r_0$ am stärksten wachsen. Sie ist also quasi vom «Mitteltypus» des jeweils stärksten Koeffizienten. Insbesondere heißt das: Die allgemeine Lösung einer DGl. (1) mit mindestens 1 transzendenten Koeffizienten ist nicht nur von unendlicher W.O., sondern sogar von «regelmäßig unendlicher» W.O.

Unser verschärfter Hauptsatz (§ 3) enthält Bedingungen für die Existenz partikulärer Integrale von schwächerem Wachstum als die allgemeine Lösung. Sie sind aber nur notwendig, nicht hinreichend. Zwar können wir Differentialgleichungen konstruieren, welche die nach diesem Satz *mögliche* Höchstzahl solcher Integrale auch realisieren, aber an andern Beispielen wird es wahrscheinlich, daß eine DGl. (1) mit transzendenten Koeffizienten nur in Ausnahmefällen partikuläre Integrale besitzt, die das Wachstum der allgemeinen Lösung nicht erreichen, auch wenn solche nach unserm Satz zugelassen wären.

Insbesondere besitzt also eine DGl. (1) mit transzendenten Koeffizienten nur selten partikuläre Integrale endlicher W.O.

Einen Teil meiner Resultate habe ich schon 1953 ohne Beweis in den «Comptes rendus» veröffentlicht (Band 236, S. 38–40).

Die Anregung zu diesem interessanten Thema verdanke ich Herrn Prof. SAXER. Er und Herr Prof. PFLUGER haben durch ihr wohlwollendes Interesse meine Arbeit gefördert. Beiden bin ich zu großem Dank verpflichtet.

§ 1. Obere Schranken für das Anwachsen der Lösungen der DGl. (1)

Methode von WIMAN nach den Untersuchungen von WIMAN [1], [2], VALIRON [1], WITTICH [1], [2], [3], [4] und POLYA-SZEGÖ [1].

Es sei $w = g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \cdot z^k$ ganz transzendent (g.tr.). Da für ein festes r die Glieder $|b_j| \cdot r^j$ bei $j \to \infty$ gegen Null streben, gibt es unter diesen Gliedern mindestens 1 größtes. Falls es mehrere gibt, wird dasjenige mit dem größten Index $j = \nu = \nu(r)$ ausgewählt. $\nu(r)$ heißt nach SAXER [1] der *Zentralindex*. $m(r) = |b_{\nu(r)} r^{\nu(r)}|$ das *Maximalglied*.

Zwischen $M(r, g) = M(r) = \operatorname*{Max}_{|z|=r} |g(z)|$ und $m(r)$ bestehen die Ungleichungen

$$\log m(r) < \log M(r) \tag{1.1}$$

für alle r, und andererseits bei beliebig kleinem, aber festem $\varepsilon > 0$

$$\log M(r) < (1 + \varepsilon) \log m(r) \tag{1.2}$$

für alle r außerhalb einer Menge von endlichem log. Maß.

Wir bezeichnen mit ζ einen Punkt auf dem Kreis $|z| = r$, wo $|w|$ sein Maximum erreicht. Dort gilt für jedes $\delta > 0$ und alle r außerhalb einer r-Menge von endlichem log. Maß

$$w^{(j)}(\zeta) = [\nu(r)/\zeta]^j \cdot w(\zeta) \cdot (1 + \eta_j(\zeta)) \tag{1.3}$$

mit

$$|\eta_j| = O(\nu^{-1/4+\delta}), \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

Ist $b_0 \neq 0$, so gilt

$$\log m(r) - \log |b_0| = \int_0^r \nu(t)/t \cdot dt . \tag{1.5}$$

Erfüllt nun w die DGl. (1), so folgt aus (1.3) die «charakteristische Gleichung» von Wiman

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(\zeta) \cdot [\nu(r)/\zeta]^j \cdot [1 + \eta_j(\zeta)] = 0 , \tag{1.6}$$

worin $a_n(z) \equiv 1$ gesetzt wird.

Wenn w eine transzendente Funktion ist, so ist nach Def. $\nu(r)$ unbeschränkt, also wegen (1.4)

$$\lim_{\zeta=\infty} \eta_j(\zeta) = 0 . \tag{1.7}$$

Es gilt also für jedes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$(\nu/r)^n \cdot (1 - \varepsilon) \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j(\zeta)| \cdot (\nu/r)^j (1 + \varepsilon_j), \quad \text{mit} \quad \varepsilon_j(r) = |\eta_j(\zeta)|, \quad \text{das heißt}$$

$$(\nu/r)^n \leq (1 + \varepsilon) \sum_{j=0}^{n-1} |a_j(\zeta)| \cdot [\nu(r)/r]^j \tag{1.8}$$

außerhalb einer Menge von endlichem log. Maß.

Für ν/r gibt es also zwei Möglichkeiten: Entweder haben wir als

$$1.\ \text{Fall:} \quad \nu/r < 1 \tag{1.9}$$

oder, wenn wir annehmen, daß $\nu/r \geq 1$, so folgt aus (1.8) als

$$2.\ \text{Fall:} \quad \nu/r \leq (1 + \varepsilon) \sum_{j=0}^{n-1} |a_j(\zeta)| .$$

Daraus schließen wir, indem wir die Maximalbeträge der Koeffizientenfunktionen $a_j(z)$ auf $|z| = r = |\zeta|$ mit $A_j(r)$ bezeichnen,

$$\nu/r \leq (1+\varepsilon)\cdot\sum_{j=0}^{n-1} A_j(r).$$

Also gilt im 2. Fall für alle r außerhalb einer Menge von endlichem log. Maß

$$\nu/r \leq (1+\varepsilon)\cdot n\cdot \operatorname*{Max}_j A_j(r)\,. \tag{1.10}$$

Wir untersuchen nur solche Differentialgleichungen, in welchen mindestens einer der Koeffizienten transzendent ist. D. f. $\lim\limits_{r=\infty} [\operatorname*{Max}\limits_j A_j(r)] = \infty$. Somit können wir die beiden Fälle (1.9) und (1.10) zusammenfassen:

Ist w eine Lösung der DGl. (1), ν ihr Zentralindex und $A_j(r) = \operatorname*{Max}\limits_{0\leq\varphi<2\pi} |a_j(re^{i\varphi})|$, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und alle r außerhalb einer von ε abhängigen Menge von endl. log. Maß

$$\nu(r)/r \leq (1+\varepsilon)\cdot n\cdot \operatorname*{Max}_j A_j(r)\,. \tag{1.11}$$

Eine für *alle* r gültige Abschätzung folgt sofort aus dem monotonen Wachstum der Funktion $\nu(r)$. Ist (r', r'') ein notwendigerweise offenes Ausnahmeintervall und $r' < r < r''$, so gilt wegen $\nu(r) \leq \nu(r'')$:

$$\nu(r)/r \leq \nu(r'')/r < \nu(r'')/r''\cdot r''/r'\,. \tag{1.12}$$

Die Ausnahmemenge ist aber von endlichem log. Maß, also ist

$$\lim_{r=\infty} r''/r \leq \lim_{r=\infty} r''/r' = 1\,. \tag{1.13}$$

Das heißt, es gibt eine Funktion $\eta(r)$ mit $\lim\limits_{r=\infty} \dfrac{\eta(r)}{r} = 0$, so daß für *alle* r gilt

$$\nu(r)/r \leq n\cdot \operatorname*{Max}_j A_j[r+\eta(r)]\cdot\left[1+\frac{\eta(r)}{r}\right]. \tag{1.14}$$

Nach (1.4) gilt daher

$$\begin{aligned} \log m(r) &\leq \int_0^r n\cdot \operatorname{Max}[A_j(t')]\cdot \frac{t'}{t}\,dt + O(1) \\ &\leq n\cdot \operatorname{Max}[A_j(r')]\cdot r'\cdot \log r\,, \quad \text{d. f. nach (1.2)} \end{aligned} \tag{1.15}$$

für alle r außerhalb einer Menge von endlichem log. Maß

$$\log M(r) \leq n\cdot \operatorname{Max}[A_j(r')]\cdot \frac{r'}{r}\cdot r\cdot \log r\,, \tag{1.15'}$$

wobei $r' > r$, aber $\lim\limits_{r=\infty} \frac{r'}{r} = 1$. $M(r)$ und $A_j(r)$ wachsen mit r, also haben wir für *alle* r, weil (1.15′) nur auf einer Menge von endlichem log. Maß ungültig sein kann, mit $r'' > r'$, aber $\lim\limits_{r=\infty} \frac{r''}{r} = 1$,

$$\log M(r) \leq n \cdot \operatorname{Max}\,[A_j(r'')] \cdot \frac{r''}{r} \cdot r \cdot \log r'' . \tag{1.16}$$

Nach Voraussetzung ist $\operatorname{Max}\,[A_j(r)]$ der Max. Betrag einer transzendenten Funktion, also $r = o\,[A_j(r)]$. (1.16) bedeutet also für alle r, mit $\varepsilon = \varepsilon(r) \to 0$,

$$\log_2 M(r) \leq (1+\varepsilon) \cdot \log \operatorname*{Max}_j\,[A_j(r'')] \qquad r'' > r, \quad \text{aber} \quad \frac{r''}{r} \to 1 . \tag{1.16′}$$

Was heißt (1.16′)? – Wir unterscheiden:

1. Sämtliche Koeffizienten der DGl. (1) sind von *endlicher* W.O. (davon nach Voraussetzung mindestens 1 transzendent).

Dann sind $A_j(r'')$ und $A_j(r)$ von derselben Ordnung, demselben Typus und in derselben Klasse.

Kommen unter den Koeffizienten Funktionen positiver Ordnung vor, so existiert nach VALIRON [1] eine *präzisierte* Ordnung $\varrho_j(r)$, so daß für jene Funktionen gilt

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log A_j(r)}{r^{\varrho_j(r)}} = 1 \qquad \text{mit} \qquad r^{\varrho_j(r)} \leq \log A_j(r)$$

$\varrho(r)$ ist stetig, und es gilt $\varrho'(r) \cdot r \cdot \log r \to 0$. Daher strebt $\frac{(r'')^{\varrho(r'')}}{(r)^{\varrho(r)}}$ gleichmäßig gegen 1, wenn $\frac{r''}{r} \to 1$ und r gegen ∞ (Beweis nach M. L. CARTWRIGHT [1]). Damit gilt für *alle* r

$$\log_2 M(r) \leq (1+\varepsilon) \cdot \log \operatorname*{Max}_j\,[A_j(r)] \qquad \varepsilon = \varepsilon(r) \to 0, \quad \text{wenn} \quad r \to \infty . \tag{1.16″}$$

Das ergibt den

Satz: (1.17) Der 2. Logarithmus des Betrages einer Lösung der DGl. (1) erreicht höchstens den Logarithmus des größten Betrages unter den Koeffizienten, wenn diese von endlicher, positiver W.O. sind.

Das sind die gewünschten *oberen* Schranken.

Eine genauere Aussage ist dann möglich, wenn die Max. Beträge eines Koeffizienten der DGl. (1), zum Beispiel von a_h, alle andern majorisieren. Dann gewinnen wir nämlich nach RÉMOUNDOS [1] die schärfere Abschätzung (statt 1.14)

$$\frac{\nu}{r} \leq \text{konst.} \sqrt[n-h]{A_h(r')} \qquad \frac{r'}{r} \to 1\,, \quad \text{daher} \tag{1.14'}$$

$$\log_2 M(r) \leq (1+\varepsilon) \cdot \frac{\log A_h(r)}{n-h} \qquad \text{für} \quad r > r_0\,, \quad \varepsilon \to 0\,. \tag{1.17'}$$

2. Als Koeffizienten der DGl. (1) sind auch ganze Funktionen von *unendlicher* W.O. zugelassen.

MAILLET unterscheidet nach BLUMENTHAL [1] die Funktionen unendlicher Ordnung in solche

a) *transfiniter* Ordnung und

b) *nicht-transfiniter* Ordnung.

Nach Definition ist das Wachstum einer Funktion nicht-transfiniter Ordnung vergleichbar mit dem Wachstum einer endlich oft exponentiell-iterierten ganzen, transzendenten Funktion endlicher Ordnung $\varrho \geq 0$ (mindestens 1-mal iteriert, damit sie von unendlicher Ordnung wird).

Funktionen, deren Wachstum nicht dieser Beschränkung unterliegt, heißen transfinit.

Falls unter den Koeffizienten der DGl. (1) Funktionen von transfiniter Ordnung vorkommen, so heißt (1.16′):

Lösungen von (1) können *transfinit* sein.

Wenn hingegen alle Koeffizienten der DGl. (1) nicht-transfinit sind, so kann das Anwachsen der Koeffizienten stärksten Wachstums verglichen werden mit einer k-mal exp.-iterierten g. tr. Funktion endlicher Ordnung, das heißt

$$\log_k \operatorname{Max}\,[A_j(r)] \text{ ist von endlicher W.O.} \quad (k \geq 1)\,.$$

Dann setzen wir statt (1.16′)

$$\log_{k+1} M(r) \leq (1+\varepsilon)\cdot\log_k \operatorname*{Max}_{0\leq j\leq n-1}\,[A_j(r'')], \quad \text{mit} \quad \frac{r''}{r} \to 1\,. \tag{1.16''}$$

Jetzt sind $\log_k A_j(r)$ und $\log_k A_j(r'')$ von derselben endlichen Ordnung, demselben Typus und in derselben Klasse. (1.16′) ergibt also den

Satz: (1.17″) Der $k+1$-te Logarithmus des Betrages einer Lösung der DGl. (1) ist höchstens von derselben Ordnung, demselben Typus und in derselben Klasse wie der k-te Logarithmus der Koeffizientenbeträge, die am größten sind.

(1.18) Im folgenden wollen wir solche Lösungen der DGl. (1), deren Wachstum nicht wesentlich schwächer ist, als nach (1.17) bzw. (1.17″) *möglich* ist, Integrale von *normalem* Wachstum nennen. Lösungen, die dieses Wachstum nicht erreichen, sollen *subnormal* heißen.

§ 2. Hauptresultat

(2.1) Die allgemeine Lösung einer linearen DGl. mit ganzen transzendenten Koeffizienten ist von *unendlicher* Ordnung.

Wir werden dieses Resultat mit einer Methode gewinnen, die beiläufig eine Aussage über die mögliche Höchstzahl partikulärer Integrale endlicher W.O. gestattet. Ausführlich lautet der

Hauptsatz: (2.2) In der Differentialgleichung (1) sei wenigstens *einer* der Koeffizienten $a_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, *transzendent.* Dann ist ihre allgemeine Lösung von *unendlicher* W.O. Ist in der Folge $a_0(z)$, $a_1(z)$, $\ldots, a_{n-1}(z)$ der Koeffizient $a_j(z)$ der *letzte* transzendente Koeffizient (sind also alle $a_k(z)$, $k \geq j+1$, Polynome), so gibt es höchstens j linear-unabhängige partikuläre Integrale *endlicher* W.O.

Für den Beweis benützen wir Resultate aus der Werteverteilungslehre von R. Nevanlinna [1], [2] und Wittich [4].

Wir formulieren nur die im folgenden verwendeten Spezialfälle:

Sei $w(z)$ eine meromorphe Funktion. Wir definieren als ihre *Schmiegungsfunktion* (abgekürzt S.Fkt.) an den Wert ∞ den Mittelwert von $\log^+|w|$ auf der Peripherie des Kreises $|z| = r$:

$$m(r, w) = m(r, w, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(r \cdot e^{i\varphi})| \cdot d\varphi \tag{2.3}$$

und als ihre *Anzahl*funktion der Pole das Integral über die Dichte der Pole [$n(t, \infty)$ = Anzahl der Pole im Kreis $z \leq t$] im Kreis $|t| \leq r$, das heißt

$$N(r, w) = N(r, w, \infty) = \int_0^r \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} \cdot dt + n(0, \infty) \cdot \log r \,. \tag{2.4}$$

Die *charakteristische*[2]) Funktion von $w : T(r)$ ist definiert als

$$T(r, w) = T(r) = m(r, w) + N(r, w) \tag{2.5}$$

$$T(r) = m(r, w)\,, \quad \text{wenn } w \text{ ganz.} \tag{2.5'}$$

Wichtige Eigenschaften der charakteristischen Funktion

$w_i(z) \neq$ konst., meromorph, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$T(r) \text{ wächst mit } r \text{ und ist eine konvexe Funktion von } \log r \tag{2.6}$$

$$T(r, w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots\ldots \cdot w_n) \leq \sum_{k=1}^{n} T(r, w_k) \tag{2.7}$$

---

[2]) Begründung dieser Bezeichnung durch den 1. Hauptsatz, den wir sonst nicht benützen.

$$T(r, w_1 + w_2 + \ldots + w_n) \leq \sum_{k=1}^{n} T(r, w_k) + \log n \tag{2.8}$$

$$T(r, w) = T(r, 1/w) + O(1) \tag{2.9}$$

$$m(r, w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \ldots \cdot w_n) \leq \sum_{k=1}^{n} m(r, w_k) \tag{2.7'}$$

$$m(r, w_1 + w_2 + \ldots + w_n) \leq \sum_{k=1}^{n} m(r, w_k) + \log n\,. \tag{2.8'}$$

Hilfssatz über die logarithmische Ableitung

Wenn $w(z)$ meromorph ist, so gilt nach NEVANLINNA [2]

$$m(r, w'/w) < 3 \cdot \log^+ T(r) + \tfrac{3}{2} \cdot \lambda \cdot \log^+ r + O(1) \tag{2.10}$$

außerhalb einer Menge Δr von r-Werten, auf welchen die Variation von r^λ/λ [3]) $(\lambda \geq 0)$ beschränkt ist.

Für Funktionen *endlicher* Ordnung ist (2.10) *ohne* Ausnahmemenge erfüllt, also

$$m(r, w'/w) = O(\log r) \quad \text{für } \textit{jedes } r\,. \tag{2.11}$$

Zusammenhang zwischen $M(r)$ und $T(r)$

Für jede ganze transzendente Funktion ist

$$T(r) \leq \log M(r) \leq \frac{R + r}{R - r} \cdot T(R) \qquad r < R \tag{2.12}$$

erfüllt und bedeutet für ganze Funktionen endlicher Ordnung: Die Größen $T(r)$ und $\log M(r)$ sind von derselben Ordnung, demselben Typus und in derselben Klasse.

Auf diesen Sätzen beruht der

Beweis des Hauptsatzes: Sei $a_0(z)$ der einzige transzendente Koeffizient der DGl. (1). Dann isolieren wir ihn:

$$-a_0(z) = \frac{w^{(n)}}{w} + \frac{w^{(n-1)}}{w} a_{n-1}(z) + \cdots\cdots + \frac{w'}{w} a_1(z) \tag{2.13}$$

und gehen über zur Schmiegungsfunktion (für den Wert ∞) auf $|z| = r$. Dadurch bekommen wir – wegen den bekannten Eigenschaften der Schmiegungsfunktion: (2.7′) und (2.8′) – die Ungleichungen

[3]) d.h. $\int_{\Delta r} r^{\lambda-1} dr$.

$$m(r, a_0[r \cdot e^{i\varphi}]) \leq \sum_{k=1}^{n} m\left(r, a_k[r \cdot e^{i\varphi}]\,\frac{w^{(k)}}{w}\right), \quad \text{wo} \quad a_n(z) = 1 \tag{2.14}$$

und

$$m(r, a_0) \leq \sum_{k=1}^{n} m\left(r, \frac{w^{(k)}}{w}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} m(r, a_k) + O(1)\,. \tag{2.15}$$

In diesen Ungleichungen ist wegen (2.5′) $m(r, a_0) = T(r, a_0)$, denn $a_0(z)$ ist *ganz*. Die S.Fkt. eines Polynoms ist von der gleichen Größenordnung wie $\log r$, also gilt für das zweite Glied der rechten Seite von (2.15) die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n-1} m(r, a_k) = O(\log r) \quad \text{für} \quad r \to \infty \tag{2.16}$$

$\dfrac{w^{(k)}}{w}$ ist $\dfrac{w^{(k)}}{w^{(k-1)}} \cdot \dfrac{w^{(k-1)}}{w^{(k-2)}} \cdots \dfrac{w'''}{w''} \cdot \dfrac{w''}{w'} \cdot \dfrac{w'}{w}$ und führt daher zu

$$m\left(r, \frac{w^{(k)}}{w}\right) \leq \sum_{i=1}^{k} m\left(r, \frac{w^{(i)}}{w^{(i-1)}}\right).$$

Für eine meromorphe Funktion *endlicher* W.O. gilt somit nach dem Hilfssatz über die log. Ableitung (2.11)

$$m\left(r, \frac{w^{(k)}}{w}\right) = O(\log r)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

Nach (2.15), (2.16), (2.17) führt daher die Annahme, daß die DGl. (1) ein Integral von *endlicher* W.O. besitzt, auf die Abschätzung

$$T(r, a_0) = O(\log r)\,.$$

Dies ist aber im Widerspruch mit der Voraussetzung, daß $a_0(z)$ *transzendent* ist.

Die DGl. (1) besitzt also nur Lösungen unendlicher W.O., wenn a_0 ihr einziger transzendenter Koeffizient ist, in Übereinstimmung mit der Behauptung unseres Hauptsatzes.

Dieser Beweisgang, der sich vor allem auf die *Isolierung* des einzigen transzendenten Koeffizienten stützt, gab die Idee für das Vorgehen im allgemeinen Fall.

Eine DGl. (1) kann zwar partikuläre Integrale *endlicher* W.O. aufweisen, auch wenn nur ein *einziger* ihrer Koeffizienten transzendent ist, wie das Beispiel: $w'' + e^{-z} \cdot w' - w = 0$ zeigt. Diese DGl. besitzt nämlich in $w_0 = e^z + 1$ ein partikuläres Integral vom Mitteltypus erster Ordnung.

Aber nehmen wir nun an, daß in der Folge der Koeffizienten der DGl. (1): $a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots a_{n-1}$ $a_j(z)$ der *letzte* transzendente Koeffizient ist; das heißt, in der DGl. (1) seien

$$a_k(z) = \text{Polynome für } k > j \geq 1\,. \tag{2.18}$$

Dann ist die Existenz partikulärer Integrale von endlicher W.O. nicht mehr ausgeschlossen (vgl. Beispiel oben). Und hier können wir die transzendenten Koeffizienten ja auch nicht mehr isolieren wie oben und entsprechend schließen. Doch werden wir jetzt versuchen, die DGl. (1) umzuformen in eine solche DGl., wo die Funktion $a_j(z)$ im Koeffizienten der 0-ten Ableitung auftritt. Dann ist unter Umständen eine Isolierung des transzendenten Koeffizienten $a_j(z)$ wieder möglich. Eine solche Umformung gelingt mit der Methode der «Variation der Konstanten» von LAGRANGE nach KAMKE [1].

Wenn nämlich w_0 ein partikuläres Integral der DGl. (1) ist, so geht durch die Substitution

$$w = w_0 \cdot \frac{w}{w_0} = w_0 \cdot u \tag{2.19}$$

die DGl. (1) über in eine lineare DGl. $(n-1)$-ter Ordnung für u, in welcher der Koeffizient $a_0(z)$ nicht mehr explizit[4]) auftritt.

Als partikuläres Integral für die Substitution (2.19) zur 1. Umformung unserer DGl. (1) wählen wir aus einem Fundamentalsystem[5]) von (1): w_1, $w_2, w_3, \ldots, w_n$ eine Funktion von *endlicher* W.O., zum Beispiel w_1. Es sollen nämlich die ersten $j+1$ Funktionen des F.S., das heißt $w_1, w_2, \ldots$, w_{j+1} von *endlicher* W.O. sein (bei passender Numerierung[6]). Durch diese Substitution

$$w = w_1 \cdot \frac{w}{w_1} = w_1 \cdot u \tag{2.20}$$

in der DGl. (1) bekommen wir wegen

$$w^{(k)} = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \cdot w_1^{(m)} u^{(k-m)} \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.21}$$

für u folgende DGl.:

$$\begin{gathered} u^{(n)} \cdot w_1 + u^{(n-1)} \cdot \left[\binom{n}{1} w_1' + a_{n-1} w_1\right] + \cdots + u' \left[\binom{n}{n-1} \cdot w_1^{(n-1)} + \right. \\ \left. + a_{n-1} \cdot \binom{n-1}{n-2} \cdot w_1^{(n-2)} + \cdots + a_1 \cdot w_1\right] \\ + u\left[w_1^{(n)} + a_{n-1} \cdot w_1^{(n-1)} + \cdots + a_0 \cdot w_1\right] = 0\,. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Der Koeffizient von $u^{(n-k)} = b_{n-k}$ lautet für $k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$b_{n-k} = \sum_{i=0}^{k} \cdot \binom{n-i}{n-k} \cdot a_{n-i} \cdot w_1^{(k-i)} \qquad a_n = 1\,. \tag{2.23}$$

---

[4]) «Explizit» soll andeuten, daß er natürlich im partikulären Integral w_0, das zur Substitution (2.19) verwendet wurde, implizit noch vorhanden ist.

[5]) Abgekürzt: F.S.

[6]) b.p.N.

Da w_1 ein Integral von (1) ist, so verschwindet der Koeffizient von u. Der Koeffizient a_0 tritt damit in der DGl. (2.22) nicht mehr auf, und wir bekommen für $u' = y$ die lineare DGl. $(n - 1)$-ter Ordnung

$$y^{(n-1)} \cdot w_1 + y^{(n-2)} b_{n-1} + \dots\dots + y' b_2 + y \cdot b_1 = 0 \tag{2.24}$$

oder nach Division durch w_1

$$y^{(n-1)} + y^{(n-2)} a_{n-2,1} + \dots\dots + y' \cdot a_{1,1} + y \cdot a_{0,1} = 0\,, \tag{2.24'}$$

wo

$$a_{i,1} = \frac{b_{i+1}}{w_1} \qquad i = 0, 1, \dots\dots, n-2\,.$$

Das ist eine lineare DGl. $(n - 1)$-ter Ordnung mit meromorphen Funktionen als Koeffizienten. Insbesondere lautet der Koeffizient von y:

$$a_{0,1} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-k}{1} \frac{w_1^{(n-k-1)}}{w_1} a_{n-k} + a_1\,. \tag{2.25}$$

In den andern Koeffizienten von (2.24) kommen nach (2.23) nur noch die Funktionen $a_k (k \geq 2)$ vor neben den Quotienten $\dfrac{w_1^{(k)}}{w_1}$, die als Produkte von log. Ableitungen des Integrals w_1 und seiner Derivierten dargestellt werden können (vgl. S. 209 oben).

Da die DGl. (2.24′) aus der DGl. (1) durch die Substitutionen $w = w_1 \cdot \dfrac{w}{w_1} = w_1 \cdot u$ und $u' = y$ hervorgegangen ist und die Funktionen $w_2, w_3, \dots, w_n$ unabhängige Integrale von (1) sind, so sind auch die $(n - 1)$ meromorphen Funktionen

$$y_i = u_i' = \left(\frac{w_{i+1}}{w_1}\right)' \qquad i = 1, 2, \dots, n-1 \tag{2.26}$$

unabhängige Lösungen von (2.24) bzw. (2.24′).

Nach Voraussetzung über das F.S. von (1): $w_1, w_2, \dots, w_n$ sind die Funktionen $y_1, \dots\dots, y_j$ von endlicher W.O. Mit Hilfe von y_1 wiederholen wir den Reduktionsprozeß an der DGl. (2.24′). Im ganzen üben wir eine solche Reduktion j-mal hintereinander aus. Zur Substitution verwenden wir jeweils ein partikuläres Integral endlicher W.O. der betreffenden DGl.

Wenn das Resultat der $(s - 1)$-ten Reduktion, $s \leq j$, die DGl. von $(n - s + 1)$-ter Ordnung für die Funktion p:

$$p^{(n-s+1)} + a_{n-s,s-1} \cdot p^{(n-s)} + \dots\dots + a_{1,s-1} \cdot p' + a_{0,s-1} \cdot p = 0 \tag{2.27}$$

ist, dann bekommen wir durch die Substitution

$$p = p_1 \cdot \frac{p}{p_1} \qquad \left(\frac{p}{p_1}\right)' = q\,, \qquad p_1 = \text{part. Integral von (2.27)} \tag{2.28}$$

aus (2.27) die lineare DGl. $(n-s)$-ter Ordnung für q

$$q^{(n-s)} + a_{n-s-1,s} \cdot q^{(n-s-1)} + \ldots\ldots + a_{1,s} \cdot q' + a_{0,s} \cdot q = 0 \qquad (2.29)$$

als Resultat der s-ten Reduktion.

Analog zu (2.23) und (2.25) gilt dann zwischen den Koeffizienten der aufeinanderfolgenden Differentialgleichungen (2.27) und (2.29) die Beziehung

$$a_{n-s-k,s} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-s+1-i}{n-s+1-k} \cdot a_{n-s+1-i,s-1} \cdot \frac{p_1^{(k-i)}}{p_1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-s \qquad (2.30)$$

wobei $a_{n-s+1,s-1} = 1$ und p_1 ein partikuläres Integral endlicher W.O. von (2.27) ist.

Das heißt, der Koeffizient $a_{l,s}$ der l-ten Ableitung von q $(l = 0, 1, \ldots, n-s-1)$ ist eine Summe von Produkten aus log. Ableitungen des partikulären Integrals p_1 (bzw. seiner Derivierten) und Koeffizienten der DGl. (2.27): $a_{m,s}$, deren vordere Indizes $m \geq l+1$ sind. Außerdem gestattet (2.30) die Schreibung

$$a_{n-s-k,s} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-s+1-i}{n-s+1-k} \cdot a_{n-s+1-i,s-1} \cdot \frac{p_1^{(k-i)}}{p_1} + a_{n-s-k+1,s-1} \qquad (2.31)$$

das heißt, der Koeffizient $a_{l+1,s-1}$ kommt in $a_{l,s}$ *isoliert* vor. Wenn also durch j-malige Reduktion aus der DGl. (1) die DGl.

$$v^{(n-j)} + a_{n-j-1,j}\, v^{(n-j-1)} + \ldots\ldots + a_{1,j} \cdot v' + a_{0,j} \cdot v = 0 \qquad (2.32)$$

hervorgegangen ist, so können wir wegen (2.30) und (2.31) aus dem Koeffizientenschema (2.33) für den Koeffizienten $a_{0,j}$ ablesen:

Koeffizienten-Schema (2.33)

Ableitung	n	$(n-1)$	$\ldots$	$(n-j)$	$\ldots$	j	$(j-1)$	$\ldots$	1	0
DGl. (1)	1	a_{n-1}	$\to$	a_{n-j}	$\to$	$\boxed{a_j}$	a_{j-1}		a_1	a_0
1. Reduktion		1		$a_{n-j,1}$		$a_{j,1}$	$\boxed{a_{j-1,1}}$		$a_{1,1}$	$a_{0,1}$
$\vdots$								$\searrow$		
$(j-1)$. Reduktion				$a_{n-j,j-1}$					$\boxed{a_{1,j-1}}$	$a_{0,j-1}$
j-Reduktion				1					$a_{1,j}$	$\boxed{a_{0,j}}$

$$a_{0,j} = a_j - P_{0,j} \tag{2.34}$$

wobei $P_{0,j}$ ein Polynom in den $a_i, \frac{w_1^{(k)}}{w_1}, \ldots, \frac{p_1^{(m)}}{p_1}, \ldots, \frac{t_1^{(l)}}{t_1}$ ist, mit $i = j+1, \ldots, n-1$; $k = 1, 2, \ldots, n$; $m = 1, 2, \ldots, n - s + 1$. $w_1, \ldots, p_1, \ldots$ und t_1 sind partikuläre Integrale der DGl. (1) bzw. ihrer entsprechenden Reduktionen (w_1 ist ganz, die übrigen meromorph und gemäß Schema (2.33*) aus den $w_1, \ldots, w_j$ zu bestimmen).

Zusammenhang der Subst. Integrale mit dem F.S. von (1) (2.33*)

F.S. der DGl. (1)	w_1	w_2	w_3	$\ldots$	w_n
1. Subst. mit w_1					
F.S. der 1. Reduktion		$\left(\frac{w_2}{w_1}\right)'$	$\left(\frac{w_3}{w_1}\right)'$	$\ldots$	$\left(\frac{w_n}{w_1}\right)'$
2. Subst. mit $y_1 = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)'$					
F.S. der 2. Reduktion			$y_1^* = \left[\frac{\left(\frac{w_3}{w_1}\right)'}{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)'}\right]'$	$\ldots$	$\left[\frac{\left(\frac{w_n}{w_1}\right)'}{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)'}\right]'$
3. Subst. mit y_1^*					usw.

Die andern Koeffizienten $a_{l,j}$ $(l \geq 1)$ in (2.32) sind Polynome in denselben Unbestimmten wie $P_{l,j}$:

$$a_{l,j} = -P_{l,j}\,. \tag{2.35}$$

Setzt man für v die nach dem Schema (2.33*) aus den $w_1, \ldots, w_{j+1}$ zu bildende Funktion v_1 ein, so erhält man demnach aus (2.32) für a_j den Ausdruck:

$$a_j = \sum_{k=0}^{n-j} P_{k,j} \frac{v_1^{(k)}}{v_1} \tag{2.36}$$

wobei die $P_{k,j}$ Polynome in den $a_i, \cdot \frac{w_1^{(k)}}{w_1} \cdot, \cdot \frac{t_1^{(l)}}{t_1}$ (wie oben) sind.

Bei der Herleitung dieses Ausdrucks wurde lediglich verwendet, daß die $w_1, w_2, \ldots, w_{j+1}$ linear-unabhängige Lösungen der DGl. (1) sind. Es wird für das Folgende entscheidend sein, daß in den $P_{k,j}$ von den Koeffizienten a_i nur jene mit den Indizes $j+1, j+2, \ldots, n-1$ auftreten.

Nehmen wir nun entgegen den Voraussetzungen des Hauptsatzes an, daß die linear-unabhängigen Lösungen $w_1, w_2, \ldots, w_{j+1}$ von endlicher Ordnung und die Koeffizienten $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_{n-1}$ Polynome sind, so gilt nach (2.7′) und (2.8′)

$$m(r, P_{k,j}) = O(\log r) \quad \text{für alle } r \tag{2.37}$$

und

$$m\left(r, \frac{v_1^{(k)}}{v_1}\right) = O(\log r) \quad \text{für alle } r\,. \tag{2.38}$$

Also folgt aus (2.36) nach dem Übergang zur Schmiegungsfunktion (das ist charakteristische Funktion der ganzen Funktion a_j):

$$T(r, a_j) = O(\log r) \quad \text{für alle } r\,.$$

Dies *widerspricht* aber der Annahme, daß a_j eine transzendente Funktion ist.

Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

§ 3. Verschärfung des Hauptsatzes

Der Hauptsatz kann in zwei Richtungen verschärft werden:

Dort unterschieden wir bei der Betrachtung der *Koeffizienten* der DGl. (1) nur zwischen Polynomen und transzendenten Funktionen. Hier werden wir die transzendenten Koeffizienten noch untereinander nach ihrer Wachstumsstärke klassieren.

Damals interessierte uns bei den *Lösungen* der DGl. (1) nur die Frage, ob es Funktionen von endlicher oder unendlicher Ordnung seien. Jetzt werden wir auch das Wachstum der Lösungen *unendlicher* Ordnung genauer abschätzen können.

Wir werden folgende Verbesserungen gegenüber dem Hauptsatz finden:

Einerseits wird an Stelle des letzten transzendenten Koeffizienten der DGl. (1) in der Folge $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ der letzte Koeffizient von *stärkstem Wachstum* treten.

Andererseits erfahren wir über die allgemeine Lösung der DGl. (1) nicht nur, daß sie von unendlicher Ordnung ist, sondern genauer: Sie ist eine Funktion von nach (1.18) definiertem *normalem Wachstum*, und statt den im Hauptsatz zugelassenen part. Integralen endlicher Ordnung erhalten wir jetzt eine Aussage über die Höchstzahl unabhängiger *subnormaler* Lösungen.

Es sei $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ein Fundamentalsystem der DGl. (1). Wir setzen:

$$T(r, w_i) = T^i(r) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

und

$$\max_{1 \leq i \leq j+1} T^i(r) = T_j(r)\,. \tag{3.2}$$

Nun reduzieren wir die DGl. (1) nach dem in § 2 beschriebenen Verfahren j-mal. Als Substitutionsintegrale verwenden wir die nach Schema (2.33*) gebildeten part. Integrale: $y_1 = w_1, y_2 = (w_2/w_1)'$ usw. Diese sind also rat.

Kombinationen der ersten j Funktionen des obigen F.S., das heißt, von w_1, $w_2, \ldots, w_j$ und ihrer Ableitungen. Es gilt somit wegen (3.2) für jedes r

$$T(r, y_i) = O[T_j(r)] \qquad i = 1, 2, \ldots, j+1 \tag{3.3}$$

und nach (2.10) außerhalb einer r-Menge Δr, auf welcher die Variation von r^λ/λ $(\lambda \geq 0)$ beschränkt ist:

$$m(r, y_i^{(\nu)}/y_i) = O[\log r T_j(r)] \qquad \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \ldots\ldots \\ i = 1, 2, \ldots, j+1 \end{array} \tag{3.4}$$

(Ausnahmen sind möglich, da wir nicht voraussetzen, daß $w_1, \ldots w_{j+1}$ Fktn. endlicher W.O. sind).

Nach diesen Voraussetzungen besitzt die reduzierte DGl. (2.32) die Lösung y_{j+1}. Für sie ergibt sich aus (2.38) außerhalb Δr die Abschätzung

$$T(r, a_j) \leq O[\log r T_j(r)] + c \cdot \sum_{k=1}^{n-j-1} T(r, a_{j+k}); \tag{3.5}$$

denn nach (3.4) gelten außerhalb Δr

$$m(r, y_i^{(\nu)}/y_i) \leq O[\log r T_j(r)], \qquad \text{und wegen (2.36)}$$

$$m(r, a_{k,j}) \quad \leq c_1 \sum_{k=1}^{n-j-1} m(r, a_{j+k}) + O[\log r T_j(r)] \quad \text{und}$$

$$m\,[\text{Polyn. (2.35)}] \leq c_2 \sum_{k=1}^{n-j-1} m(r, a_{j+k}) + O[\log r T_j(r)]$$

(dabei sind c_1 und c_2, also auch c, Konstante, auf deren genaue Werte es hier nicht ankommt).

Bei der Diskussion von (3.5) unterscheiden wir 3 Fälle:

1. und wichtigster Fall:

(3.7) Sämtliche Koeffizienten der DGl. (1) sind von *endl.* W.O. und mindestens 1 davon transzendent.

2. Fall:

(3.7′) Mindestens 1 Koeffizient der DGl. (1) ist von *unendlicher* W.O., aber keiner transfinit.

3. Fall:

(3.7″) Mindestens 1 Koeffizient ist *transfinit*.

1. Hauptfall. Unter den Voraussetzungen (3.7) dürfen wir annehmen, daß $a_j(z)$ transzendent ist. Dann folgt aus (3.5), wenn wir setzen:

$$\operatorname*{Max}_{1\leq k\leq n-1-j} T(r, a_{k+j}) = T_M(r) \tag{3.8}$$

$$T(r, a_j) = O[\log T_j(r)] + O[T_M(r)] \tag{3.9}$$

außerhalb einer r-Menge Δr, auf welcher die Variation von r^λ/λ $(\lambda \geq 0)$ beschränkt ist.

In den Ausnahmeintervallen gewinnen wir auf folgende Weise eine Abschätzung: Nach (3.7) ist a_j von endlicher WO., das heißt, $T(r, a_j) = O(r^\lambda)$. Dann ist auch $dT(r, a_j)/dr$ von endl. W.O.! – Denn nach (2.6) ist $T(r)$ eine zunehmende Funktion von r und eine konvexe Funktion von $\log r$. Es ist also $dT/d\log r$ $(= dT/dr\cdot r) > 0$ und eine *wachsende* Funktion von $\log r$. D. f. für a_j zum Beispiel

$$T(2r) = \int_0^{2r} dT(t)/d\log t\cdot d\log t > \int_r^{2r} dT/d\log t\cdot d\log t$$
$$> dT(r)/d\log r\cdot \log 2r/r\ ,$$

also

$$\log 2\cdot dT(r)/d\log r < T(2r) = O(r^\lambda)$$

und

$$dT(r, a_j)/dr = O(r^{\lambda-1}) \qquad \text{q.e.d.} \tag{3.10}$$

das heißt, die *Variation* von $T(r, a_j)$ ist höchstens so groß wie jene von r^λ/λ, also auf einem Ausnahmeintervall gleichmäßig *beschränkt*.

Damit gilt für ein $r' > r$, wo r der nächstkleinere *reguläre* r-Wert zum Ausnahmewert r' ist,

$$T(r', a_j) = T(r, a_j) + O(1)\ . \tag{3.11}$$

Und also nach (3.9) und weil $T(r)$ mit r wächst

$$\begin{aligned} T(r', a_j) &= O[\log T_j(r)] + O[T_M(r)] + O(1) \\ &= O[\log T_j(r')] + O[T_M(r')]\ . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Wir haben somit für *alle* r:

$$T(r, a_j) = O[\log T_j(r)] + O[T_M(r)]\ . \tag{3.13}$$

Also ist entweder

$$T(r, a_j) = O[T_M(r)]\ , \quad \text{wenn} \quad \log T_j(r) = O[T_M(r)] \tag{3.14}$$

das heißt, wenn die charakt. Funktion: $T(r, a_j)$ von höherer Größenordnung ist als jene der folgenden Koeffizienten $a_{j+1}, \ldots, a_{n-1}$, so besitzt die DGl. (1) unter den Voraussetzungen (3.7) höchstens j Integrale $w_1, w_2, \ldots, w_j$, deren $\log T(r, w_i)$, $i = 1, 2, \ldots, j$, nicht wesentlich größer sind als die größten unter den charakt. Funktionen von $a_{j+1}, \ldots, a_{n-1}$.

Oder:

$$T(r, a_j) = O[\log T_j(r)]\ , \quad \text{wenn} \quad T_M(r) = O[\log T_j(r)] \tag{3.15}$$

das heißt, mindestens einer der Logarithmen der charakt. Funktionen der $j+1$-Lösungen $w_1, \ldots, w_{j+1}$ erreicht die Größenordnung der charakt. Funktion von a_j.

Unter den Voraussetzungen (3.7) gilt also insbesondere für die allg. Lösung w der DGl. (1):

$$\underline{\lim}_{r=\infty} \frac{\log T(r, w)}{\underset{0 \leq k \leq n-1}{\operatorname{Max}} [T(r, a_k)]} > 0 . \tag{3.16}$$

Nach (1.17) fanden wir unter den Voraussetzungen (3.7)

$$\overline{\lim}_{r=\infty} \frac{\log M(r, w)}{\underset{0 \leq k \leq n-1}{\operatorname{Max}} [M(r, a_k)]} \leq 1 \tag{3.17}$$

(3.14), (3.16) und (3.17) zusammen ergeben den

Verschärften Hauptsatz: (3.18) Wenn in der Koeffizientenfolge $a_0, \ldots, a_{n-1}$ einer linearen DGl. n-ter Ordnung mit ganzen Funktionen endlicher W.O. als Koeffizienten für ein $r >> r_0$ a_j die letzte transzendente Funktion ist, deren charakt. Funktion $T(r, a_j)$ mindestens von der gleichen Größenordnung ist wie jene der übrigen Koeffizienten, dann erreicht auch der Log. der charakt. Funktion der allgemeinen Lösung $w : \log T(r, w)$ einen Betrag von dieser Größenordnung.

Partikuläre Integrale mit wesentlich kleinerer charakt. Funktion existieren höchstens j unabhängige.

N.B. (3.18) heißt nicht nur, daß der Log. der allg. Lösung von (1) und die Koeffizienten stärksten Wachstums von derselben Ordnung, demselben Typus und in derselben Klasse sind, sondern auch, daß der $\log T(r, w)$ *immer* den für $r >> r_0$ dominierenden charakt. Funktionen der Koeffizienten folgt. Insbesondere heißt (3.18) bzw. (3.16): Die allg. Lösung einer lin. DGl. mit ganzen transzendenten Koeffizienten ist *überall*[7]) von ∞ W.O.

Wichtiger Spezialfall: Wenn die DGl. (1) j unabhängige part. Integrale besitzt, die das Wachstum der allg. Lösung nicht erreichen, dann gilt schärfer als (3.16) für sämtliche $n-j$ unabhängigen Lösungen normalen Wachstums

$$\underline{\lim}_{r=\infty} \frac{\log T(r, w_k)}{T(r, a_j)} \geq \frac{1}{3(n-j)} \qquad k = j+1, \ldots, n . \tag{3.16'}$$

(Folgt aus Schema (2.33*) für w_k und Umformung von (2.32) in

---

[7]) Eine meromorphe Funktion heißt nämlich von ∞ W.O., wenn $\overline{\lim}_{r=\infty} \frac{\log T(r, w)}{\log r} = \infty$, hier gilt aber sogar $\lim_{r=\infty} \frac{\log T(r, w)}{\log r} = \infty$.

$$a_{0,j} + \frac{v'}{v}\left[a_{1,j} + \frac{v''}{v'}\left\{a_{2,j} + \frac{v'''}{v''}\left(a_{3,j} + \frac{v^{(4)}}{v'''}\left(\cdots + \frac{v^{(n-j)}}{v^{(n-j-1)}}\right)\right)\right\}\right] = 0 \qquad (2.32')$$

vor dem Übergang zur S.Fkt.)

2. Fall: Unter den Voraussetzungen (3.7′) gelten (3.14) bzw. (3.15) nur außerhalb einer r-Menge Δr, auf welcher die Variation von r^λ/λ beschränkt ist. Für einen Ausnahmewert $r' < r$ gilt, wenn r regulär ist,

$$T(r', a_j) \leq T(r, a_j) = O[\log T_j(r)] + O[T_M(r)] \,. \qquad (3.19)$$

Weil die Koeffizienten der DGl. (1) nach Voraussetzung nicht-transfinit sind, gibt es eine natürliche Zahl k, so daß $\log_k T(r, a_j)$ von *endlicher* W.O. ist. Daher ist

$$\log_k T(r, a_j) = O^*[\log_k T(r', a_j)] \,,^{8)} \qquad (3.20)$$

wenn r der nächstgrößere reguläre r-Wert zu r' ist, weil dann r/r' gegen 1 strebt.

Und wir bekommen aus (3.19) für *alle* r:

$$\begin{aligned}\log_k T(r, a_j) &= O^*[\log_k T(r', a_j)] = \\ &= O^*[\log_{k+1} T_j(r)] + O^*[\log_k T_M(r)] + O(1) \,.\end{aligned} \qquad (3.21)$$

Also gilt für alle r

$$\log_k T(r, a_j) = O^*[\log_k T_M(r)] \,, \quad \text{wenn} \quad \log_{k+1} T_j(r) = O[\log_k T_M(r)] \qquad (3.22)$$

$$\log_k T(r, a_j) = O^*[\log_{k+1} T_j(r)] \,, \quad \text{wenn} \quad \log_k T_M(r) = O[\log_{k+1} T_M(r)] \,. \qquad (3.23)$$

Wir können (3.22) bzw. (3.23) analog (3.14) bzw. (3.15) deuten. Zusammen mit (1.17″) ergeben sie den

Satz: (3.24) Die Funktion a_j erreiche das Wachstum einer k-mal exponentiell-iterierten transzendenten Funktion von endlicher W.O. In der Folge der Koeffizienten der DGl. (1): $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sei sie die letzte Funktion, deren charakt. Fkt. von keiner der vorangehenden Koeffizienten wesentlich übertroffen wird. Dann sind der $k+1$-te Log. der charakt. Funktion der allgemeinen Lösung dieser DGl. und der k-te Log. der charakt. Fkt. von a_j vom selben *Wachstum.*

Partikuläre Integrale von schwächerem Wachstum als die allg. Lösung gibt es höchstens j linear-unabhängige.

3. Fall: Unter der Voraussetzung (3.7″) dürfen wir annehmen, daß der Koeffizient a_j transfinit, $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_{n-1}$ und die Integrale $w_1, w_2, \ldots, w_{j+1}$ nicht-transfinit seien.

---

[8]) $O^*[f(r)]$ heißt: höchstens vom selben Wachstum bzw. Ordnung, Typus und Klasse wie $f(r)$.

Dann bedeutet (3.5): a_j ist außerhalb einer r-Menge von endlichem log. Maß *nicht-transfinit*. D. f. Es gibt eine nat. Zahl m und ein endl. λ, so daß außerhalb dieser r-Menge

$$\log_m T(r, a_j) = O(r^\lambda) .$$

Weil $T(r)$ wächst, so gilt für ein r' im Ausnahmeintervall mit Endpunkt r

$$\log_m T(r', a_j) = O(r^\lambda) \qquad r' < r , \qquad \lim r/r' = 1 ,$$

also

$$= O(r'^\lambda (r/r')^\lambda) = O(r'^\lambda) ,$$

das heißt

$$\log_m T(r, a_j) = O(r^\lambda) \qquad \text{für } alle\ r .$$

Also ist a_j nicht-transfinit, entgegen der Voraussetzung und wir haben den

Satz: (3.25) Wenn in der Folge der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ der DGl. (1) a_j die letzte *transfinite* Funktion ist, so besitzt die DGl. höchstens j unabhängige *nicht*-transfinite part. Integrale.

§ 4. Die Frage nach der Existenz möglicher partikulärer Integrale, welche das Wachstum der allgemeinen Lösung nicht erreichen; insbesondere bei Differentialgleichungen 2. Ordnung

(Wir betrachten nur Differentialgleichungen mit Koeffizienten endlicher W. O.)

Wir können Differentialgleichungen konstruieren, welche jede Verteilung von partikulären Integralen normalen und subnormalen Wachstums, die nach dem verschärften Hauptsatz (3.18) in einem Fundamentalsystem möglich sind, auch realisieren.

Konstruktion:

$$V \equiv u^{(n-k)} + a_{n-k-1} u^{(n-k-1)} + \cdots\cdot + a_1 \cdot u' + a_0 \cdot u \tag{4.1}$$

sei ein linearer Differentialausdruck $(n-k)$-ter Ordnung mit ganzen Funktionen als Koeffizienten. Dann ist

$$V^{(k)} - A_0(z) \cdot V = 0 \qquad k \geq 1 , \quad A_0(z) \quad \text{ganz} , \tag{4.2}$$

eine lineare DGl. n-ter Ordnung für u:

$$u^{(n)} + b_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots\cdot + b_1 \cdot u' + b_0 \cdot u = 0 . \tag{4.3}$$

Die Koeffizienten-Funktionen b_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ sind Kombinationen der a_h $(h = 0, 1, \ldots, n-k-1)$ samt Ableitungen davon und $A_0(z)$. Die Koeffizienten b_{n-h} $(h < k)$ enthalten $A_0(z)$ nicht.

$b_{n-k} = A_0(z) +$ eine Kombination der a_h und deren Ableitungen (für unsere Betrachtung erübrigt sich eine genauere Beschreibung). Also ist b_{n-k} der Koeffizient mit *größtem* Index der DGl. (4.3), der von $A_0(z)$ abhängt.

Wenn $A_0(z)$ von wesentlich stärkerem Wachstum ist als die Koeffizienten des Differentialausdrucks (4.1), dann ist b_{n-k} für jene r, wo $T(r, A_0)$ ihre höchstmögliche Größenordnung erreicht, der *kritische* Koeffizient der DGl. (4.3). Er entspricht dem Koeffizienten a_j im Satz (3.18).

Nach dieser Verschärfung des Hauptsatzes ist somit die allgemeine Lösung der DGl. (4.3) vom selben Wachstum wie eine zu $A_0(z)$ exponentiell-iterierte Funktion. Das ist das normale Wachstum der Lösungen von (4.3). Und es existieren *höchstens* $(n - k)$ linear-unabhängige part. Integrale von subnormalem Wachstum.

Diese *Höchstzahl* wird *erreicht.*

Denn die DGl. (4.3) besitzt tatsächlich $(n - k)$ linear-unabhängige Integrale, die das Wachstum der allgemeinen Lösung nicht erreichen. Die Lösungen der DGl.

$$u^{(n-k)} + a_{n-k-1} u^{(n-k-1)} + \cdots\cdots + a_1 \cdot u' + a_0 \cdot u = 0 \qquad (4.4)$$

$$\text{das ist} \quad V \equiv 0$$

sind nämlich auch Lösungen der DGl. (4.3). Verglichen mit der allgemeinen Lösung dieser DGl. sind sie aber subnormal, da die Koeffizienten von (4.4) von wesentlich schwächerem Wachstum sind als jene von (4.3) mit Index $\leq n - k$, welche A_0 enthalten. Und unter ihnen gibt es genau $(n - k)$ linear-unabhängige.

Allgemein kann der Satz (3.18) also nicht mehr verschärft werden.

Bei der Untersuchung bestimmter Differentialgleichungen zeigt sich aber, daß die an sich möglichen subnormalen Lösungen nur selten auftreten. In vielen Fällen nämlich, wo nach dem Satz (3.18) solche *möglich* wären, sind weitere, spezielle Bedingungen erfüllt, die hinreichen, subnormale Lösungen auszuschließen.

Zum Beispiel kann eine DGl. 2. Ordnung

$$w'' + a_1 \cdot w' + a_0 \cdot w = 0 \quad a_0, a_1 \text{ ganz, transzendent,} \qquad (4.5)$$

nach Satz (3.18) ein (und nur 1) subnormales Integral besitzen, wenn die charakteristische Funktion von a_0 nicht wesentlich größer ist als jene von a_1. Dann gilt für eine allgemeine, das heißt normal wachsende Lösung w von (4.5)

$$\underline{\lim}_{r=\infty} \frac{\log T(r, w)}{T(r, a_1)} > 0 , \qquad \text{also a. f.} \quad \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{\log T(r, w)}{T(r, a_1)} > 0 . \qquad (4.6)$$

Für eine subnormale Lösung w_0 ist mindestens einer dieser Limites gleich 0. Aber wegen (3.11) heißt die Ungleichung (3.9) für (4.5)

$$T(r, a_0) \leq O[\log T(r, w)] + T(r, a_1) \quad \text{für alle } r\,. \tag{4.7}$$

Das heißt aber für eine subnormale Lösung $w = w_0$

$$\varliminf_{r=0} \frac{T(r, a_0)}{T(r, a_1)} \leq 1 \quad \text{oder} \quad \varlimsup_{r=\infty} \frac{T(r, a_0)}{T(r, a_1)} \leq 1\,.$$

Also führt im einen Fall die Annahme $\varliminf_{r=\infty} \dfrac{T(r, a_0)}{T(r, a_1)} > 1$, im andern Fall schon die Existenz einer Folge $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ mit $\lim_{n=\infty} r_n = \infty$, auf welcher $\dfrac{T(r_n, a_0)}{T(r_n, a_1)}$ größer als $1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ist, zum *Widerspruch.*

Zum Ausschluß eines partikulären Integrals *endlicher* Ordnung genügt nach (4.7) sogar schon

$$T(r_n, a_0) > T(r_n, a_1) + k \cdot \log r_n \qquad k \text{ beliebig groß},$$

auf einer Folge $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots, \lim_{n=\infty} r_n = \infty$.

Deutlich zeigt auch die *Schar* der Differentialgleichungen

$$w'' + e^{-z} \cdot w' + \alpha \cdot w = 0 \tag{4.8}$$

$$\alpha \neq 0\,, \quad \text{konstant (vgl. Beispiel S. 209, } \alpha = -1)\,,$$

daß subnormale Lösungen nur in Ausnahmefällen auftreten. Nach dem verschärften Hauptsatz (3.18) könnten diese Differentialgleichungen nämlich je eine subnormale Lösung besitzen – wie das Beispiel S. 209 –, aber wir können beweisen, daß bei den Differentialgleichungen (4.8) dann und *nur* dann ein subnormales Integral auftritt, wenn $\alpha = -n^2$, n eine natürliche Zahl.

Eine weitere Bestätigung dieser Vermutung fanden wir bei der Untersuchung der Schar

$$w'' + e^{\alpha \cdot z^2} \cdot w' + P(z) \cdot w = 0\,, \qquad P(z) = \text{Polynom}, \qquad \alpha \neq 0\,, \text{konst.} \tag{4.9}$$

Damit diese Differentialgleichungen je ein partikuläres Integral von subnormalem Wachstum besitzen können, muß das Polynom $P(z)$ mindestens vom 2. Grad sein. Ob es in der Schar (4.9) eine DGl. gibt, für welche diese Bedingung für die Existenz eines subnormalen Integrals *hinreicht*, ist mir nicht bekannt.

LITERATURVERZEICHNIS

Bieberbach L.: [1] *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Berlin, Springer 1930.

Blumenthal O.: [1] *Théorie des fonctions entières d'ordre infini.* Paris, Gauthiers-Villars 1905.

Cartwright M. L.: [1] *Integral functions.* Cambridge, University Press 1956.

Frei M.: [1] *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire.* C. R. Acad. Sci., Paris 236 (1953).

Kamke E.: [1] *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 2. Auflage, Leipzig: Becker 1943.

Nevanlinna R.: [1] *Le théorème de* Picard-Borel *et la théorie des fonctions méromorphes.* Paris, Gauthiers-Villars 1929. – [2] *Eindeutige analytische Funktionen,* 1. Auflage, Berlin, Springer 1936.

Perron O.: [1] *Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten.* Acta math. 34 (1910).

Polya G.: [1] *Über das Anwachsen von ganzen Funktionen, die einer Differentialgleichung genügen.* Viertel. J. Naturforsch. Ges. in Zürich 1916.

Polya-Szegö: [1] *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* Berlin. Springer 1925.

Pöschl K.: [1] *Zur Frage des Maximalbetrages der Lösungen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Polynomkoeffizienten.* Math. Annalen 125 (1953).

Rémoundos G. [1] *Sur les fonctions algébroides.* Paris, Mémorial des Sci. Math. fasc. 23.

Saxer W.: [1] *Über die Grenzen der Anwendbarkeit der* Wiman*schen Sätze in der Theorie der ganzen Funktionen.* Nachr. der Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Physik. Klasse 1927.

Valiron G.: [1] *Lectures on the general theory of integral functions.* Toulouse 1923. – [2] *Equations fonctionnelles.* Paris: Masson & Co., 1945.

Wiman A.: [1] *Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Glied der zugehörigen Taylorreihe.* Acta math. 37 (1914). – [2] *Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrag einer analytischen Funktion und dem größten Betrage bei gegebenem Argument der Funktion.* Acta math. 41 (1916).

Wittich H.: [1] *Ganze transzendente Lösungen algebraischer Differentialgleichungen.* Math. Ann. 122 (1950). – [2] *Über die Wachstumsordnung einer ganzen transzendenten Funktion.* Math. Z. 51 (1948). – [3] *Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen.* Math. Ann. 124 (1952). – [4] *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer 1955.

(Eingegangen den 31. Mai 1960)