

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1962-1963)

Artikel: Note on Cross-sections in STIEFEL Manifolds.
Autor: Whitehead, George W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28621>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 03.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

5. Ich reiche diesen am 20. September 1961 in Oberwolfach auf einer Tagung über Geschichte der Mathematik gehaltenen Vortrag¹⁾ zum Druck ein, obwohl seit meinen in den Math. Ann. 83, 280–285 (1921) und in den Monatsh. Math. 54, 265–283 (1950) veröffentlichten Arbeiten zwei Abhandlungen von T. KUBOTA erschienen sind, die den Zusammenhang der Reziprozitätsgesetze mit transzendenten Funktionen betreffen²⁾ [J. reine angew. Math. 208, 35–50 (1961); Nagoya math. J. 19, 1–13 (1961); meine soeben genannten Arbeiten über das kubische und biquadratische Reziprozitätsgesetz sind dort nicht erwähnt]. Zum Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, bei dem KUBOTA sich nicht auf Primzahlen p und q beschränkt, benutzt er wie EISENSTEIN den Sinus, und er macht vom GAUSSschen Lemma Gebrauch, das ich hier nicht herangezogen habe.

Eingegangen den 20. August 1962

Note on Cross-sections in STIEFEL Manifolds

by GEORGE W. WHITEHEAD

(Extract from a letter to B. ECKMANN)

For which values of n, m, r ($n \geq m > r$) does the fibration $V_{n,m} \rightarrow V_{n,r}$ have a cross-section? The case $r = 1$ has recently been settled by ADAMS [2]. The remaining cases can easily be settled with the aid of your paper [4].

Theorems. Among the fibrations $V_{n,m} \rightarrow V_{n,r}$ ($n \geq m > r \geq 2$), only the following have cross-sections:

$$V_{n,n} \rightarrow V_{n,n-1}, \quad V_{7,3} \rightarrow V_{7,2}, \quad V_{8,4} \rightarrow V_{8,3}.$$

Proof. Obviously, if $V_{n,m} \rightarrow V_{n,r}$ has a cross-section and $r < k < m$, so does $V_{n,k} \rightarrow V_{n,r}$. According to [4, p. 328, Hilfsatz], if $V_{n,m} \rightarrow V_{n,r}$ has a cross-section, so does $V_{n-1,m-1} \rightarrow V_{n-1,r-1}$. Moreover, [4, p. 337], if $V_{q,3} \rightarrow V_{q,2}$ has a cross-section, then R^{q+1} has a continuous multiplication $(x, y) \rightarrow xy$ such that $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$, and therefore [1] $q = 3$ or $q = 7$. Thus, if $V_{n,m} \rightarrow V_{n,r}$

¹⁾ Schon früher (im Studienjahr 1955/56) hatte ich im Mathematischen Colloquium der Universität Bagdad darüber vorgetragen, und, davon angeregt, hat Herr RAFIQ HUSSEIN bei der Prüfung für den Grad eines B.Sc. eine Thesis darüber verfaßt.

²⁾ Den Hinweis auf sie verdanke ich Herrn P. ROQUETTE.

has a cross-section, then $n - r = 1$ or $n - r = 5$. Since $V_{n,n} \rightarrow V_{n,n-1}$ has an obvious cross-section, it suffices to show that

- 1) $V_{8,4} \rightarrow V_{8,3}$ has a cross-section,
- 2) $V_{7,4} \rightarrow V_{7,2}$ does not have a cross-section,
- 3) $V_{9,5} \rightarrow V_{9,4}$ does not have a cross-section.

To prove 1), identify R^8 with the algebra of CAYLEY numbers. The desired cross-section is then given by

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z, x((x^{-1}y)(x^{-1}z))) \quad (x, y, z) \in V_{8,3}.$$

Since S^5 does not have a 2-field [2], $V_{6,3} \rightarrow V_{6,1}$ does not have a cross-section. Hence $V_{7,4} \rightarrow V_{7,2}$ does not have a cross-section.

According to BOREL [3, pp. 148—9], the mod 2 cohomology rings $H^*(V_{9,5})$ and $H^*(V_{9,4})$ have simple systems of generators

$$\begin{array}{ll} x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 & \text{for } V_{9,5}, \\ y_5, y_6, y_7, y_8 & \text{for } V_{9,4} \end{array}$$

such that

$$\pi^*(y_i) = x_i \quad (5 \leq i \leq 8),$$

and

$$Sq^4 x_4 = x_8.$$

If $\lambda: V_{9,4} \rightarrow V_{9,5}$ is a cross-section, then

$$0 \neq y_8 = \lambda^* \pi^* y_8 = \lambda^* x_8 = \lambda^* Sq^4 x_4 = Sq^4 \lambda^* x_4 = 0.$$

This contradiction completes the proof.

Massachusetts Institute of Technology

BIBLIOGRAPHY

- [1] J. F. ADAMS, *On the non-existence of elements of HOPF invariant one*, Ann. of Math. 72 (1960), 20—104.
- [2] J. F. ADAMS, *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. 75 (1962), 603—632.
- [3] A. BOREL, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de LIE compacts*, Ann. of Math. 57 (1953), 115—207.
- [4] B. ECKMANN, *Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme*, Comment. Math. Helv. 15 (1942—3), 318—339.

(Received December 20, 1962)