

# Espaces homogènes complexes compacts.

Autor(en): **Tits, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **37 (1962-1963)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28610>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Espaces homogènes complexes compacts

par J. TITS, Bruxelles

## 1. Introduction

Les variétés complexes compactes simplement connexes (c.s.c) homogènes ont été déterminées par H.C.WANG [11]. Parmi elles, celles dont la caractéristique d'EULER-POINCARÉ n'est pas nulle jouent un rôle particulier; ce sont des variétés algébriques rationnelles [4], [6], [7] qui peuvent être interprétées géométriquement comme des «espaces de drapeaux» [7], [8]; nous les appelons ici *D-espaces* <sup>1)</sup> <sup>2)</sup>. Toute variété complexe c.s.c. homogène est fibrée en tores au-dessus d'un *D*-espace.

Dans le présent article, nous retrouvons par une autre méthode les résultats de H.C.WANG, et nous déterminons toutes les variétés complexes homogènes (simplement connexes ou non) fibrées en tores au-dessus d'un *D*-espace. Si *D* représente un *D*-espace donné, les variétés homogènes fibrées en tores au-dessus de *D* sont obtenues comme quotients par certains groupes d'automorphismes de produits  $V \times D'$  où *V* est un espace vectoriel complexe et où *D'* est une certaine variété algébrique ouverte homogène, dépendant seulement de *D* et fibrée au-dessus de *D* avec  $\mathbf{C}^{*s}$  comme fibre (où *s* est un entier donné). Lorsque *D* est un espace projectif de dimension *m*, *D'* est un espace vectoriel de dimension *m* + 1 privé de son origine, de sorte que notre construction apparaît comme une généralisation de celle donnée par H. HOPF [5] pour munir le produit  $S^{2m+1} \times S^1$  d'une structure complexe.

A titre d'application, nous déterminons toutes les variétés compactes homogènes de dimension (complexe)  $2^3$ ) et toutes les variétés compactes homogènes non parallélisables de dimension 3.

Le théorème principal à la base de nos résultats est le suivant (théorème 4.1):

*Soient G un groupe analytique complexe connexe et H un sous-groupe ana-*

---

<sup>1)</sup> Ces espaces ont été appelés «*R*-espaces» dans d'autres publications. «*D*» est ici l'initiale de «drapeau».

<sup>2)</sup> Dans cette introduction, nous négligeons la distinction qui sera faite par la suite entre un espace homogène  $G/H$  et la variété complexe sous-jacente. Bien que nos résultats concernent essentiellement les espaces homogènes, nous utilisons ici de préférence le langage des variétés complexes qui est en relation plus directe avec la littérature existante. Ce changement de point de vue est justifié notamment par la proposition (2.1) de [11] et par le n° 5.2 ci-dessous.

<sup>3)</sup> La recherche, suggérée à l'auteur par A. VAN DE VEN, des espaces homogènes complexes compacts de dimension 2, est à l'origine des résultats exposés dans cet article.

lytique fermé. Si  $G/H$  est compact, le normalisateur  $N$  de la composante connexe de l'élément neutre de  $H$  est un sous-groupe parabolique, c'est-à-dire contient un sous-groupe résoluble connexe maximal (sous-groupe de BOREL) de  $G$ ; de plus, si un sous-groupe parabolique de  $G$  contient  $H$ , il contient aussi  $N$ .

Notons une conséquence immédiate de ce théorème (corollaire 4.2):

*Toute variété complexe compacte homogène possède une et une seule fibration en fibres parallélisables au-dessus d'un D-espace<sup>4</sup>).*

## 2. Préliminaires. Terminologie

2.1. Dans cet article, le terme *espace* désignera toujours un espace homogène  $G/H$  (espace de classes latérales à droite), où  $G$  est un groupe analytique complexe connexe et  $H$  un sous-groupe analytique fermé. Contrairement à un usage répandu, nous ferons la distinction entre un espace et la variété analytique complexe sous-jacente. Les résultats exposés relatifs aux espaces compacts ont des conséquences immédiates concernant les variétés complexes compactes homogènes, si on tient compte du fait qu'une telle variété, soit  $X$ , est toujours sous-jacente à un espace compact  $G/H$  (cf. [11], (2.1)), et que toute fibration holomorphe de  $X$  est invariante par  $G$  (cf. [0], proposition I. 1), donc sous-jacente à une fibration de  $G/H$  au-dessus de  $G/H_1$ , avec

$$H \subset H_1 \subset G$$

(cf. 2.2). La formulation des résultats en termes de variétés homogènes sera généralement laissée au lecteur.

Si  $H$  est invariant dans  $G$ , la même notation  $G/H$  désignera tantôt un espace homogène, tantôt un groupe quotient; le contexte indiquera toujours la signification adoptée.

Si  $F$  est un sous-groupe fermé de  $H$  invariant dans  $G$ , nous ne ferons pas de différence entre les espaces  $G/H$  et  $(G/F)/(H/F)$ .

Nous dirons qu'un espace est parallélisable s'il en est ainsi de sa variété sous-jacente. Les espaces compacts parallélisables sont les espaces compacts  $G/H$  avec  $H$  discret (cf. [12]), ou, ce qui revient au même, les espaces compacts  $G/H$  tels que la composante connexe de l'élément neutre de  $H$  soit invariante dans  $G$ .

---

<sup>4</sup>) L'existence d'une telle fibration a été obtenue indépendamment par A. BOREL et R. REMMERT (Über kompakte homogene KÄHLERSche Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen, 145 (1962), 429-439). Leur démonstration, qui s'appuie sur une partie de notre théorème 4.1 (à savoir le fait que  $N$  contient le radical de  $G$ ) diffère par ailleurs assez sensiblement de celle donnée ici. D'autre part, R. REMMERT a obtenu, concernant les variétés fibrées en tores au-dessus d'un D-espace, des résultats qui recouvrent partiellement les nôtres. Signalons ici que des conversations avec R. REMMERT nous ont permis d'améliorer le présent manuscrit sur plusieurs points; en particulier, la seconde partie du corollaire 4.2 (unicité de la fibration en question) répond à une question posée par lui.

**2. 2.** Si  $H \subset H_1 \subset G$ , nous dirons que  $G/H$  est *fibré* au-dessus de  $G/H_1$  avec  $H_1/H$  comme fibre. Si  $H$  est invariant dans  $H_1$ , le groupe  $L = H_1/H$  opère librement sur  $G/H$  (par translations à gauche), les orbites étant les fibres de  $G/H$  sur  $G/H_1$ ; dans ce cas, l'espace fibré sera dit *principal*, de groupe  $L$ . Si  $L^*$  est un sous-groupe analytique fermé de  $L$  et si  $H_1^*$  désigne l'image réciproque de  $L^*$  dans  $H_1$ , l'espace  $G/H_1^*$  sera appelé le *quotient* de  $G/H$  par  $L^*$  (la variété sous-jacente de  $G/H_1^*$  est effectivement la variété des orbites de l'action de  $L^*$  dans  $G/H$ ).

**2. 3.** Un *sous-groupe de BOREL* d'un groupe analytique complexe (connexe)  $G$  est un sous-groupe résoluble connexe maximal; un sous-groupe *parabolique* est un sous-groupe contenant un sous-groupe de BOREL. Nous rappellerons ici quelques faits connus (cf. notamment [7], [9], [10], [11]) concernant ces sous-groupes, en supposant  $G$  semi-simple; cette restriction n'est pas essentielle parce que les sous-groupes de BOREL contiennent évidemment toujours le radical connexe de  $G$ .

Soient  $\mathfrak{G}$  l'algèbre de LIE de  $G$ ,  $\mathfrak{C}$  une sous-algèbre de CARTAN,  $\Pi$  l'ensemble des racines,  $\Sigma$  un système de racines simples,  $e_\pi$  ( $\pi \in \Pi$ ) un vecteur propre correspondant à  $\pi$  et  $c_\pi = [e_\pi, e_{-\pi}]$ . Pour toute partie  $\Phi$  de  $\Sigma$ , soit  $\mathfrak{P}_\Phi$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{G}$  linéairement engendrée par  $\mathfrak{C}$  et par les  $e_\pi$  correspondant à toutes les racines  $\pi$  qui sont soit combinaisons linéaires à coefficients positifs des éléments de  $\Sigma$ , soit combinaisons linéaires à coefficients négatifs des éléments de  $\Sigma$  qui n'appartiennent pas à  $\Phi$ . L'algèbre dérivée  $\mathfrak{P}'_\Phi$  est engendrée par les mêmes  $e_\pi$  et par les  $c_\sigma$  correspondant aux éléments  $\sigma$  de  $\Sigma$  qui n'appartiennent pas à  $\Phi$ . Nous noterons encore  $P_\Phi$  le sous-groupe connexe de  $G$  engendré par  $\mathfrak{P}_\Phi$ ; son dérivé  $P'_\Phi$  est le sous-groupe connexe de  $G$  engendré par  $\mathfrak{P}'_\Phi$ , et on a  $P_\Phi/P'_\Phi = \mathbb{C}^{*s}$ , où  $s$  désigne le nombre d'éléments de  $\Phi$ .

Les sous-groupes  $P_\Phi$  sont paraboliques et tout sous-groupe parabolique est conjugué à un et un seul  $P_\Phi$ . Les sous-groupes de BOREL sont les conjugués de  $P_\Sigma$ .

Les sous-groupes de BOREL d'un groupe  $G$  quelconque (semi-simple ou non) contiennent le centre de  $G$ .

**2. 4.** *Un sous-groupe parabolique propre d'un groupe analytique complexe n'est jamais unimodulaire.*

En effet, soient  $\mathfrak{G}_1$  l'algèbre de LIE du groupe en question,  $\mathfrak{P}$  l'algèbre de LIE du sous-groupe parabolique considéré,  $\mathfrak{R}$  le radical de  $\mathfrak{G}_1$ ,  $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G} + \mathfrak{R}$  une décomposition de LEVI de  $\mathfrak{G}_1$ , et soient  $\mathfrak{C}$  et  $\Sigma$  définis comme au n° 2.3. On peut, sans nuire à la généralité, supposer que  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_\Phi + \mathfrak{R}$ , avec  $\Phi \neq \emptyset$ . Soit  $c \in \mathfrak{C}$  un élément tel que  $\sigma(c)$  soit réel et  $> 0$  pour toute racine simple

$\sigma \in \Sigma$ . La trace de la restriction  $\text{ad}_{\mathfrak{R}} \mathfrak{c}$  de  $\text{ad } \mathfrak{c}$  à  $\mathfrak{R}$  est nulle, parce que  $\text{ad}_{\mathfrak{R}} \mathfrak{c}$  appartient à la restriction à  $\mathfrak{R}$  de  $\text{ad } \mathfrak{G}$ , qui est une algèbre de Lie linéaire semi-simple. Il s'ensuit que la trace de la restriction de  $\text{ad } \mathfrak{c}$  à  $\mathfrak{B}$  est égale à la trace de la restriction de  $\text{ad } \mathfrak{c}$  à  $\mathfrak{B}_{\Phi}$ , or celle-ci, égale à la somme des  $\pi(\mathfrak{c})$  étendue à toutes les racines  $\pi$  telles que  $e_{-\pi} \notin \mathfrak{B}_{\Phi}$ , est réelle et  $> 0$ , ce qui démontre notre assertion.

### 3. $D$ -espaces et $D'$ -espaces

**3. 1.** Un espace  $G/H$  sera appelé un  $D$ -espace si  $H$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ . Lorsqu'on considère un  $D$ -espace  $G/H$ , ce n'est pas une restriction de supposer que  $G$  est semi-simple (resp. simplement connexe), puisque  $H$  contient le radical connexe (resp. le centre) de  $G$ . L'espace  $D_{\Phi} = G/P_{\Phi}$  (avec les notations du n° 2.3) sera dit de rang  $s$ , si  $s$  est le nombre d'éléments de  $\Phi$ . Les  $D$ -espaces sont compacts (cf. [7], [11]). Leurs variétés sous-jacentes sont des variétés algébriques projectives rationnelles (cf. [4], [6], [7]).

Un  $D$ -espace  $G/H$  peut être plongé analytiquement dans un espace projectif complexe de telle façon que les éléments de  $G$ , considérés comme transformations de  $G/H$ , s'étendent en des projectivités de l'espace projectif (cf. [6], [7]); un tel plongement sera brièvement appelé un *plongement projectif* de  $G/H$ , et sera dit *minimum* si la dimension de l'espace projectif en question est la plus petite possible. Le plongement projectif minimum d'un  $D$ -espace donné est unique à une projectivité près (cf. [7]).

Rappelons le principe de la définition des  $D$ -espaces de rang  $s$  quelconque comme *espaces de drapeaux* sur les  $D$ -espaces de rang 1 (cf. [7], [8]). Deux points appartenant respectivement à  $D_{\Phi} = G/P_{\Phi}$  et  $D_{\Phi'} = G/P_{\Phi'}$  sont dits *incidents* si les classes latérales de  $P_{\Phi}$  et  $P_{\Phi'}$  qu'ils représentent ont une intersection non vide. Soit  $\Phi = \{\varrho_1, \dots, \varrho_s\}$  et posons  $D_{\{\varrho_i\}} = D_i$ . Alors,  $D_{\Phi}$  peut être canoniquement identifié avec l'espace des «drapeaux d'espèce  $\Phi$ », c'est-à-dire des ensembles  $\{x_1, \dots, x_s\}$ , où  $x_i \in D_i$  et où les  $x_i$  sont deux à deux incidents.

**3. 2.** Soient  $G$  un groupe semi-simple simplement connexe et  $D = G/H$  un  $D$ -espace de rang  $s$ . L'espace  $D' = G/H'$  sera appelé le  $D'$ -espace associé à  $D$ . D'après 2.3, c'est un espace fibré principal de base  $D$  et de fibre  $\mathbf{C}^{*s}$ . On dira aussi que  $s$  est le rang de  $D'$ .

Si  $s = 1$ ,  $D'$  a une interprétation géométrique particulièrement simple. Considérons le plongement projectif minimum de  $D$  dans un espace projectif  $E$ , identifions  $D$  à son image par ce plongement, soit  $V$  un espace vectoriel ayant  $E$  comme espace projectif quotient et soit  $\varphi: V - \{0\} \rightarrow E$  la pro-

jection canonique. Alors, la variété sous-jacente de  $D'$  est le «cône»  $\varphi^{-1}(D)$ , image réciproque de  $D$  dans  $V - \{0\}$ , et son groupe est formé des transformations induites sur ce cône par des transformations linéaires de déterminant 1 de  $V$  qui le conservent, et induisant sur l'espace  $D$  (par  $\varphi$ ) des transformations appartenant au groupe de celui-ci.

La considération des drapeaux permet à nouveau de ramener la description d'un espace de rang quelconque à celle des espaces de rang 1. Soient  $D = D_\phi$  et  $D_i$  définis comme au n° 3.1, et soient  $D'$  et  $D'_i$  les  $D'$ -espace associés. Alors,  $D'$  est l'espace des ensembles  $\{x'_1, \dots, x'_s\}$  où  $x'_i \in D'_i$ , et où les projections des  $x'_i$  dans les  $D'_i$  sont deux à deux incidentes.

### 3. 3. Exemples. Cas des groupes classiques

Soient  $V$  un espace vectoriel complexe à  $n$  dimensions,  $G = SL_n(\mathbf{C})$  le groupe des transformations linéaires de déterminant 1 de  $V$  et  $p = \{p_1, \dots, p_s\}$  un ensemble d'entiers tels que  $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_s < n$ . Un drapeau d'espèce  $p$  est un ensemble  $\{V_1, \dots, V_s\}$  de sous-variétés linéaires de  $V$  telles que  $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_s$  et  $\dim V_i = p_i$ . L'espace  $D_p$  des drapeaux d'espèce  $p$  sur lequel opère  $G$  est un  $D$ -espace de  $G$  et tout  $D$ -espace de  $G$  est de ce type. Le  $D'$ -espace  $D'_p$  associé à  $D_p$  est l'espace des ensembles  $\{X_1, \dots, X_s\}$  où  $X_i$  est un  $p_i$ -vecteur et où les variétés linéaires supports des  $X_i$  forment un drapeau. En particulier si  $p = \{1\}$ ,  $D_p$  est l'espace projectif quotient de  $V$  et  $D'_p = V - \{0\}$ .

On obtient une description analogue des  $D$ -espaces des groupes orthogonaux (ou spinoriels) et symplectiques en considérant les drapeaux formés de variétés totalement isotropes (cf. [7]) (dans le cas orthogonal de dimension  $n = 2m$ , les deux espèces de variétés isotropes de dimension  $m$  doivent être envisagées séparément). Les  $D'$ -espaces associés sont à nouveaux des espaces d'ensembles de multivecteurs (totalement isotropes dans ce cas-ci) ou éventuellement – pour certains  $D'$ -espaces de groupes spinoriels – des revêtements doubles de tels espaces.

Le  $D'$ -espace associé à un produit direct de  $D$ -espaces est le produit direct des  $D'$ -espaces associés à ceux-ci.

## 4. Un théorème sur les espaces compacts

**Théorème 4. 1.** *Si  $G/H$  est compact et si  $H_0$  est la composante connexe de l'élément neutre dans  $H$ , le normalisateur  $N(H_0)$  de  $H_0$  dans  $G$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ . De plus, tout sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $H$  contient  $N(H_0)$ .*

Le groupe  $H$  étant contenu dans  $N(H_0)$ , l'espace  $G/H$  est fibré au-dessus de  $G/N(H_0)$  avec  $N(H_0)/H$  comme fibre. On a donc le

**Corollaire 4. 2.** *Tout espace compact possède une et une seule fibration à fibre parallélisable au-dessus d'un  $D$ -espace.*

Si  $H$  est connexe,  $N(H_0)/H = N(H_0)/H_0$  est un groupe compact, donc un tore. On retrouve donc, en particulier, le résultat suivant de H.C. WANG [11]:

**Corollaire 4. 3.** *Tout espace compact simplement connexe est fibré en tores au-dessus d'un  $D$ -espace.*

**Démonstration du théorème 4. 1.** Soient  $\mathfrak{G}$  et  $\mathfrak{H}$  les algèbres de LIE de  $G$  et  $H$ ,  $h$  la dimension de  $H$  et  $E$  l'espace projectif quotient de l'espace vectoriel  $\wedge^h \mathfrak{G}$ . Les sous-espaces vectoriels à  $h$  dimensions de  $\mathfrak{G}$  peuvent être représentés de la façon bien connue par les points d'une sous-variété de  $E$  (grassmannienne); soit  $p \in E$  le point représentant  $\mathfrak{H}$ . Le groupe  $G$  opère sur  $\mathfrak{G}$ , par la représentation adjointe, donc sur  $\wedge^h \mathfrak{G}$ , donc enfin sur  $E$ . Le sous-groupe  $H$  conserve  $\mathfrak{H}$ , donc  $p$ . Il s'ensuit que l'orbite  $pG$  de  $p$  sous l'action de  $G$  est une image analytique de  $G/H$ ; par conséquent,  $pG$  est une sous-variété analytique compacte, donc une sous-variété algébrique de  $E$  (cf. [3]). Soit  $B$  un sous-groupe de BOREL de  $G$ . En vertu de la proposition 15.5 de [1],  $B$  possède un point fixe dans  $pG$  (le groupe de projectivités de  $E$  représentant  $B$  n'est pas nécessairement algébrique, mais il suffit de le remplacer par son adhérence de ZARISKI pour pouvoir appliquer le théorème<sup>5</sup>).  $G$  étant transitif sur  $pG$ , il en résulte qu'un conjugué de  $B$  conserve  $p$ , donc  $\mathfrak{H}$ , c'est-à-dire est contenu dans le normalisateur  $N(H_0)$  de  $H_0$ , et  $N(H_0)$  est donc un sous-groupe parabolique de  $G$ .

Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $H$ . L'espace  $P/H$  étant compact, il résulte de la partie du théorème déjà démontrée que  $N(H_0) \cap P$  est un sous-groupe parabolique de  $P$ , donc de  $G$ , donc aussi de  $N(H_0)$ . Il s'ensuit que le groupe  $P_1 = (N(H_0) \cap P)/H_0$  est un sous-groupe parabolique de  $N(H_0)/H_0$ . Mais  $P_1$  possède un sous-groupe discret  $H/H_0$  tel que le quotient  $P_1/(H/H_0)$  soit compact. On en déduit immédiatement que  $P_1$  est unimodulaire, ce qui n'est possible, en vertu de 2.4, que si  $P_1 = N(H_0)/H_0$ , d'où  $N(H_0) \cap P = N(H_0)$ , d'où enfin  $P \supset N(H_0)$ , c. q. f. d.

## 5. Espaces fibrés en tores au-dessus d'un $D$ -espace

Nous nous proposons à présent de déterminer tous les espaces fibrés en tores au-dessus d'un  $D$ -espace; d'après le corollaire 4.3 nous retrouverons ainsi, en particulier, tous les espaces compacts simplement connexes.

---

<sup>5</sup>) Le recours aux théorèmes de CHOW et de BOREL, qui permet ici de simplifier l'exposé, n'est cependant pas essentiel; il est facile de voir, en effet, que le même résultat peut s'établir de façon plus élémentaire en utilisant seulement le théorème de LIE sur les groupes linéaires résolubles.

L'espace homogène principal  $V/\{0\}$  d'un espace vectoriel  $V$  (espace affiné correspondant à  $V$ ) sera noté  $V^\circ$ .

**Théorème 5.1.** *Soient  $D$  un  $D$ -espace de rang  $s$  et  $D'$  le  $D'$ -espace associé, fibré principal de groupe  $\mathbf{C}^{*s}$  sur  $D$ . Tout espace compact fibré en tores au-dessus de  $D$  est isomorphe au quotient  $Q$  d'un espace fibré principal  $D' \times V^\circ$ , produit direct de  $D'$  et d'un espace affiné  $V^\circ$ , par un sous-groupe analytique fermé  $L$  de  $\mathbf{C}^{*s} \times V$  tel que  $(\mathbf{C}^{*s} \times V)/L$  soit compact et  $\dim(V \cap L) = 0$ . L'espace  $Q$  est simplement connexe si et seulement si  $L$  est connexe.*

**Démonstration.** Soit  $G/H$  l'espace considéré, fibré au-dessus de  $G/N = D$ . Par hypothèse,  $H$  est invariant dans  $N$  et  $N/H$  est un tore, donc  $N' \subseteq H$ .

Nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que (i)  $G$  est simplement connexe et que (ii)  $H$  ne contient aucun sous-groupe invariant connexe non trivial de  $G$ . D'après (i),  $G$  est le produit semi-direct  $SR$  de son radical  $R$  et d'un groupe semi-simple  $S$ . D'après (ii),  $R$  est commutatif (donc est un espace vectoriel), puisque  $R' \subseteq N' \subseteq H$ .

Soient  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{R}$  et  $\mathfrak{S}$  les algèbres de LIE de  $G$ ,  $H$ ,  $N$ ,  $R$  et  $S$ ,  $\mathfrak{B}$  une sous-algèbre résoluble maximale de  $\mathfrak{S}$  contenue dans  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{C}$  une sous-algèbre de CARTAN de  $\mathfrak{S}$  contenue dans  $\mathfrak{B}$  et  $\alpha$  la représentation linéaire de  $\mathfrak{S}$  dans  $\mathfrak{R}$  définie par  $\alpha(\mathfrak{s})(\mathfrak{r}) = [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]$  ( $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$ ). On a  $\mathfrak{B} + \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{N}$ , donc

$$(*) \quad [\mathfrak{B}, \mathfrak{R}] \subseteq \mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{H}.$$

En particulier,  $[\mathfrak{C}, \mathfrak{R}] \subseteq \mathfrak{H}$ . Ceci signifie que tout élément de  $\mathfrak{R}$  appartenant à un poids non nul de  $\alpha$  est contenu dans  $\mathfrak{H}$ . De (\*) on déduit alors que l'espace de toute composante irréductible non triviale de  $\alpha$  est contenu dans  $\mathfrak{H}$ , mais ceci implique, en vertu de (ii), que  $\alpha$  elle-même est triviale, c'est-à-dire que  $\mathfrak{G}$  est la somme directe de  $\mathfrak{R}$  et  $\mathfrak{S}$ , ou encore que  $G = R \times S$ .

Posons  $N_1 = N \cap S$ . On a  $N = N_1 \times R$ , d'où  $N' = N'_1$  et  $D = G/N = S/N_1$ . Finalement,  $G/H$  est le quotient de  $G/N' = (S \times R)/N' = D' \times V^\circ$  où  $V$  désigne un espace vectoriel canoniquement isomorphe à  $R$ , par le groupe  $L = H/N'$ , et  $\dim(L \cap V) = \dim(H \cap R) = 0$  en vertu de (ii).

La dernière assertion de l'énoncé est évidente, et le théorème est ainsi démontré.

## 5.2. Remarques

Appelons espace *parfait* (resp. *réduit*) un espace  $G/H$  tel que le groupe de transformations de  $G/H$  induit par  $G$  – groupe isomorphe à un quotient de  $G$  – soit la composante connexe de l'élément neutre du groupe de tous les automorphismes de la variété sous-jacente de  $G/H$  (resp. ne possède aucun sous-groupe analytique fermé propre transitif sur  $G/H$ ). Les espaces compacts



parfaits correspondent biunivoquement aux variétés complexes compactes homogènes.

Reprenons les notations de la démonstration précédente. Soient  $R_1$  la projection de  $H_0$  (composante connexe de l'élément neutre de  $H$ ) dans  $R$ , et  $R_2$  un sous-espace vectoriel de  $R$  complémentaire de  $R_1$ . Le groupe  $S \times R_2$  est transitif sur  $Q$ . En particulier, on voit que

*Si  $Q$  est réduit, la composante connexe de l'élément neutre de  $L$  est contenue dans  $\mathbb{C}^{*s}$ .*<sup>6)</sup>

D'autre part,

*Si  $Q$  est parfait,  $\dim L = s$  et la dimension des fibres de  $Q$  sur  $D$  est égale à la dimension de  $V$ .*<sup>6)</sup>

En effet,  $D$  est simplement connexe et la fibration en tores de  $Q$  sur  $D$  est holomorphiquement localement triviale; il en résulte que la variété complexe sous-jacente de  $Q$  possède un groupe analytique complexe d'automorphismes conservant les fibres et simplement transitif sur elles. Ce groupe, qui est un tore complexe, est nécessairement central dans la composante connexe de l'élément neutre du groupe de tous les automorphismes de la variété sous-jacente de  $Q$ . Si  $Q$  est parfait, il se relève en un groupe central de  $G$  (les hypothèses de la démonstration précédente étant conservées), donc la dimension de  $R$  (centre connexe de  $G$ ) est au moins égale à la dimension des fibres de  $Q$  sur  $D$ , et  $\dim L \geq s$ .<sup>7)</sup> Mais on a toujours, par les conditions du théorème,  $\dim L \leq s$ , ce qui démontre notre assertion.

Des remarques précédentes, il résulte que *si on s'intéresse seulement à la variété sous-jacente de  $Q$ , on peut imposer au groupe  $L$  du théorème 5.1 l'une quelconque des deux conditions supplémentaires suivantes:*

*la composante connexe de l'élément neutre de  $L$  est contenue dans  $\mathbb{C}^{*s}$ ;  
 $\dim L = s$ .*

<sup>6)</sup> Ces résultats peuvent être précisés comme suit :

*Pour que  $Q$  soit parfait (resp. réduit) il faut et il suffit que  $D$  le soit, et que  $\dim L = s$  (resp. que la composante connexe de l'élément neutre de  $L$  soit contenue dans  $\mathbb{C}^{*s}$ ).*

Signalons encore que les seules variétés rationnelles compactes homogènes telles que la composante connexe de l'élément neutre du groupe de tous les automorphismes possède un sous-groupe analytique propre transitif, c'est-à-dire les seules variétés qui sont sous-jacentes à deux  $D$ -espaces distincts, sont celles qui possèdent un facteur direct isomorphe soit à un espace projectif de dimension impaire  $> 1$  (groupe projectif symplectique), soit à une hyperquadrique de dimension 5 ou 6 (groupe des automorphismes de l'hyperquadrique conservant un spineur ou un semi-spineur, selon le cas), soit à la variété représentant l'une des deux familles irréductibles de sous-variétés linéaires de dimension maximum d'une hyperquadrique de dimension impaire  $> 6$  (groupe des automorphismes de l'hyperquadrique conservant une section hyperplane non dégénérée).

<sup>7)</sup> R. REMMERT nous a fait observer que cette même remarque permet de donner une démonstration plus élémentaire du théorème 5.1, n'utilisant pas la théorie des représentations linéaires.

Lorsque  $Q$  est simplement connexe (espaces de WANG), c'est-à-dire lorsque  $L$  est connexe, la première de ces conditions implique  $V = \{0\}$ .

### 6. Exemples. Espaces compacts de dimension $\leq 3$ .

Soient  $V_i (i = 1, \dots, s)$  et  $V$  des espaces vectoriels complexes de dimensions respectives  $m_i + 1$  et  $n$ ,  $V_i^* = V_i - \{0\}$  l'espace  $V_i$  «pointé» considéré comme espace homogène de groupe  $SL_{m_i+1}(\mathbf{C})$ , fibré principal homogène de groupe  $\mathbf{C}^*$  au-dessus d'un espace projectif  $E_i$  de dimension  $m_i$ ,  $V^\circ = V/\{0\}$  l'espace homogène principal de groupe  $V$  (espace affine correspondant à  $V$ ),  $L$  un sous-groupe fermé de dimension  $l$  de  $\mathbf{C}^{*s} \times V$ , tel que  $(\mathbf{C}^{*s} \times V)/L$  soit compact et  $\dim(V \cap L) = 0$  (d'où  $l \leq s$ ). Le quotient  $E$  de  $V_1^* \times V_2^* \times \dots \times V_s^* \times V^\circ$  par  $L$  est un espace fibré en tores de dimensions  $t = n + s - l \geq n$  au-dessus du produit  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_s$ , et tout espace fibré en tores au-dessus d'un produit d'espaces projectifs peut être obtenu de cette façon, en vertu du théorème 5.1. Appelons *espace de type*  $E(m_1, \dots, m_s; t)$  tout espace  $E$ , de dimension  $m_1 + \dots + m_s + t$ , défini comme ci-dessus et *irréductible*, c'est-à-dire non isomorphe à un produit direct d'espaces de dimensions inférieures.

Les variétés de HOPF ([5], n° 2 (d)) sont sous-jacentes à des espaces de type  $E(m; 1)$ . Les variétés sous-jacentes des espaces simplement connexes de type  $E(m, m'; 1)$  sont les variétés de CALABI-ECKMANN [2]. Si on s'intéresse seulement aux variétés sous-jacentes, on peut, dans les deux cas, supposer que  $V = \{0\}$ .

Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates du théorème 5.1, des résultats rappelés au n° 3.3 et du fait que l'unique groupe non commutatif simplement connexe de dimension 2, soit  $G$ , ne possède pas de sous-groupe discret  $H$  tel que le quotient  $G/H$  soit compact.

**Proposition 6.1.** *Les seuls espaces compacts de dimension 1 sont la droite projective et les tores complexes.*

**Proposition 6.2.** *Les seuls espaces compacts irréductibles de dimension 2 sont le plan projectif, les espaces de type  $E(1; 1)$  et les tores irréductibles.*

**Proposition 6.3.** *Les seuls espaces compacts irréductibles non parallélisables de dimension 3 sont l'espace projectif, ce même espace dans lequel est donné un système nul (i.e. considéré comme espace homogène de  $Sp_4(\mathbf{C})$ ), l'hyperquadrique de dimension 3, l'espace des drapeaux (paires formées d'une droite et d'un point incident) d'un plan projectif, et les espaces des types  $E(2; 1)$ ,  $E(1, 1; 1)$  et  $E(1; 2)$ .*

## BIBLIOGRAPHIE

- [0] A. BLANCHARD, *Sur les variétés analytiques complexes*, Ann.Sci.Ec.Norm.Sup., 73 (1956), 157–202.
- [1] A. BOREL, *Groupes linéaires algébriques*, Ann.Math. 64 (1956), 20–82.
- [2] E. CALABI et B. ECKMANN, *A class of compact, complex manifolds which are not algebraic*, Ann. Math. 58 (1953), 494–500.
- [3] W.L. CHOW, *On compact complex analytic varieties*, Amer. J. Math. 71 (1949), 893–914.
- [4] M. GOTO, *On algebraic homogeneous spaces*, Amer. J. Math., 76 (1954), 811–818.
- [5] H. HOPF, *Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten*, Courant Anniversary Vol., New York, 1948, 167–185.
- [6] J. P. SERRE, *Représentations linéaires et espaces homogènes des groupes de LIE compacts*, d'après A. BOREL et A. WEIL, Séminaire Bourbaki, 6 (1953/54), exposé n° 100.
- [7] J. TITS, *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de LIE*, Mém. Acad. Roy. Belg., 29 (3) (1955).
- [8] J. TITS, *Les groupes de LIE exceptionnels et leur interprétation géométrique*, Bull. Soc. Math. Belg., 8 (1956), 48–81.
- [9] J. TITS, *Sur les groupes algébriques affins, théorèmes fondamentaux de structure, classification des groupes semi-simples et géométries associées*, C.I.M.E., Rome, 1960.
- [10] J. TITS, *Théorème de BRUHAT et sous-groupes paraboliques*, C. R. Acad. Sci. Paris, 254 (1962), 2910–2912.
- [11] H.C. WANG, *Closed manifolds with homogeneous complex structure*, Amer. J. Math., 76 (1954), 1–32.
- [12] H.C. WANG, *Complex parallelisable manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1954), 771–776.

(Reçu le 3 mars 1962)