

Note on Cross-sections in STIEFEL Manifolds.

Autor(en): **Whitehead, George W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **37 (1962-1963)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28621>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

5. Ich reiche diesen am 20. September 1961 in Oberwolfach auf einer Tagung über Geschichte der Mathematik gehaltenen Vortrag¹⁾ zum Druck ein, obwohl seit meinen in den *Math. Ann.* 83, 280–285 (1921) und in den *Monatsh. Math.* 54, 265–283 (1950) veröffentlichten Arbeiten zwei Abhandlungen von T. KUBOTA erschienen sind, die den Zusammenhang der Reziprozitätsgesetze mit transzendenten Funktionen betreffen²⁾ [*J. reine angew. Math.* 208, 35–50 (1961); *Nagoya math. J.* 19, 1–13 (1961); meine soeben genannten Arbeiten über das kubische und biquadratische Reziprozitätsgesetz sind dort nicht erwähnt]. Zum Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, bei dem KUBOTA sich nicht auf Primzahlen p und q beschränkt, benutzt er wie EISENSTEIN den Sinus, und er macht vom GAUSSschen Lemma Gebrauch, das ich hier nicht herangezogen habe.

Eingegangen den 20. August 1962

Note on Cross-sections in STIEFEL Manifolds

by GEORGE W. WHITEHEAD

(Extract from a letter to B. ECKMANN)

For which values of n, m, r ($n \geq m > r$) does the fibration $V_{n,m} \rightarrow V_{n,r}$ have a cross-section? The case $r = 1$ has recently been settled by ADAMS [2]. The remaining cases can easily be settled with the aid of your paper [4].

Theorems. Among the fibrations $V_{n,m} \rightarrow V_{n,r}$ ($n \geq m > r \geq 2$), only the following have cross-sections:

$$V_{n,n} \rightarrow V_{n,n-1}, \quad V_{7,3} \rightarrow V_{7,2}, \quad V_{8,4} \rightarrow V_{8,3}.$$

Proof. Obviously, if $V_{n,m} \rightarrow V_{n,r}$ has a cross-section and $r < k < m$, so does $V_{n,k} \rightarrow V_{n,r}$. According to [4, p. 328, Hilfsatz], if $V_{n,m} \rightarrow V_{n,r}$ has a cross-section, so does $V_{n-1,m-1} \rightarrow V_{n-1,r-1}$. Moreover, [4, p. 337], if $V_{q,3} \rightarrow V_{q,2}$ has a cross-section, then R^{q+1} has a continuous multiplication $(x, y) \rightarrow xy$ such that $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$, and therefore [1] $q = 3$ or $q = 7$. Thus, if $V_{n,m} \rightarrow V_{n,r}$

¹⁾ Schon früher (im Studienjahr 1955/56) hatte ich im Mathematischen Colloquium der Universität Bagdad darüber vorgetragen, und, davon angeregt, hat Herr RAFIQ HUSSEIN bei der Prüfung für den Grad eines B.Sc. eine Thesis darüber verfaßt.

²⁾ Den Hinweis auf sie verdanke ich Herrn P. ROQUETTE.

has a cross-section, then $n - r = 1$ or $n - r = 5$. Since $V_{n,n} \rightarrow V_{n,n-1}$ has an obvious cross-section, it suffices to show that

- 1) $V_{8,4} \rightarrow V_{8,3}$ has a cross-section,
- 2) $V_{7,4} \rightarrow V_{7,2}$ does not have a cross-section,
- 3) $V_{9,5} \rightarrow V_{9,4}$ does not have a cross-section.

To prove 1), identify R^8 with the algebra of CAYLEY numbers. The desired cross-section is then given by

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z, x((x^{-1}y)(x^{-1}z))) \quad (x, y, z) \in V_{8,3}.$$

Since S^5 does not have a 2-field [2], $V_{6,3} \rightarrow V_{6,1}$ does not have a cross-section. Hence $V_{7,4} \rightarrow V_{7,2}$ does not have a cross-section.

According to BOREL [3, pp. 148—9], the mod 2 cohomology rings $H^*(V_{9,5})$ and $H^*(V_{9,4})$ have simple systems of generators

$$\begin{array}{ll} x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 & \text{for } V_{9,5}, \\ y_5, y_6, y_7, y_8 & \text{for } V_{9,4} \end{array}$$

such that

$$\pi^*(y_i) = x_i \quad (5 \leq i \leq 8),$$

and

$$Sq^4 x_4 = x_8.$$

If $\lambda: V_{9,4} \rightarrow V_{9,5}$ is a cross-section, then

$$0 \neq y_8 = \lambda^* \pi^* y_8 = \lambda^* x_8 = \lambda^* Sq^4 x_4 = Sq^4 \lambda^* x_4 = 0.$$

This contradiction completes the proof.

Massachusetts Institute of Technology

BIBLIOGRAPHY

- [1] J. F. ADAMS, *On the non-existence of elements of HOPF invariant one*, Ann. of Math. 72 (1960), 20—104.
- [2] J. F. ADAMS, *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. 75 (1962), 603—632.
- [3] A. BOREL, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de LIE compacts*, Ann. of Math. 57 (1953), 115—207.
- [4] B. ECKMANN, *Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme*, Comment. Math. Helv. 15 (1942—3), 318—339.

(Received December 20, 1962)