

Zwei elementare Sätze über positive Lösungen linearer homogener Gleichungssysteme.

Autor(en): **Gross, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **35 (1961)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-27346>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zwei elementare Sätze über positive Lösungen linearer homogener Gleichungssysteme

Von H. GROSS, Zürich

Für positive bzw. nichtnegative Lösungen eines linearen homogenen Gleichungssystems gelten die beiden folgenden Sätze:

1. Satz: Das lineare homogene Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \xi_k = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1)$$

hat dann und nur dann eine positive Lösung $\xi_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$), falls jede Lösung η des transponierten Ungleichungssystems

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \eta_i \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2)$$

sogar eine Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \eta_i = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

ist.

2. Satz: Das lineare homogene Gleichungssystem (1) besitzt dann und nur dann eine nichtnegative Lösung $\xi_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$), nicht alle $\xi_k = 0$, falls für jede Lösung η des transponierten Ungleichungssystems (2) in mindestens einer Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt.

Beweis des 1. Satzes: Der Beweis läßt sich leicht geometrisch führen. Wir betrachten zwei reelle euklidische Vektorräume A^n , B^m der Dimensionen n und m , in denen je eine orthonormierte Basis (e_1, \dots, e_n) , $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m)$ ausgezeichnet sein möge. φ sei eine lineare Abbildung von A^n in B^m , $\varphi: A^n \rightarrow B^m$ mit der Matrix (α_{ik}) . Die lineare Abbildung φ^* , die durch die Skalarprodukte in den Räumen A^n , B^m induziert wird, $\varphi^*: B^m \rightarrow A^n$, $(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y)$ mit $x \in A^n$, $y \in B^m$ hat bekanntlich die zur Matrix (α_{ik}) transponierte Matrix.

Es habe nun das System (1) eine durchwegs positive Lösung, das heißt, es existiere ein Vektor $x_0 \in A^n$ mit $(x_0, e_i) > 0$ ($i = 1, \dots, n$) derart, daß $(\varphi x_0, \bar{e}_j) = 0$ ($j = 1, \dots, m$). Die Hyperebene E mit dem Normalenvektor x_0 , definiert durch die lineare Gleichung $(x_0, x) = 0$, $x \in A^n$, enthält keinen Vektor x mit $(x, e_i) \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) außer dem Nullvektor. Denn ist

mindestens ein $(x, e_i) > 0$, so folgt wegen $(x_0, e_i) > 0$ ($i = 1, \dots, n$) daß $(x_0, x) = \sum (x_0, e_i)(x, e_i) > 0$, was nicht geht. Nach Voraussetzung ist $(\varphi x_0, \bar{e}_j) = (x_0, \varphi^* \bar{e}_j) = 0$ ($j = 1, \dots, m$), also $\varphi^* B^m \subset E$. Somit enthält $\varphi^* B^m$ außer dem Nullvektor keinen Vektor, dessen sämtliche Komponenten nichtnegativ sind. Damit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Hat umgekehrt der Kegel $K = \{x \mid x = \sum \lambda_i e_i, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ mit dem Bildraum $\varphi^* B^m$ nur den Nullvektor gemeinsam, so gibt es wegen der Konvexität von K eine Hyperebene E , die mit K nur den Nullvektor gemeinsam hat und $\varphi^* B$ enthält (folgt etwa aus dem Satz von HAHN-BANACH). E sei definiert durch die Gleichung $(x_0, x) = 0$, $x_0 \in A^n$. Offenbar liegt K ganz in einem der beiden durch E definierten offenen Halbräume, das heißt, es gilt $(x_0, e_i) > 0$ ($i = 1, \dots, n$) oder aber $(x_0, e_i) < 0$, ($i = 1, \dots, n$). Also liegt x_0 oder $-x_0$ in K . Es möge x_0 in K liegen. Da $\varphi^* B \subset E$ gilt, ist $(x_0, \varphi^* \bar{e}_j) = 0$, ($j = 1, \dots, m$). Somit gibt es einen Vektor $x_0 \in A^n$ mit $(x_0, e_i) > 0$ ($i = 1, \dots, n$) und $(\varphi x_0, \bar{e}_j) = 0$ ($j = 1, \dots, m$).

Die geometrische Überlegung zum Beweis des 2. Satzes entspricht genau der vorangehenden. Beweise zu den einen Hälften der beiden Sätze findet man in Math. Ann. 76 (1915), 340–342: E. STIEMKE, *Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen*.

Eine elegante Anwendung des 1. Satzes auf die Theorie der quadratischen Formen findet man in E. S. BARNES, *On a Theorem of Voronoi*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957), 537–539. (In Gleichung (3) der zuletzt zitierten Arbeit ist offenbar \geq durch $=$ zu ersetzen.)

Eingegangen den 20. November 1960