

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 37 (1962-1963)

**Artikel:** Über eine Kontinuitätsgleichung.  
**Autor:** Egg, Kurt  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28622>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 03.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über eine Kontinuitätsgleichung

von KURT EGG, Zürich

## I. Einleitung

Wir stellen uns das Problem, Lösungen  $u(t, x)$  der Kontinuitätsgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0 \quad (1)$$

bei vorgegebenen Anfangs- resp. Randwerten

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \sigma(x) & x &\geq 0 \\ u(t, 0) &= \varrho(t) & t &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

und möglichst beliebigem  $F(u)$  zu suchen. (1) ist unter gewissen Voraussetzungen dem System

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = F'(u), \quad \frac{du}{ds} = 0 \quad (3)$$

äquivalent. Die Lösungen von (3) sind Geraden, parallel zur  $t-x$ -Ebene mit der Steigung  $dx/dt = F'(u)$ . Ist nun  $F(u)$  nicht linear, so sieht man leicht, daß das System auch bei noch so glatten Anfangs- und Randwerten im allgemeinen keine eindeutigen und stetigen Lösungen besitzt. Man hat daher, unter Verzicht auf die Stetigkeit, den Begriff der Lösung von (1) zweckmäßig zu verallgemeinern. Die Kontinuitätsgleichung (1) können wir auch als Integralgleichung schreiben

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = F(u(t, x_1)) - F(u(t, x_2)). \quad (4)$$

Sind  $u$  und  $F$  stetig differenzierbar, so sind (1) und (4) äquivalent. (4) stellt aber die natürliche Verallgemeinerung von (1) dar. In dieser Form stellt sich zum Beispiel das Problem, die Dichte  $u(t, x)$  einer kompressiblen Flüssigkeit zu bestimmen, die durch ein zylindrisches, mit porösem Material gefülltes Rohr gepreßt wird.

*Definition.* Eine Lösung von (4) heißt eine verallgemeinerte oder *schwache* Lösung von (1).

Es gibt aber auch andere Möglichkeiten, verallgemeinerte Lösungen von (1) zu definieren; zum Beispiel nennt P.D.LAX in [1] eine integrierbare Funktion  $u(t, x)$  eine schwache Lösung der Gleichung (1) in  $t \geq 0$  mit den Anfangswerten  $u(0, x) = u_0(x)$ , wenn diese die Relation

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_t u + f_x F(u) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(0, x) u_0(x) dx = 0 \quad (5)$$

erfüllt, wobei  $u_0(x)$  eine integrierbare, für alle  $-\infty < x < \infty$  definierte Funktion ist und  $f(t, x)$  eine beliebige, stetig-differenzierbare Funktion, die außerhalb eines beliebig großen, abgeschlossenen Gebietes verschwindet. (4) und (5) sind für stückweise stetig-differenzierbare Funktionen  $u(t, x)$  äquivalente Definitionen, denn für beide gibt es eine gleichwertige Formulierung:

Eine, in einem abgeschlossenen Gebiet  $\Omega$  der  $t-x$ -Ebene stückweise stetig-differenzierbare Lösung  $u(t, x)$  von (1), deren Unstetigkeitsstellen nur längs stückweise glatten Kurvenstücken  $x = \xi(t)$  auftreten, die sich höchstens in ihren Endpunkten treffen können, ist in  $\Omega$  genau dann eine schwache Lösung, falls längs diesen Unstetigkeitslinien die Gleichung gilt

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{F(u_-) - F(u_+)}{u_- - u_+} \quad (6)$$

wo

$$u_- = u(t, \xi - 0), \quad u_+ = u(t, \xi + 0).$$

(6) ist eine Verallgemeinerung der Schock-Relation von RANKINE und HYGONOT für kompressible Flüssigkeiten und stellt eine Differenzialgleichung für die Fortpflanzung der Unstetigkeitsstellen dar, s. [5]. O.A. OLEJNIK gibt in [2] eine 3. Definition einer schwachen Lösung: In der  $t-x$ -Ebene betrachtet man den Rand  $\mathfrak{C}$ , gebildet aus den Projektionen zweier Charakteristiken von (3) durch den Punkt  $(t_0, x_0)$  und dem Stück der Geraden  $t = t'$ , das jene aus dieser herauschneiden, wobei  $0 < t' < \gamma, \gamma > 0$ . Eine beschränkte, integrierbare Funktion  $u(t, x)$  heißt jetzt eine schwache Lösung von (1), wenn

$$\int_{\mathfrak{C}} u dx - F dt = 0 \quad (7)$$

für jeden solchen Rand. Diese Definition ist etwas weniger allgemein als die zuerst gegebenen.

Keine der drei Definitionen genügt aber, um die Eindeutigkeit der Lösungen, bei gegebenen Anfangs- und Randwerten zu garantieren, wie schon ganz einfache Beispiele zeigen.

Die Bedingungen für eine schwache Lösung müssen also durch ein geeignetes Prinzip ergänzt werden, das gestattet, aus der Vielzahl der Lösungen eine bedeutende herauszulesen. Ein Kriterium dafür, welche aus den möglichen Lösungen man auswählen soll, liefert sicher das tatsächliche Verhalten einer physikalischen Größe, die den genannten Bedingungen gehorcht.

Hier eine kurze Übersicht über die von verschiedenen Autoren benutzten Eindeutigkeitskriterien:

Die Tatsache, daß die Lösung des Problems (2), (4) nicht eindeutig bestimmt ist, beruht darauf, daß ein reales Medium gar keine Unstetigkeiten in den Zustandsgrößen  $u$  entwickelt. Man kann höchstens ein sehr starkes Anwachsen von  $\text{grad}(u)$  feststellen.  $\text{grad}(u)$  kann allerdings so groß werden, daß  $u$  dort genügend gut durch eine unstetige Funktion approximiert werden kann. An solchen Stellen, wo  $\text{grad}(u)$  sehr groß ist, treten aber viskose Kräfte auf, und  $u$  genügt dann nicht mehr der Gleichung (1), in der ja die Viskosität vernachlässigt wurde. Diese sorgt dafür, daß  $u$  keine Sprünge machen kann, sie glättet die Unstetigkeiten in  $u$ . Um die Viskosität berücksichtigen zu können, ergänzen wir (1) durch einen Term 2. Ordnung.

$$u_t + F(u)_x = \mu u_{xx}. \quad (8)$$

$\mu$  heißt der Viskositätskoeffizient. Gleichung (8) hat, bei beliebigen, integrierbaren Anfangs- und Randwerten für alle  $x \geq 0, t \geq 0$  stetig-differenzierbare Lösungen. Könnte man nun in der Lösung von (8)  $\mu \rightarrow 0$  gehen lassen, so erhielte man eine solche von (1). In der Tat hat O.A.LADYZENSKAYA in [3] gezeigt, daß für das einfache Anfangswertproblem und für konvexe  $F$  dieser Grenzwert existiert, und daß die Grenzlösung eine schwache Lösung im Sinne von LAX ist. Eine schwache Lösung von (1) als Grenzlösung einer solchen parabolischen Gleichung 2. Ordnung, wenn der Koeffizient der höchsten Ableitung verschwindet, zu definieren, wäre also eine Möglichkeit, um die Eindeutigkeit zu erzwingen. Eine explizite Lösung wurde auf diesem Wege von E.HOPF in [4] für das einfache Anfangswertproblem und die Funktion  $F(u) = \frac{1}{2}u^2$  gegeben. HOPF gelingt es durch eine einfache Transformation  $\varphi = \varphi(u)$  die Gleichung

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}$$

auf die Form

$$\mu \varphi_{xx} = \varphi_t$$

zu bringen. Das ist die gewöhnliche Wärmeleitungsgleichung, und für sie hat man eine explizite Lösung, und die Grenzfunktion für  $\mu \rightarrow 0$  kann direkt berechnet werden. HOPF behauptet jedoch, es sei nicht möglich, für eine andere Funktion  $F(u)$  auf diesem Wege eine explizite Lösung zu finden.

Wenn in der Umgebung von «Unstetigkeitsstellen» in der Zustandsgröße  $u$  eines Mediums viskose Kräfte auftreten, hat das zur Folge, daß die Entropie  $S$  des Mediums beim Durchgang durch eine Unstetigkeitsstelle zunimmt. Wird  $S$  als Funktion vom Druck  $p$  und dem spezifischen Volumen  $\tau$  dargestellt, so ist, wie R.COURANT und K.O.FRIEDRICHS in [5] zeigen, die Zunahme  $\Delta S$  der Entropie von 3. Ordnung in  $\Delta p$  und  $\Delta \tau$ . Diesen Sachverhalt drückt die Eindeutigkeitsbedingung (9) von O.A.OLEJNIK aus. Sie beweist in [6] für konvexe  $F$ , daß die Bedingungen (5) und

$$u(t, x_1) - u(t, x_2) \leq K(t) (x_1 - x_2) \quad (9)$$

für zwei beliebige Punkte  $(t, x_1), (t, x_2)$ , wo  $K(t)$  eine monoton fallende Funktion ist, nur durch eine einzige Funktion  $u(t, x)$  befriedigt werden können. (9) wird die Entropiebedingung genannt. Man vermutet, siehe bei A. DOUGLIS in [7], daß (9) durch die viel allgemeinere Bedingung

$$u(t, x - 0) \geq u(t, x + 0)$$

ersetzt werden könne. Diese Vermutung wurde von B. L. ROSCHDESTVENSKY in [10] für stückweise glatte  $u$  bestätigt.

In [8] verwendet O. A. OLEJNIK eine dritte Art von Eindeutigkeitsforderung. Sie zeigt dort, daß durch (7) eine schwache Lösung eindeutig bestimmt ist, wenn diese die Randbedingungen erfüllt und noch folgenden zwei Bedingungen genügt:

1. Ist  $u(t, x)$  in einem Punkte  $(t_0, x_0)$  stetig, so gibt es genau eine Charakteristik aus (3), die durch den Punkt  $(t_0, x_0, u(t_0, x_0))$  geht und auf der  $u(t, x)$  für  $0 < t \leq t_0$  stetig ist.

2. Ist  $u(t, x)$  in  $(t_0, x_0)$  unstetig, so gibt es mindestens zwei Charakteristiken aus (3), deren Projektionen in die  $t-x$ -Ebene durch  $(t_0, x_0)$  gehen und auf denen  $u(t, x)$  für  $0 < t < t_0$  stetig ist.

Nennen wir eine Unstetigkeitslinie  $x = \xi(t)$  einen Schock, und die Punkte  $(t, x < \xi(t))$  dessen Rückseite und die Punkte  $(t, x > \xi(t))$  dessen Vorderseite, so lassen sich die obigen zwei Bedingungen physikalisch so interpretieren: Die Geschwindigkeit des Mediums unmittelbar hinter dem Schock ist größer und unmittelbar davor kleiner als die Schockgeschwindigkeit.

Diese Eindeutigkeitsforderung werden wir in unserm Falle des gemischten Anfangs-Randwertproblems anwenden.

## II. Existenz einer Lösung

Wie schon erwähnt, gelang es E. HOPF in [4] eine verallgemeinerte Lösung der Aufgabe (1) mit  $F = u^2/2$  für das einfache Anfangswertproblem zu finden. Seine Lösung hat die Form

$$u(t, x) = \frac{x - y^*(t, x)}{t},$$

wo  $y^*(t, x)$  der größte Wert ist, wo

$$\Phi(t, x, y) = \frac{(x - y)^2}{2t} + \int_0^y u_0(\eta) d\eta$$

als Funktion von  $y$  ihr Minimum annimmt.  $u_0(x)$  sind die Anfangswerte  $u(0, x)$ .

Für die Funktion  $F(u) = -\log(a + b e^{-u})$ ,  $a + b = 1$ , löst P.D.LAX in [1] die Gleichung durch Betrachtung der entsprechenden Differenzgleichung

$$u(t + \Delta, x) - u(t, x) = -F(u(t, x)) - F(u(t, x - \Delta)).$$

Die Grenzlösung ( $\Delta \rightarrow 0$ ) lautet

$$u(t, x) = \log \left( \frac{b}{a} \left( \frac{t}{x - y^*} - 1 \right) \right),$$

wo  $y^*$  der größte Wert ist, wo

$$\Phi(t, x, y) = \int_0^y u_0(\eta) d\eta - t \left[ \log \left( 1 - \frac{x - y}{t} \right) - \frac{x - y}{t} \log \left( \frac{t - x + y}{x - y} \cdot \frac{b}{a} \right) \right]$$

als Funktion von  $y$  ihr Maximum annimmt.

Im ersten Fall ist  $F$  eine konvexe, im zweiten Fall eine konkave Funktion von  $u$ . Für solche Funktionen können wir, siehe S.MANDELBROJT [9] eine Konjugierte  $H$  definieren, für konvexes  $F$  durch

$$H(s) = \text{Max}_u \{us - F(u)\}$$

und

$$H(s) = \text{Min}_u \{us - F(u)\}$$

für konkaves  $F$ .

Ist  $F$  differenzierbar, so ist

$$H(s) = G(s) \cdot s - F(G(s)), \quad (10)$$

wo  $G(s)$  der Wert  $u$  ist, wo  $\{us - F(u)\}$  als Funktion von  $u$  ihr Max. resp. ihr Min. annimmt. Offensichtlich ist

$$G(F'(s)) \equiv s. \quad (11)$$

Daraus folgt unmittelbar mit (10)

$$H'(s) = G(s). \quad (12)$$

Eine einfache Rechnung zeigt aber, daß die beiden oben verwendeten Funktionen  $\Phi$  vom Typ

$$\Phi(t, x, y) = \int_0^y u_0(\eta) d\eta + t H \left( \frac{x - y}{t} \right)$$

sind, mit  $H$  als Konjugierter zur entsprechenden Funktion  $F$ . Ist  $u_0$  beschränkt, so hat  $\Phi$  für jedes  $(t, x)$  ein Extremum, weil  $H$  ebenfalls konvex resp. konkav ist. Ist  $y^*(t, x)$  wieder der größte Wert, wo dieses Extremum angenommen wird, so haben die beiden oben angegebenen Lösungen die Form

$$u(t, x) = G \left( \frac{x - y^*}{t} \right), \quad (13)$$

wie man leicht überlegt. Ist  $u_0$  stetig, so folgt sofort durch Differenziation von  $\Phi(t, x, y)$  nach  $y$

$$0 = u_0(y^*) - G\left(\frac{x - y^*}{t}\right)$$

und daraus wegen (11)

$$\frac{x - y^*}{t} = F'(u_0(y^*)).$$

Das verlangen aber gerade die Gleichungen (3), nämlich  $u = \text{konst.} = u_0(y^*)$  längs den Geraden  $\frac{x - y^*}{t} = \text{konst.}$  Die Lösung (13) besteht also aus Charakteristiken, definiert durch (3). Die Vermutung, daß es sich um eine verallgemeinerte Lösung von (1) handelt, liegt somit auf der Hand.

Den hier skizzierten Weg, schwache Lösungen der Gleichung (1) zu finden, wollen wir auch im Falle des gemischten Anfangs-Randwertproblems begehen.

Über die auftretenden Funktionen setzen wir folgendes voraus:

1.  $F(u)$  ist zweimal stetig differenzierbar (14.1)

2.  $F'(0) = 0$  und  $F'' > 0$ . (14.2)

3. Die beiden Funktionen  $\sigma(x)$  und  $\rho(t)$  in (2) sind positiv, beschränkt und integrierbar. (14.3)

Die Punkte auf  $\Gamma = \{(t \geq 0, 0), (0, x \geq 0)\}$  bezeichnen wir kurz mit  $s$ , und zwar  $s = -t$  auf  $x = 0$  und  $s = +x$  auf  $t = 0$ .

Wählen wir nun einen beliebigen Punkt  $(t, x)$  aus

$$\mathfrak{G} = \{(t, x), t \geq 0, x \geq 0\}$$

und einen Punkt  $s$  auf  $\Gamma$ , dann hat das System (3) genau eine Lösung  $U(t, x, s)$ , deren Projektion durch diese beiden Punkte geht:

$$U(t, x, s) = \begin{cases} G\left(\frac{x - s}{t}\right) & s \geq 0 \\ G\left(\frac{x}{t + s}\right) & s \leq 0 \end{cases}. \quad (15)$$

Dann betrachten wir die Funktion

$$\Phi(t, x, s) = \begin{cases} \int_0^s \sigma(\xi) - U(t, x, \xi) d\xi & s \geq 0 \\ \int_0^{-s} F(U(t, x, \xi)) - F(\rho(\xi)) d\xi & s \leq 0 \end{cases}. \quad (16)$$

$\Phi$  ist in allen 3 Argumenten stetig, wie man sofort sieht. Außerdem strebt  $\Phi$  gegen  $+\infty$ , für  $s$  gegen  $+\infty$ , und  $-t$ .

Die Richtigkeit der ersten dieser beiden Behauptungen ergibt sich aus

$$\Phi(t, x, s) = \int_0^s \sigma(\xi) d\xi + tH\left(\frac{x-s}{t}\right) - tH\left(\frac{x}{t}\right)$$

wegen (12). Da  $H$  konvex, geht die rechte Seite dieser Gleichung gegen  $+\infty$ , für  $s$  gegen  $+\infty$ . Um auch die zweite der obigen Behauptungen zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß wegen (10)

$$(t - \xi)H\left(\frac{x}{t - \xi}\right) = x G\left(\frac{x}{t - \xi}\right) - (t - \xi)F\left(G\left(\frac{x}{t - \xi}\right)\right)$$

ist, und daher

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (t - \xi)H\left(\frac{x}{t - \xi}\right) \right] = \\ & = xG'\left(\frac{x}{t - \xi}\right) \frac{x}{(t - \xi)^2} + F\left(G\left(\frac{x}{t - \xi}\right)\right) - (t - \xi) \frac{x}{t - \xi} \cdot G'\left(\frac{x}{t - \xi}\right) \frac{x}{(t - \xi)^2} = \\ & = F\left(G\left(\frac{x}{t - \xi}\right)\right), \end{aligned}$$

also

$$\int_0^{-s} F\left(G\left(\frac{x}{t - \xi}\right)\right) d\xi = (t + s)H\left(\frac{x}{t + s}\right) - tH\left(\frac{x}{t}\right)$$

und somit

$$\Phi(t, x, s) = (t + s)H\left(\frac{x}{t + s}\right) - tH\left(\frac{x}{t}\right) - \int_0^{-s} F(\varrho(\xi)) d\xi.$$

Aber weil  $H$  konvex ist, geht  $H(u)/u$  gegen  $\infty$ , für  $|u|$  gegen  $\infty$ , also

$$(t + s)H\left(\frac{x}{t + s}\right)$$

gegen  $\infty$ , für  $s$  gegen  $-t$ .

$\Phi$  hat also bei jedem festen  $(t, x)$  auf dem Intervall  $-t < s < \infty$  ein wohlbestimmtes Minimum.  $s_+(t, x)$  sei der größte,  $s_-(t, x)$  der kleinste Wert, wo  $\Phi$  dieses Minimum erreicht. Dann gilt

**Lemma I.** *Ist  $x < x_1$ , dann ist für jedes  $t$   $s_+(t, x) \leq s_-(t, x_1)$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die Differenz

$$\Phi(t, x_1, s) - \Phi(t, x_1, s_+(t, x))$$

für  $0 \leq s < s_+(t, x)$ .

$$\begin{aligned} \Phi(t, x_1, s) - \Phi(t, x_1, s_+(t, x)) &= \int_0^s \sigma(\xi) - G\left(\frac{x_1 - \xi}{t}\right) d\xi - \int_0^{s_+(t, x)} \sigma(\xi) - G\left(\frac{x_1 - \xi}{t}\right) d\xi = \\ &= \int_{s_+(t, x)}^s \sigma(\xi) - G\left(\frac{x - \xi}{t}\right) d\xi + \int_{s_+(t, x)}^s G\left(\frac{x - \xi}{t}\right) - G\left(\frac{x_1 - \xi}{t}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Hier ist das 1. Integral nicht negativ, wegen der Definition von  $s_+(t, x)$ , und das 2. Integral ist positiv, weil  $G$  monoton wachsend ist, und  $x < x_1$ , also

$$G\left(\frac{x - \xi}{t}\right) - G\left(\frac{x_1 - \xi}{t}\right) < 0.$$

Somit ist  $\Phi(t, x_1, s) - \Phi(t, x_1, s_+(t, x)) > 0$  für alle  $0 \leq s < s_+(t, x)$ .

Wir haben aber zu zeigen, daß diese Ungleichung richtig ist für alle  $-t < s < s_+(t, x)$ . Zunächst ist

$$\begin{aligned} \Phi(t, x_1, s) - \Phi(t, x_1, s_+(t, x)) &= [\Phi(t, x_1, s) - \Phi(t, x, s)] + \\ &+ [\Phi(t, x, s_+(t, x)) - \Phi(t, x_1, s_+(t, x))] + [\Phi(t, x, s) - \Phi(t, x, s_+(t, x))]. \end{aligned}$$

Die letzte Klammer ist nicht negativ für alle  $-t < s < s_+(t, x)$ , die zweit-letzte ist positiv, denn

$$\Phi(t, x, s_+(t, x)) - \Phi(t, x_1, s_+(t, x)) = \int_0^{s_+(t, x)} G\left(\frac{x_1 - \xi}{t}\right) - G\left(\frac{x - \xi}{t}\right) d\xi > 0,$$

weil  $x < x_1$ , und für die erste folgt

$$\Phi(t, x_1, s) - \Phi(t, x, s) = \int_0^{-s} F\left(G\left(\frac{x_1}{t - \xi}\right)\right) - F\left(G\left(\frac{x}{t - \xi}\right)\right) d\xi.$$

Wegen (14.2) und (11) ist nämlich auch

$$G(0) = 0, \tag{17}$$

also ist  $G(u) > 0$  für  $u > 0$ , und  $F(u)$  ist, auch wegen (14.2), monoton wachsend für  $u > 0$ , und da  $x < x_1$ , ist auch die erste Klammer positiv. Damit ist gezeigt, daß für  $s_+(t, x) > 0$

$$\Phi(t, x_1, s) - \Phi(t, x_1, s_+(t, x)) > 0$$

für alle  $-t < s < s_+(t, x)$ . Ist aber  $s_+(t, x) < 0$ , dann ist

$$\begin{aligned} \Phi(t, x_1, s) - \Phi(t, x_1, s_+(t, x)) &= \\ &= \int_0^{-s} F\left(G\left(\frac{x_1}{t - \xi}\right)\right) - F(\varrho(\xi)) d\xi - \int_0^{-s_+(t, x)} F\left(G\left(\frac{x_1}{t - \xi}\right)\right) - F(\varrho(\xi)) d\xi = \\ &= \int_{-s_+(t, x)}^{-s} F\left(G\left(\frac{x}{t - \xi}\right)\right) - F(\varrho(\xi)) d\xi + \int_{-s_+(t, x)}^{-s} F\left(G\left(\frac{x_1}{t - \xi}\right)\right) - F\left(G\left(\frac{x}{t - \xi}\right)\right) d\xi. \end{aligned}$$

Hier ist das 1. Integral nicht negativ für  $s < s_+(t, x)$ , und das 2. Integral ist positiv, wegen  $x < x_1$ . Somit gilt für einen beliebigen Punkt  $(t, x)$  und alle  $s < s_+(t, x)$

$$\Phi(t, x, s) - \Phi(t, x_1, s_+(t, x)) > 0,$$

und daraus schließt man

$$s_-(t, x_1) \geq s_+(t, x).$$

**Lemma II.** Für jeden Punkt  $(t_0, x_0)$  in  $\mathfrak{G}$  gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \lim_{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)} s_-(t, x) &= s_-(t_0, x_0); \quad s_-(t_0, x_0 - 0) = s_-(t_0, x_0) \\ \lim_{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)} s_+(t, x) &= s_+(t_0, x_0); \quad s_+(t_0, x_0 + 0) = s_+(t_0, x_0), \end{aligned}$$

*Beweis.* Zuerst beweisen wir, daß  $s_-(t_0, x_0) = s_-(t_0, x_0 - 0)$ . Aus Lemma I folgt zunächst, daß  $s_-(t, x) \leq s_-(t, x_0)$  für  $x < x_0$ .  $s_-(t, x)$  ist also eine monoton nicht abnehmende Funktion von  $x$ , bei festem  $t$ . Also ist nur zu zeigen, daß  $s_-(t_0, x_0) - s_-(t_0, x) < \varepsilon$ , sobald  $x_0 - x < \delta_\varepsilon$ . Sei  $s_-(t_0, x_0)$  wieder zuerst positiv und  $0 \leq s \leq s_-(t_0, x_0) - \varepsilon$ , für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$ , dann ist

$$\begin{aligned} &\Phi(t_0, x, s) - \Phi(t_0, x, s_-(t_0, x_0)) = \\ &= \int_0^s \sigma(\xi) - G\left(\frac{x_0 - \xi}{t_0}\right) d\xi - \int_0^{s_-(t_0, x_0)} \sigma(\xi) - G\left(\frac{x - \xi}{t_0}\right) d\xi = \\ &= \int_{s_-(t_0, x_0)}^s \sigma(\xi) - G\left(\frac{x_0 - \xi}{t_0}\right) d\xi + \int_{s_-(t_0, x_0)}^s G\left(\frac{x_0 - \xi}{t_0}\right) - G\left(\frac{x - \xi}{t_0}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Hier ist das zweite Integral negativ. Der Integrand ist positiv, weil  $x_0 > x$ . Er kann beliebig klein gemacht werden, wenn nur  $x_0 - x$  genügend klein, so daß sich das Integral um beliebig wenig von Null unterscheidet. Das 1. Integral ist aber größer als eine, von Null verschiedene, positive Zahl. Das ergibt

$$\Phi(t_0, x, s) - \Phi(t_0, x, s_-(t_0, x_0)) > 0$$

für  $0 \leq s \leq s_-(t_0, x_0) - \varepsilon$ .

Jetzt sei  $-t < s < 0 < s_-(t_0, x_0) - \varepsilon$ , dann ist

$$\begin{aligned} &\Phi(t_0, x, s) - \Phi(t_0, x, s_-(t_0, x_0)) = \\ &= [\Phi(t_0, x, s) - \Phi(t_0, x_0, s)] + [\Phi(t_0, x_0, s) - \Phi(t_0, x_0, s_-(t_0, x_0))] + \\ &\quad + [\Phi(t_0, x_0, s_-(t_0, x_0)) - \Phi(t_0, x, s_-(t_0, x_0))] = \\ &= \int_0^{-s} F\left(G\left(\frac{x}{t_0 - \xi}\right)\right) - F\left(G\left(\frac{x_0}{t_0 - \xi}\right)\right) d\xi + [\Phi(t_0, x_0, s) - \Phi(t_0, x_0, s_-(t_0, x_0))] + \\ &\quad + \int_0^{s_-(t_0, x_0)} G\left(\frac{x - \xi}{t_0}\right) - G\left(\frac{x_0 - \xi}{t_0}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Die beiden Integrale hier sind negativ, können aber dem Betrag nach beliebig klein gemacht werden, dadurch daß man  $x_0 - x$  genügend klein macht. Die Differenz in der zweiten Klammer ist natürlich positiv, wegen der Definition von  $s_-(t_0, x_0)$  und  $s \leq s_-(t_0, x_0) - \varepsilon$ , und auch größer als eine bestimmte, positive, von  $\varepsilon$  abhängige Zahl. Dadurch ist

$$\Phi(t_0, x, s) - \Phi(t_0, x, s_-(t_0, x_0)) > 0$$

für  $-t < s \leq 0 \leq s_-(t_0, x_0) - \varepsilon$ .

Nun wollen wir aber noch zeigen, daß diese Ungleichung auch für  $s_-(t_0, x_0) < 0$  gilt. Sei wieder  $s \leq s_-(t_0, x_0) - \varepsilon$ , dann ist

$$\begin{aligned} & \Phi(t_0, x, s) - \Phi(t_0, x, s_-(t_0, x_0)) = \\ & = \int_{-s_-(t_0, x_0)}^{-s} F\left(G\left(\frac{x_0}{t_0 - \xi}\right)\right) - F(\varrho(\xi)) d\xi - \int_{-s_-(t_0, x_0)}^{-s} F\left(G\left(\frac{x_0}{t_0 - \xi}\right)\right) - F\left(G\left(\frac{x}{t_0 - \xi}\right)\right) d\xi. \end{aligned}$$

Hier schließt man wieder, gleich wie oben, daß, falls nur  $x_0 - x < \delta_\varepsilon$

$$\Phi(t_0, x, s) - \Phi(t_0, x, s_-(t_0, x_0)) > 0$$

für alle  $-t < s \leq s_-(t_0, x_0) - \varepsilon$ . Diese Ungleichung gilt also für alle  $(t_0, x_0)$ , woraus folgt, daß

$$s_-(t_0, x) > s_-(t_0, x_0) - \varepsilon$$

oder

$$s_-(t_0, x_0) - s_-(t_0, x) < \varepsilon,$$

sobald

$$x_0 - x < \delta_\varepsilon.$$

Um auch die 1. Behauptung von Lemma II zu beweisen, überlegen wir so:  
Aus

$$\Phi(t, x, s) \geq \Phi(t, x, s_-(t, x))$$

folgt, wenn wir den Grenzübergang  $(t, x)$  gegen  $(t_0, x_0)$  ausführen,

$$\Phi(t_0, x_0, s) \geq \Phi(t_0, x_0, \lim_{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)} s_-(t, x)),$$

das heißt aber

$$s_-(t_0, x_0) \leq \lim_{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)} s_-(t, x),$$

aber weil

$$s_-(t_0, x_0) = s_-(t_0, x_0 - 0) \geq \lim_{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)} s_-(t, x) \geq s_-(t_0, x_0),$$

folgt

$$\lim_{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)} s_-(t, x) = s_-(t_0, x_0).$$

Die Behauptungen betreffend  $s_+(t_0, x_0)$  beweist man analog.

**Lemma III.** *Ist im Punkte  $(t_1, x_1)$   $\Phi(t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)) = \Phi(t_1, x_1, s')$ , dann ist in jedem Punkt  $(t, x)$ ,  $t \leq t_1$ ,  $x \leq x_1$ , der Charakteristik, welche  $(t_1, x_1)$  mit dem Punkt  $s'$  auf  $\Gamma$  verbindet,  $s_+(t, x) = s' = s_-(t, x)$ .*

*Beweis.* Wir haben nur zu zeigen, daß

$$\Phi(t, x, s) > \Phi(t, x, s_+(t_1, x_1))$$

für alle  $s \neq s'$  in den genannten Punkten  $(t, x)$  dieser Charakteristik, denn dann erreicht  $\Phi(t, x, s)$  ihr Minimum in diesem Punkte nur in  $s = s'$ . Ist  $0 \geq s' > s > -t$ , dann ist

$$\begin{aligned} & \Phi(t, x, s) - \Phi(t, x, s') = \\ & = \int_{-s'}^{-s} F\left(G\left(\frac{x_1}{t_1 - \xi}\right)\right) - F(\varrho(\xi)) d\xi + \int_{-s'}^{-s} F\left(G\left(\frac{x}{t - \xi}\right)\right) - F\left(G\left(\frac{x_1}{t_1 - \xi}\right)\right) d\xi. \end{aligned}$$

Das 1. Integral ist positiv; das 2. ebenfalls, weil  $\frac{x}{t - \xi} > \frac{x_1}{t_1 - \xi}$  für  $-s' < \xi < t$ .

Ist  $0 \geq s > s'$ , dann ist der 2. Integrand negativ, daher das Integral ebenfalls positiv.

Ist  $s > 0 \geq s'$ , dann ergänzen wir die Differenz  $\Phi(t, x, s) - \Phi(t, x, s')$  wie folgt:

$$\begin{aligned} & \Phi(t, x, s) - \Phi(t, x, s') = \\ & = [\Phi(t, x, s) - \Phi(t_1, x_1, s)] + [\Phi(t_1, x_1, s') - \Phi(t, x, s')] + [\Phi(t_1, x_1, s) - \Phi(t_1, x_1, s')] \geq \\ & \geq \int_0^s G\left(\frac{x_1 - \xi}{t_1}\right) - G\left(\frac{x - \xi}{t}\right) d\xi + \int_0^{-s'} F\left(G\left(\frac{x_1}{t_1 - \xi}\right)\right) - F\left(G\left(\frac{x}{t - \xi}\right)\right) d\xi > 0, \end{aligned}$$

denn die 3. Klammer in der vorletzten Zeile ist nicht negativ. Das 1. Integral in der letzten Zeile ist positiv, weil  $\frac{x_1 - \xi}{t_1} > \frac{x - \xi}{t}$  für  $0 \leq \xi \leq s$ , das zweite ebenfalls, denn  $\frac{x_1}{t_1 - \xi} > \frac{x}{t - \xi}$  für  $0 \geq \xi \geq s'$ . Damit haben wir gezeigt, daß  $\Phi(t, x, s) > \Phi(t, x, s')$  für alle  $s \neq s'$ , zumindest wenn  $s' \leq 0$ .

Für  $s' > 0$  beweist man diese Tatsache analog.

**Satz 1.** *Ist die Funktion  $u(t, x) = U(t, x, s_+(t, x))$ , wobei  $U(t, x, s)$  durch (15) definiert ist, im Punkte  $(t_0, x_0)$*

1. *stetig, dann gibt es genau eine Charakteristik, das heißt eine Lösung des Systems (3), deren Projektion in die  $t-x$ -Ebene durch  $(t_0, x_0)$  geht, und  $u(t, x)$  ist in allen Punkten  $(t, x)$  im Innern von  $\mathfrak{G}$  mit  $t \leq t_0$ ,  $x \leq x_0$  dieser Charakteristik stetig,*

2. *unstetig, dann existieren mindestens zwei Charakteristiken, deren Projektionen durch  $(t_0, x_0)$  gehen und auf denen  $u(t, x)$  im Innern von  $\mathfrak{G}$  für  $t < t_0$ ,  $x < x_0$  stetig ist.*

*Beweis.* Aus Lemma I folgt zunächst, daß  $s_-(t, x)$  und  $s_+(t, x)$  an denselben Stellen stetig sind und daß dort  $s_-(t, x) = s_+(t, x)$ . An den Unstetigkeitsstellen ist  $s_-(t, x) \neq s_+(t, x)$ .  $U(t, x, s_+(t, x))$  ist also genau dort stetig, wo  $s_-(t, x) = s_+(t, x)$ , und unstetig, wo  $s_-(t, x) \neq s_+(t, x)$ . Ist  $u(t, x)$  in  $(t_1, x_1)$  stetig, dann ist, wegen Lemma III,  $U(t, x, s_+(t, x))$  längs der Charakteristik durch den Punkt  $(t_1, x_1, U(t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)))$  stetig für alle Punkte mit  $t \leq t_1, x \leq x_1$ , ausgenommen vielleicht im Endpunkt  $s_+(t_1, x_1)$  auf  $\Gamma$ . Ist  $u(t, x)$  in  $(t_1, x_1)$  unstetig, dann ist, gemäß Lemma III,  $s_-(t, x) = s_+(t, x)$  längs beiden Charakteristiken durch  $(t_1, x_1, U(t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)))$  und  $(t_1, x_1, U(t_1, x_1, s_-(t_1, x_1)))$  für alle Punkte mit  $t < t_1, x < x_1$ , ausgenommen vielleicht in den Endpunkten  $s_-(t_1, x_1)$  und  $s_+(t_1, x_1)$ .

**Satz 2.** *In jedem Unstetigkeitspunkt der Funktion  $u(t, x)$  gilt die Ungleichung*

$$u(t, x - 0) > u(t, x + 0).$$

*Beweis.* Wegen  $s_-(t, x) < s_+(t, x)$  und  $s_+(t, x - 0) = s_-(t, x)$  folgt die Behauptung sofort aus der Definition der Funktion  $u(t, x)$ .

**Lemma IV.** *Die Funktion  $u(t, x)$  genügt der Relation*

$$\int_{\mathfrak{C}} u \, dx - F(u) \, dt = 0, \quad (18)$$

wo  $\mathfrak{C}$  den Rand darstellt, der aus den beiden, im Beweis zu Satz 1 genannten, durch einen Unstetigkeitspunkt gehenden Charakteristiken und dem Stück, das diese aus  $\Gamma$  herausschneiden, besteht.

*Beweis.* Zuerst beweisen wir, daß

$$\Phi(t_1, x_1, s) = \int u \, dx - F(u) \, dt + \Psi(t_1, x_1) \quad (19)$$

für jeden Punkt  $(t_1, x_1)$ , wo das Integral erstreckt wird über die Charakteristik, die  $(t_1, x_1)$  und  $s$  verbindet und das Stück auf  $\Gamma$  zwischen 0 und  $s$ .  $\Psi$  sei eine Funktion nur von den Variablen  $t_1$  und  $x_1$ . Auf  $\Gamma$  ist  $u$  durch die entsprechenden Anfangs- resp. Randwerte zu ersetzen.  $u(t, x)$  ist hier die Lösung von (3), die den Punkt  $(t_1, x_1)$  mit  $s$  verbindet. Sei  $s$  etwa negativ, dann lautet die Behauptung

$$\Phi(t_1, x_1, s) = - \int_0^{-s} F(\varrho(t)) \, dt - \int_{-s}^{t_1} F(u) \, dt + \int_0^{x_1} u \, dx + \Psi(t_1, x_1),$$

oder die Differenz

$$\Phi(t_1, x_1, s) - \int u \, dx - F(u) \, dt$$

hängt von  $s$  nicht ab. Aber

$$\begin{aligned} & \Phi(t_1, x_1, s) - \int u dx - F(u) dt = \\ &= - \int_0^{-s} F \left( G \left( \frac{x_1}{t_1 - t} \right) \right) - F(\varrho(t)) dt - \int_0^{-s} F(\varrho(t)) dt + \int_{-s}^{t_1} F(u) dt - \int_0^{x_1} u dx = \\ &= - \int_0^{-s} F \left( G \left( \frac{x_1}{t_1 - t} \right) \right) dt + \int_{-s}^{t_1} F(u) dt - \int_0^{x_1} u dx . \end{aligned}$$

Wir haben also nur zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} - F \left( G \left( \frac{x_1}{t_1 + s} \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left[ \int_{-s}^{t_1} F(u) dt - \int_0^{x_1} u dx \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left[ - \int_{-s}^{t_1} F \left( G \left( \frac{x_1}{t_1 + s} \right) \right) dt + \int_0^{x_1} G \left( \frac{x_1}{t_1 + s} \right) dx \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left[ - F \left( G \left( \frac{x_1}{t_1 + s} \right) \right) (t_1 + s) + G \left( \frac{x_1}{t_1 + s} \right) x_1 \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} H \left( \frac{x_1}{t_1 + s} \right) (t_1 + s) = - F \left( G \left( \frac{x_1}{t_1 + s} \right) \right) , \end{aligned}$$

wie beim Beweis der Eigenschaften von  $\Phi$  gezeigt wurde. Für  $s > 0$  verfährt man genau gleich. Dabei ergibt sich auch, daß wir es in beiden Fällen mit derselben Funktion  $\Psi$  zu tun haben. Ist nun  $(t_1, x_1)$  ein Unstetigkeitspunkt von  $u(t, x) = U(t, x, s_+(t, x))$ , dann ist

$$\Phi(t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)) = \int_{\mathfrak{C}'} u dx - F(u) dt + \Psi(t_1, x_1)$$

und

$$\Phi(t_1, x_1, s_-(t_1, x_1)) = \int_{\mathfrak{C}''} u dx - F(u) dt + \Psi(t_1, x_1) ,$$

wo  $\mathfrak{C}'$ ,  $\mathfrak{C}''$  die oben beschriebenen Ränder sind. Subtrahieren wir diese beiden Zeilen voneinander, so resultiert die Beziehung (18).

**Satz 3.** Die Unstetigkeitspunkte der Funktion  $u(t, x)$  liegen auf Linien, deren  $x$ -Koordinaten eindeutige und stetige Funktionen von  $t$  sind. Die Zahl dieser Linien, die sich höchstens in ihren Endpunkten treffen können, ist höchstens abzählbar.

*Beweis.* Ist  $(t_1, x_1)$  eine Unstetigkeitsstelle von  $u(t, x)$ , dann geht durch  $(t_1, x_1)$  eine für alle  $t > t_1$  eindeutig bestimmte Unstetigkeitslinie, die sich so bestimmt: Auf der Geraden  $t' = \text{konst.} > t_1$  existiert genau ein Punkt  $(t', x')$  so, daß das Intervall  $[s_-(t_1, x_1), s_+(t_1, x_1)]$  ganz enthalten ist im Intervall  $[s_-(t', x'), s_+(t', x')]$ . Dieser Punkt ist die untere Grenze aller Punkte  $(t', x)$ , für die  $s_-(t', x) \geq s_+(t_1, x_1)$  und die obere Grenze aller Punkte  $(t', x)$ , für die

$s_+(t', x) \leq s_-(t_1, x_1)$ . Diese beiden Grenzen fallen nämlich zusammen, denn sonst wäre für alle Punkte  $(t', x)$  zwischen diesen Grenzen das Intervall  $[s_-(t', x), s_+(t', x)]$  im Intervall  $[s_-(t_1, x_1), s_+(t_1, x_1)]$  enthalten und die zugehörigen Charakteristikenpaare würden sich schneiden, was Satz 1 widerspricht. Es wäre aber noch die Möglichkeit, daß  $[s_-(t', x'), s_+(t', x')]$  rechts oder links von  $[s_-(t_1, x_1), s_+(t_1, x_1)]$  liegen würde. Der erste Fall ist wegen der linksseitigen Stetigkeit von  $s_-$  in  $(t', x')$  und der 2. Fall wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von  $s_+$  in  $(t', x')$  ausgeschlossen.

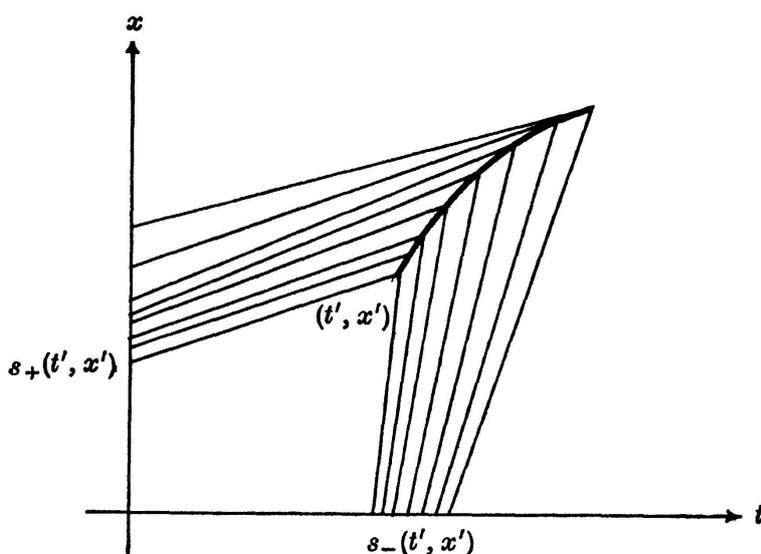


Fig. 1

Somit existiert auf jeder Geraden  $t' = \text{konst.}$  für alle  $t' > t_1$  genau ein solcher Punkt. Die Stetigkeit dieser Linie, die diese Punkte bilden, ist wegen Satz 1 klar. Da auf jeder Geraden  $t = \text{konst.}$  höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen von  $s_+(t, x)$  liegen, ist auch die letzte Behauptung von Satz 3 bewiesen. Daß sich diese Unstetigkeitslinien nur in ihren Endpunkten treffen können, folgt aus Satz 1.

**Satz 4.** Ist  $x = x(t)$  die Gleichung einer Unstetigkeitslinie von  $u(t, x)$ , dann gilt in jedem Punkt  $(t_1, x(t_1))$  die Beziehung

$$\frac{dx(t_1 + 0)}{dt} = \lim_{\substack{t_2 \rightarrow t_1 \\ t_2 > t_1}} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{F(u(t_1, x - 0)) - F(u(t_1, x + 0))}{u(t_1, x - 0) - u(t_1, x + 0)}. \quad (20)$$

*Beweis.*  $(t_1, x_1)$  und  $(t_2, x_2)$  seien zwei Punkte in der  $t-x$ -Ebene mit  $t_2 > t_1$ . Dann gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} & \Phi(t_2, x_2, s_+(t_2, x_2)) - \Phi(t_2, x_2, s_-(t_2, x_2)) = 0 \\ & - \Phi(t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)) + \Phi(t_1, x_1, s_-(t_1, x_1)) = 0. \end{aligned}$$

Addieren wir diese beiden Gleichheiten zu den Identitäten

$$\begin{aligned} \Phi(t_2, x_2, s_-(t_1, x_1)) - \Phi(t_2, x_2, s_-(t_1, x_1)) &= 0 \\ \Phi(t_1, x_1, s_+(t_2, x_2)) - \Phi(t_1, x_1, s_+(t_2, x_2)) &= 0, \end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= [\Phi(t_2, x_2, s_+(t_2, x_2)) - \Phi(t_2, x_2, s_-(t_1, x_1)) - \Phi(t_1, x_1, s_+(t_2, x_2)) + \\ &+ \Phi(t_1, x_1, s_-(t_1, x_1))] + [\Phi(t_2, x_2, s_-(t_1, x_1)) - \Phi(t_2, x_2, s_-(t_2, x_2))] + \\ &+ [\Phi(t_1, x_1, s_+(t_2, x_2)) - \Phi(t_1, x_1, s_+(t_1, x_1))]. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Klammern sind aber nicht negativ, somit ist

$$\begin{aligned} \Phi(t_2, x_2, s_+(t_2, x_2)) - \Phi(t_2, x_2, s_-(t_1, x_1)) - \Phi(t_1, x_1, s_+(t_2, x_2)) + \\ + \Phi(t_1, x_1, s_-(t_1, x_1)) \leq 0, \end{aligned} \tag{21}$$

Sind nun  $(t_1, x_1)$  und  $(t_2, x_2)$  Punkte auf einer Unstetigkeitslinie, so ist das Intervall  $[s_-(t_1, x_1), s_+(t_1, x_1)]$  im Intervall  $[s_-(t_2, x_2), s_+(t_2, x_2)]$  enthalten. Wir müssen den Punkt  $(t_2, x_2)$  genügend nahe bei  $(t_1, x_1)$  wählen, damit die Charakteristik durch  $(t_1, x_1)$  und  $s_-(t_2, x_2)$  positive Steigung besitzt, denn sonst kann es vorkommen, daß  $\Phi(t_1, x_1, s_-(t_2, x_2))$  beim Grenzübergang  $t_2 \rightarrow t_1$  nicht definiert ist. Unter Berücksichtigung von (19) und (21) folgt dann

$$\int_{\mathfrak{C}} U dx - F(U) dt \leq 0, \tag{22}$$

wobei  $\mathfrak{C}$  aus den Projektionen der Charakteristiken besteht, die die Punkte  $(t_1, x_1)$ ,  $(t_2, x_2)$  mit den Punkten  $s_+(t_2, x_2)$  und  $s_-(t_1, x_1)$  verbinden, und  $U = U(t, x, s)$  ist die Lösung von (3) auf  $\mathfrak{C}$ .

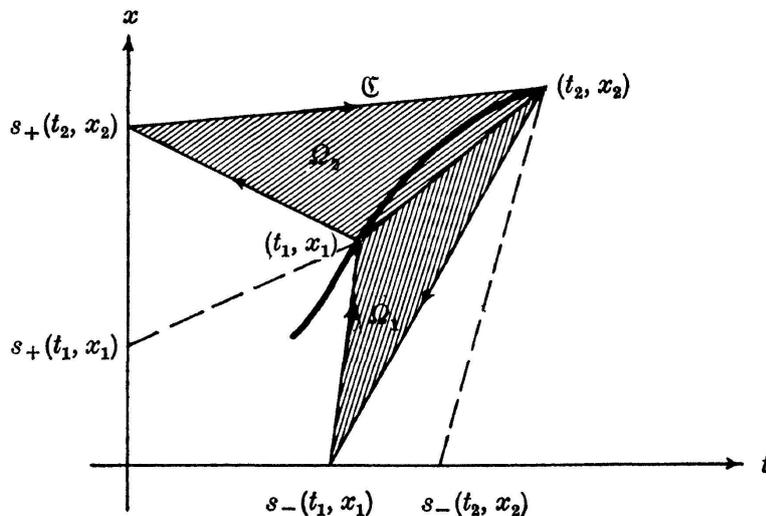


Fig. 2

Nun verbinden wir  $(t_1, x_1)$  und  $(t_2, x_2)$  mit einer Geraden.  $\Omega_1$  sei das Drei-

eck  $\{s_-(t_1, x_1), (t_1, x_1), (t_2, x_2)\}$ .  $U(t, x, s)$  stimmt mit  $u(t, x)$  auf der Geraden durch  $s_-(t_1, x_1)$  und  $(t_1, x_1)$  überein.  $u_1(t, x)$  sei die Lösung von (1) in  $\Omega_1$ , bestehend aus den Charakteristiken, die durch den Punkt  $s_-(t_1, x_1)$  gehen.  $u_1(t, x)$  ist in ganz  $\Omega_1$  außer in  $s_-(t_1, x_1)$  stetig differenzierbar. Wir können somit Gleichung (1) in  $\Omega_1$  integrieren und erhalten

$$\int_{\partial\Omega_1} u_1 dx - F(u_1) dt = 0. \quad (23)$$

Weil auf den beiden Seiten von  $\Omega_1$  durch  $s_-(t_1, x_1)U$  mit  $u_1$  übereinstimmt, so ist

$$\int_{(t_2, x_2), s_-(t_1, x_1), (t_1, x_1)} U dx - F(U) dt = \int_{(t_2, x_2), (t_1, x_1)} u_1 dx - F(u_1) dt. \quad (24)$$

Analog konstruiert man die Lösung  $u_2(t, x)$  von (1) im Gebiet

$$\Omega_2 = \Delta \{s_+(t_2, x_2), (t_2, x_2), (t_1, x_1)\}.$$

Für  $u_2$  gilt dann

$$\int_{(t_1, x_1), s_+(t_2, x_2), (t_2, x_2)} U dx - F(U) dt = \int_{(t_1, x_1), (t_2, x_2)} u_2 dx - F(u_2) dt \quad (25)$$

Addieren wir (24) und (25), so erhalten wir links den linken Teil von (22), und daraus

$$\int_{(t_2, x_2), (t_2, x_1)} u_1 dx - F(u_1) dt + \int_{(t_1, x_1), (t_2, x_2)} u_2 dx - F(u_2) dt \leq 0$$

Mit  $\Delta t = (t_2 - t_1)$ ,  $\Delta x = (x_2 - x_1)$  folgt daraus

$$\bar{u}_2 \Delta x - F(u_2^*) \Delta t \leq \bar{u}_1 \Delta x - F(u_1^*) \Delta t,$$

wo

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= u_i(\xi, \tau), & x_1 &\leq \xi \leq x_2, & t_1 &\leq \tau \leq t_2 \\ u_i^* &= u_i(\xi^*, \tau^*), & x_1 &\leq \xi^* \leq x_2, & t_1 &\leq \tau^* \leq t_2. \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang  $\Delta t$  gegen 0 geht  $\bar{u}_2$  und  $u_2^*$  gegen  $U(t_1, x_1, s_+(t_1, x_1))$ ,  $\bar{u}_1$  und  $u_1^*$  gegen  $U(t_1, x_1, s_-(t_1, x_1))$ .

Aber  $U(t_1, x_1, s_-(t_1, x_1)) = u(t_1, x_1 - 0)$ ,  $U(t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)) = u(t_1, x_1 + 0)$ . Also ist wegen  $u(t_1, x_1 - 0) > u(t_1, x_1 + 0)$

$$\lim_{\substack{t_2 \rightarrow t_1 \\ t_2 > t_1}} \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq \frac{F(u(t_1, x_1 + 0)) - F(u(t_1, x_1 - 0))}{u(t_1, x_1 + 0) - u(t_1, x_1 - 0)}. \quad (26)$$

Analog erhält man die Ungleichung

$$\lim_{\substack{t_2 \rightarrow t_1 \\ t_2 > t_1}} \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq \frac{F(u(t_1, x_1 + 0)) - F(u(t_1, x_1 - 0))}{u(t_1, x_1 + 0) - u(t_1, x_1 - 0)}. \quad (27)$$

Um diese abzuleiten, geht man aus von den Identitäten

$$\begin{aligned}\Phi(t_2, x_2, s_+(t_2, x_2)) - \Phi(t_2, x_2, s_-(t_2, x_2)) &= 0 \\ \Phi(t_1, x_1, s_-(t_1, x_1)) - \Phi(t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)) &= 0 \\ \Phi(t_2, x_2, s_+(t_1, x_1)) - \Phi(t_2, x_2, s_+(t_1, x_1)) &= 0 \\ \Phi(t_1, x_1, s_-(t_2, x_2)) - \Phi(t_1, x_1, s_-(t_2, x_2)) &= 0.\end{aligned}$$

Aus diesen erhält man durch Addition

$$\begin{aligned}0 &= [\Phi(t_2, x_2, s_+(t_1, x_1)) - \Phi(t_2, x_2, s_-(t_2, x_2)) - \Phi(t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)) + \\ &+ \Phi(t_1, x_1, s_-(t_2, x_2))] + [\Phi(t_2, x_2, s_+(t_2, x_2)) - \Phi(t_2, x_2, s_+(t_1, x_1))] + \\ &+ [\Phi(t_1, x_1, s_-(t_1, x_1)) - \Phi(t_1, x_1, s_-(t_2, x_2))].\end{aligned}$$

Aber die letzten beiden Klammern sind nicht positiv, also ist die erste Klammer nicht negativ. Dies führt zu einer, zu (22) analogen Ungleichung

$$\int_{\mathfrak{C}'} U dx - F(U) dt \geq 0$$

wo  $\mathfrak{C}'$  aus den Geraden besteht, die  $(t_1, x_1)$ ,  $(t_2, x_2)$  mit  $s_+(t_1, x_1)$  und  $s_-(t_2, x_2)$  verbinden. Die restlichen Schlüsse bis zur Ungleichung (27) sind analog wie oben.

Aus (27) und (26) aber ergibt sich die Behauptung des Satzes. In der gleichen Weise beweist man, daß (20) auch richtig ist für  $dx(t-0)/dt$ , außer in den Punkten, wo zwei Unstetigkeits-Linien zusammenstoßen, denn dort konvergieren die Ränder, der im obigen Beweis benutzten Dreiecke nicht gegen die Projektionen der Charakteristiken durch die Grenzpunkte.

**Lemma V.** *Auf  $t = 0$  für positive  $x$  resp. auf  $x = 0$  für positive  $t$  ist eine Folge von beschränkten Funktionen  $\sigma_n(x)$  resp.  $\varrho_n(t)$  definiert, so daß auf jedem endlichen Intervall  $[a, b]$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\sigma_n(x) - \sigma(x)| dx = 0 \text{ resp. } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |F(\varrho_n(t)) - F(\varrho(t))| dt = 0.$$

$\Phi_n$  sei die mit  $\varrho_n$  resp.  $\sigma_n$  statt mit  $\varrho$  resp.  $\sigma$  konstruierte Funktion (16),  $s_+^n(t, x)$  der größte,  $s_-^n(t, x)$  der kleinste Wert, wo  $\Phi_n$  das Minimum als Funktion von  $s$  annimmt. Ist  $u^n(t, x) = U(t, x, s_+^n(t, x))$ ,  $\mathfrak{I}$  ein beliebiges Intervall auf einer Geraden parallel zu  $t = 0$  oder  $x = 0$ , dann konvergieren  $u^n(t, x + 0)$  und  $u^n(t, x - 0)$  auf jedem solchen Intervall gleichmäßig gegen  $u(t, x)$  in allen Punkten, wo diese stetig ist.

*Beweis.* Wir betrachten das Intervall  $\mathfrak{I} = \{(t, x'), t_0 \leq t \leq t_1\}$ . Für jeden Punkt  $(t, x') \in \mathfrak{I}$  nehmen  $\Phi_n(t, x', s)$  und  $\Phi(t, x', s)$  ihr Minimum bezüglich  $s$  auf einem abgeschlossenen Intervall  $-t + \delta \leq s \leq x'$ ,  $\delta > 0$  an. Für

$s = -t$  wird ja  $\Phi(t, x', s)$  unendlich, also ist nur zu zeigen, daß  $s_+(t, x') \leq x'$ .  
Dazu bilden wir

$$\begin{aligned}\Phi(t, x', x') - \Phi(t, x', s) &= \int_s^{x'} \sigma(\xi) - G\left(\frac{x' - \xi}{t}\right) d\xi = \\ &= \int_s^{x'} \sigma(\xi) d\xi + tH(0) - tH\left(\frac{x' - s}{t}\right) < 0\end{aligned}$$

für alle  $s > x'$ , und gleich Null für  $s = x'$ , weil  $H'(0) = G(0) = 0$  und  $\sigma > 0$ .  
Also ist  $s_+(t, x') \leq x'$ . Wählen wir jetzt  $s$  im Intervall  $-t' + \delta \leq s \leq x'$ ,  
dann ist für den Punkt  $(t', x') \in \mathfrak{I}$  und  $s < 0$

$$\begin{aligned}|\Phi_n(t', x', s) - \Phi(t', x', s)| &\leq \left| \int_0^{-s} F(\varrho(t)) - F(\varrho_n(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^{-s} |F(\varrho(t)) - F(\varrho_n(t))| dt \leq \int_0^{+t_1} |F(\varrho(t)) - F(\varrho_n(t))| dt < \varepsilon,\end{aligned}$$

sobald  $n > H_\varepsilon$ , und wenn  $s > 0$ , so ist

$$|\Phi_n(t', x', s) - \Phi(t', x', s)| \leq \int_0^{x'} |\sigma_n(x) - \sigma(x)| dx < \varepsilon',$$

sobald  $n > N_{\varepsilon'}$  ist. Ist  $\varepsilon'' = \max(\varepsilon', \varepsilon)$  und  $N_{\varepsilon''} = \max(N_{\varepsilon'}, N_\varepsilon)$ , dann  
ist für alle  $(t', x') \in \mathfrak{I}$

$$|\Phi_n(t', x', s) - \Phi(t', x', s)| < \varepsilon''$$

für alle  $n > N_{\varepsilon''}$  und  $-t' + \delta' \leq s \leq x'$ .

Daher ist für alle Stetigkeitspunkte von  $u(t, x)$  auf  $\mathfrak{I}$ , weil  $\Phi(t', x', s)$   
das Minimum nur in einem Punkt, in  $s_+(t', x') = s_-(t', x')$  annimmt,

$$|s_+(t', x') - s_-^n(t', x')| < \delta_\varepsilon \quad \text{und} \quad |s_+(t', x') - s_+^n(t', x')| < \delta_\varepsilon,$$

also wegen der Stetigkeit von  $U(t, x, s)$ ,

$$|U(t', x', s_+^n(t', x')) - U(t', x', s_+(t', x'))| < \varepsilon_1$$

und

$$|U(t', x', s_-^n(t', x')) - U(t', x', s_+(t', x'))| < \varepsilon_2$$

für alle Stetigkeitspunkte  $(t', x')$  auf  $\mathfrak{I}$ . Aber

$$U(t', x', s_-^n(t', x')) = u^n(t', x' - 0)$$

und

$$U(t', x', s_+^n(t', x')) = u^n(t', x' + 0).$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

**Lemma VI. Das Integral**

$$\int_{\mathfrak{G}} u \, dx - F(u) \, dt$$

verschwindet auf jedem Rand  $\mathfrak{G}$ , gebildet aus einem Stück einer Parallelen zu einer der Geraden  $x = 0$  oder  $t = 0$ , den Charakteristiken durch dessen Endpunkte, welche Stetigkeitspunkte von  $u(t, x)$  sein sollen, und dem Teil, den diese aus dem Rand  $\Gamma$  herausschneiden.

*Beweis.* Wir wählen eine Folge von beschränkten, stückweise konstanten Funktionen  $\varrho^n(t)$  resp.  $\sigma^n(x)$ , die nach unten durch  $\varrho(t)$  resp.  $\sigma(x)$  beschränkt sind und in jedem endlichen Intervall fast überall gegen diese konvergieren. Dann sind für diese sicher die Voraussetzungen zu Lemma V erfüllt. Wir konstruieren wieder wie dort die Funktion  $u^n(t, x)$  und behaupten: Ihre Unstetigkeitslinien gehen nur von  $\Gamma$  aus. Sei  $(t_0, x_0)$  der Anfangspunkt einer Unstetigkeitslinie, die im Innern von  $\mathfrak{G}$  beginne,  $(t'_0, x'_0)$  ein weiterer Punkt auf ihr. Die Unstetigkeitslinien von  $u^n$ , die im Innern des Dreiecks

$$\{(t'_0, x'_0), s_+^n(t'_0, x'_0), s_-^n(t'_0, x'_0)\},$$

resp. des Vierecks  $\{(t'_0, x'_0), s_+^n(t'_0, x'_0), 0, s_-^n(t'_0, x'_0)\}$ , oder auf dessen Seite  $s_-^n, s_+^n$ , resp. auf dessen Seiten  $s_-^n, 0$  und  $s_+^n, 0$  beginnen, müssen auf der Unstetigkeits-Linie durch  $(t_0, x_0)$  enden, weil  $u^n$  stetig ist auf den Seiten durch  $(t'_0, x'_0)$ . Nun wählen wir  $(t'_0, x'_0)$  auf dieser Unstetigkeitslinie so, daß zwischen  $(t_0, x_0)$  und  $(t'_0, x'_0)$  keine weiteren Unstetigkeitslinien enden. Das ist immer möglich, sonst wäre  $(t_0, x_0)$  Endpunkt einer Unstetigkeitslinie. Zwischen  $s_+^n(t'_0, x'_0)$  und  $s_-^n(t'_0, x'_0)$  liegen somit nur solche Unstetigkeitspunkte von  $\varrho^n$  resp.  $\sigma^n$ , wo  $\varrho^n(t+0) < \varrho^n(t-0)$ , resp.  $\sigma^n(x-0) < \sigma^n(x+0)$ . Das ist aber unmöglich, weil

$$\sigma^n(s_+(t'_0, x'_0)) < \sigma^n(s_-(t'_0, x'_0)), \text{ resp. } \varrho^n(-s_+(t'_0, x'_0)) < \varrho^n(-s_-(t'_0, x'_0)).$$

Also ist  $\varrho^n$  resp.  $\sigma^n$  auf dem Intervall  $s_+^n(t'_0, x'_0) \geq s \geq s_-^n(t'_0, x'_0)$  konstant, aber das ist ausgeschlossen.

Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme, daß eine Unstetigkeitslinie im Innern von  $\mathfrak{G}$  beginne. Für jedes  $n$  betrachten wir den Rand  $\mathfrak{G}^n$ , bestehend aus den Strecken, die die Punkte  $(t_1, x_0), (t_2, x_0)$  untereinander und  $(t_1, x_0)$  mit  $s_+(t_1, x_0), (t_2, x_0)$  mit  $s_+(t_2, x_0)$  verbinden und dem Stück von  $\Gamma$ , das zwischen  $s_+^n(t_1, x_0)$  und  $s_+^n(t_2, x_0)$  liegt.

Die Unstetigkeitslinien von  $u^n$  und die Charakteristiken, die durch die Punkte  $(0, \sigma^n(a+0)), (0, \sigma^n(a-0))$  resp.  $(\varrho^n(a+0), 0), (\varrho^n(a-0), 0)$ , wenn  $\sigma^n(a+0) > \sigma^n(a-0)$  resp.  $\varrho^n(a-0) > \varrho^n(a+0)$ , gehen, längs denen die Ableitungen von  $u^n$  unstetig sind, teilen das Gebiet  $\Omega^n$ , das der Rand  $\mathfrak{G}^n$

umschließt in endlich viele Teilgebiete  $\Omega_i$  und  $u^n(t, x)$  hat stetige Ableitungen in jedem  $\Omega_i$ . Die Ränder der  $\Omega_i$  bestehen aus stückweise glatten Bogen. Es ist daher

$$0 = \iint_{\Omega_i} \{u_t^n + F(u^n)_x\} dx dt = \int_{\partial\Omega_i} u^n dx - F(u^n) dt \quad (28)$$

und nach Summation über alle  $\Omega_i$

$$0 = \sum_i \iint_{\Omega_i} \{u_t^n + F(u^n)_x\} dx dt = \int_{\mathfrak{C}^n} u^n dx - F(u^n) dt, \quad (29)$$

denn längs den Rändern, in denen die  $\Omega_i$  aneinanderstoßen, vernichten sich die Integrale rechts in (28), wegen (20), wie man sich sofort überlegt. Auf der Geraden zwischen  $(t_1, x_0)$  und  $(t_2, x_0)$  konvergiert  $u^n$  fast überall gleichmäßig gegen  $u$ , wie in Lemma V gezeigt wurde. Wegen der gemachten Annahmen über  $\sigma^n$  resp.  $\varrho^n$  konvergieren diese ebenfalls fast überall gleichmäßig gegen  $\sigma$  resp.  $\varrho$ . Weil  $u$  stetig ist in den Punkten  $(t_1, x_0)$  und  $(t_2, x_0)$ , konvergieren auch die Seiten von  $\mathfrak{C}^n$  durch diese Punkte gleichmäßig gegen die entsprechenden von  $\mathfrak{C}$ . Damit können wir in (29) zur Grenze,  $n \rightarrow \infty$ , übergehen und finden die Bestätigung des Lemmas. Für einen Rand, der einen Teil einer Geraden parallel zu  $t = 0$  enthält, beweist man das Lemma analog.

**Satz 5.** Die Funktion  $u(t, x) = U(t, x, s_+(t, x))$  genügt der Relation (4).

*Beweis.* Wir betrachten zwei Stetigkeitspunkte  $(t_1, x_1)$ ,  $(t_1, x_2)$  von  $u$ . Auf den Charakteristiken durch diese wählen wir zwei weitere Punkte  $(t'_1, x'_1)$ ,  $(t'_1, x'_2)$ . Auf dem Rand des so entstehenden Vierecks ist wegen Lemma VI

$$\begin{aligned} 0 &= \int u dx - F(u) dt = \int_{x'_1}^{x'_2} u(t'_1, x) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(t_1, x) dx + \int_{x'_2}^{x_2} u(t, x) dx + \\ &+ \int_{x_1}^x u(t, x) dx - \int_t^{t_1} F(u(t, x)) dt + \int_{t'_1}^{t_1} F(u(t, x)) dt = \\ &= F(u(t_1, x_1)) (t_1 - t'_1) - F(u(t_1, x_2)) (t_1 - t'_1) + \int_{x'_1}^x u(t'_1, x) dx + \\ &- \int_{x_1}^{x_2} u(t_1, x) dx + (x_2 - x'_2) u(t_1, x_2) + (x'_1 - x_1) u(t_1, x_1), \end{aligned} \quad (30)$$

weil  $u(t'_1, x'_1) = u(t_1, x_1)$  und  $u(t'_1, x'_2) = u(t_1, x_2)$ . Differenzieren wir (30) nach  $t'$ , so erhalten wir, wenn wir  $t = t'$  setzen,

$$\frac{d}{dt} \int_{x'_1}^{x'_2} u(t, x) dx = F(u(t, x'_1)) - F(u(t, x'_2)).$$

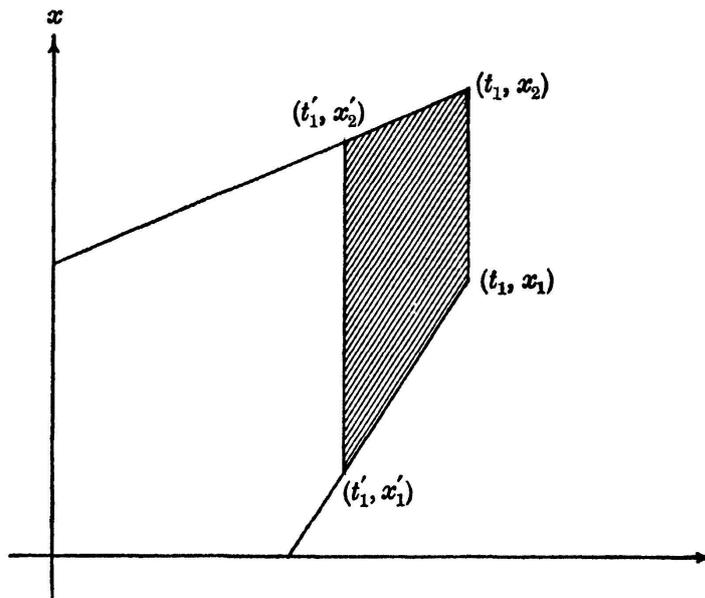


Fig. 3

**Satz 6.** Die Funktion  $u(t, x)$  erfüllt die Anfangsbedingungen, das heißt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_{x_1}^{x_2} \sigma(\xi) - u(\delta, \xi) d\xi \right| = 0 \quad (31)$$

für beliebige  $x_1, x_2$ , und die Randbedingungen, das heißt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_{x_1}^{x_2} F(u(\tau, \delta)) - F(\varrho(\tau)) d\tau \right| = 0 \quad (32)$$

für beliebige  $t_1, t_2$ .

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Lemma VI. Damit haben wir eine schwache Lösung unserer Gleichung (1) gefunden und auch gezeigt, daß sie die Anfangs- resp. Randbedingungen erfüllt. Zum Schluß wollen wir nun noch die Frage der Eindeutigkeit untersuchen.

### III. Eindeutigkeit

**Lemma VII.** Ist  $v(t, x)$  eine Lösung von (4) und hat sie die Eigenschaften der Funktion  $u$  in Satz 1, dann ist

$$\int_{\mathfrak{C}} v dx - F(v) dt = 0 \quad (33)$$

längs eines geschlossenen Weges  $\mathfrak{C}$ , gebildet aus den beiden Charakteristiken, welche durch einen Unstetigkeitspunkt gehen und den Stücken, die diese aus zwei zu den Geraden  $t = 0$  und  $x = 0$  parallelen Geraden herausschneiden.

*Beweis.* Weil  $v(t, x)$  die Eigenschaften von  $u$  in Satz 1 hat, so folgt, daß die Unstetigkeitspunkte von  $v$  auf stetigen Linien liegen. Aus (4) folgt weiter, daß diese Linien die Differentialgleichung (6) erfüllen. Im Gebiet  $\Omega$ , das  $\mathfrak{C}$  um-

schließt, verlaufen höchstens endlich viele Unstetigkeitslinien. Diejenigen, die nicht auf  $\mathfrak{C}$  beginnen, werden durch die Charakteristik durch ihre Anfangspunkte verlängert bis zu deren Schnittpunkt mit  $\mathfrak{C}$ . Diese Linien teilen  $\Omega$  in endlich viele Teilgebiete  $\Omega_i$ , in denen  $v$  stetig differenzierbar ist, außer vielleicht längs gewissen Charakteristiken, denn Unstetigkeiten in den Ableitungen von  $v$  können nur längs solchen auftreten. Dann ist, weil im Innern von  $\Omega_i$  die Gleichung (1) erfüllt ist,

$$0 = \iint_{\Omega_i} [v_t + F(v)_x] dx dt = \int_{\partial\Omega_i} v dx - F(v) dt.$$

Addiert man nun hier die rechten Seiten über alle  $i$ , so fallen die Anteile der Ränder im Innern von  $\Omega$  weg, da  $v$  die Bedingung (6) erfüllt, und es bleibt das Integral (33).

**Satz 7.** (Eindeutigkeitssatz) *Eine Funktion  $v(t, x)$ , die der Integralgleichung (4) genügt, die Eigenschaften der Funktion  $u$  in Satz 1 besitzt, die Anfangsbedingung (31) und die Randbedingung (32) erfüllt, stimmt mit der Funktion  $u(t, x)$ , welche in Lemma IV definiert ist, in allen Punkten, wo diese stetig ist, überein.*

*Beweis.* Zuerst führen wir in  $\mathfrak{G}$  neue Koordinaten ein:

$$t' = t - \alpha, \quad x' = x - \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Auf  $\Gamma' = \{(0, x'), x' \geq 0; (t', 0), t' \geq 0\}$  führen wir einen Parameter  $s'$  so ein, daß  $s' = x'$  auf  $t' = 0$  und  $s' = -t'$  auf  $x' = 0$ . Ist nun  $v(t, x)$  irgendeine Funktion  $v$ , die den oben genannten Bedingungen gehorcht, dann definieren wir

$$\Phi_\alpha(t', x', s') = \begin{cases} \int_0^{s'} v(\alpha, \alpha + \xi) - G\left(\frac{x' - \xi}{t'}\right) d\xi & s' \geq 0 \\ \int_0^{-s'} F\left(G\left(\frac{x'}{t' - \xi}\right)\right) - F(v(\xi + \alpha, \alpha)) d\xi, & s' \leq 0, \end{cases}$$

wobei  $\xi$  ein Punkt auf  $\Gamma'$  ist.  $\Phi_\alpha(t', x', s')$  hat dieselben Eigenschaften wie  $\Phi(t, x, s)$ .  $s_+^\alpha(t', x')$  sei der größte,  $s_-^\alpha(t', x')$  der kleinste Wert  $s'$ , wo  $\Phi_\alpha(t', x', s')$  ihr Minimum annimmt,  $s' \in [-t', \infty]$ . Dann ist die Funktion  $u_\alpha(t', x') = U(t', x', s_+^\alpha(t', x'))$ , wo  $U$  durch (15) definiert ist, offensichtlich eine Lösung der Gleichung (4) mit den Anfangswerten  $u_\alpha(0, x') = v(\alpha, x' + \alpha)$  und den Randwerten  $u_\alpha(t', 0) = v(t' + \alpha, \alpha)$ . Zuerst zeigen wir, daß  $u_\alpha$  mit  $v$  in allen Punkten  $(t', x')$  mit  $t' \geq 0, x' \geq 0$ , wo entweder  $u$  oder  $v$  stetig ist, übereinstimmt. Nehmen wir das Gegenteil an,  $v$  sei in  $(t'_0, x'_0)$  stetig, und  $u$  sei dort stetig oder unstetig, aber verschieden von  $v$ . Dann gibt es in einer Umgebung von  $(t'_0, x'_0)$  eine nicht abzählbare Menge  $\mathfrak{C}$  von Stetigkeitspunkten von  $u_\alpha$ , in denen  $u_\alpha \neq v$ . Aus der Menge  $\mathfrak{C}$  genügt es, diejenigen

Punkte zu betrachten, die auf  $t' = t'_0$  liegen. Aus der Eigenschaft 2. in Satz 1 folgt nämlich, daß  $v(t, x)$  bei festem  $t$  höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.  $\bar{t}'$  sei der größte Wert  $t'$ , für den die Charakteristik durch  $(t'_0, x', u_\alpha(t'_0, x' - 0))$  zu  $v$  gehört. Der Punkt  $(\bar{t}', \bar{x}')$  auf dieser Charakteristik kann kein Unstetigkeitspunkt von  $v$  sein, denn sonst gäbe es eine weitere Charakteristik, deren Projektion durch  $(\bar{t}', \bar{x}')$  ginge und die zu  $v$  gehörte, und  $v$  wäre stetig auf ihr bis zum Rand  $\Gamma$ . Wegen (33) wäre aber

$$\int_{\mathfrak{C}} v dx - F(v) dt = 0 \quad (34)$$

auf dem Rand  $\mathfrak{C}$ , gebildet aus diesen beiden Charakteristiken und dem Stück, das sie aus  $\Gamma'$  herausschneiden. Nun gilt aber für  $\Phi_\alpha(t', x', s')$  eine analoge Relation wie (19), nämlich

$$\Phi_\alpha(t', x', s') = \int u' dx' - F(u') dt' + \Psi_\alpha(t', x'), \quad (35)$$

wo das Integral erstreckt wird über  $\Gamma'$  von 0 bis  $s'$  und das Stück der Charakteristik, deren Projektion durch  $s'$  und  $(t', x')$  geht,  $\Psi_\alpha(t', x')$  eine Funktion ist, die nur von  $t'$  und  $x'$  abhängt, und  $u' = u'(t', x')$  ist die Lösung von (4), deren Projektion durch  $s'$  und  $(t', x')$  geht. Ist  $\bar{s}'$  der Punkt, wo die Projektion der 2. Charakteristik von  $v$  durch  $(\bar{t}', \bar{x}')$  den Rand  $\Gamma'$  schneidet, dann ist wegen (34) und (35), weil  $v$  mit der Funktion  $u'$  in (35) auf  $\mathfrak{C}$  übereinstimmt und weil  $s_+^\alpha(\bar{t}', \bar{x}') = s_+^\alpha(t'_0, x')$

$$\Phi_\alpha(\bar{t}', \bar{x}', s_+^\alpha(t'_0, x')) = \Phi_\alpha(\bar{t}', \bar{x}', \bar{s}'),$$

das heißt,  $\Phi_\alpha(\bar{t}', \bar{x}', s')$  nimmt ihr Minimum nicht nur in  $s_+^\alpha(t'_0, x')$  an, sondern noch in einem weiteren Punkt. Das ist aber nicht möglich wegen Lemma III. Also liegt  $(\bar{t}', \bar{x}')$  auf  $\Gamma'$ , oder er ist der Anfangspunkt einer Unstetigkeitslinie  $x' = x^*(t')$  von  $v$ . Diese bestimmt sich so:  $x^*$  ist bei festem  $t' = t^*$  die obere Grenze der Werte  $x''$  so, daß  $v$  stetig ist und daß die Projektion der Charakteristik von  $v$  durch  $(t^*, x'')$   $\Gamma'$  links von  $s_+^\alpha(t'_0, x')$  schneidet und die untere Grenze der Werte  $x''$ , so daß  $v$  stetig ist und daß die Projektion der Charakteristik von  $v$  durch  $(t^*, x'')$   $\Gamma'$  rechts von  $s_+^\alpha(t'_0, x')$  schneidet, wo  $(t'_0, x') \in \mathfrak{C}$ . Der Punkt  $(t^*, x^*)$  kann kein Stetigkeitspunkt von  $v$  sein, denn sonst wäre  $v$  in allen Punkten der Charakteristik, deren Projektion durch  $(t^*, x^*)$  und  $s_+^\alpha(t'_0, x')$  geht, stetig, also auch in  $s_+^\alpha(t'_0, x')$ . Dann ist aber dort  $u_\alpha = v$ , also auch auf der ganzen Geraden bis  $(t^*, x^*)$ , was der Definition von  $\bar{t}'$  widerspricht. Somit ist jeder Punkt  $(\bar{t}', \bar{x}')$  Anfangspunkt einer Unstetigkeitslinie von  $v$ . Die Menge  $\mathfrak{C}$  ist aber nicht abzählbar, somit haben wir einen Widerspruch, denn  $v$  hat, auf jeder Geraden  $t' = \text{konst.}$  höchstens abzählbar viele Unstetigkeitspunkte. Damit ist gezeigt, daß  $u_\alpha = v$  in allen

Punkten  $(t', x')$ , wo die letztere stetig ist. Daß die beiden Funktionen auch in allen Punkten  $(t', x')$  übereinstimmen, wo  $u_\alpha$  stetig ist, beweist man genau gleich.

Nun zeigen wir, daß  $\Phi_\alpha(t', x', s')$  gegen  $\Phi(t, x, s)$  konvergiert, wenn  $\alpha$  gegen Null geht, und daß  $u = v$  ist, in allen Punkten  $(t, x) \in \mathfrak{G}$ , wo  $u$  stetig ist. Ist etwa  $s < 0$ , dann ist, wenn  $\Phi_\alpha(t', x', s') = \bar{\Phi}_\alpha(t, x, s)$  und  $\Phi(t, x, s)$  die durch (16) definierte Funktion ist,

$$\begin{aligned} & \bar{\Phi}_\alpha(t, x, s) - \Phi(t, x, s) = \\ & = \int_0^{-s} F\left(G\left(\frac{x-\alpha}{t-\xi}\right)\right) - F\left(G\left(\frac{x}{t-\xi}\right)\right) d\xi + \int_0^{-s} F(\varrho(\xi)) - F(v(\xi, \alpha)) d\xi + \\ & \quad + \int_0^\alpha F(v(\xi, \alpha)) - F\left(G\left(\frac{x-\alpha}{t-\xi}\right)\right) d\xi, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & |\bar{\Phi}_\alpha(t, x, s) - \Phi(t, x, s)| \leq \int_0^{-s} \left| F\left(G\left(\frac{x}{t-\xi}\right)\right) - F\left(G\left(\frac{x-\alpha}{t-\xi}\right)\right) \right| d\xi + \\ & + \int_0^{-s} |F(\varrho(\xi)) - F(v(\xi, \alpha))| d\xi + \int_0^\alpha |F(v(\xi, \alpha)) - F\left(G\left(\frac{x-\alpha}{t-\xi}\right)\right)| d\xi. \end{aligned} \quad (36)$$

Der 1. Integrand hier ist beschränkt, das 1. Integral also bei genügend kleinem  $\alpha$  beliebig klein. Weil  $F(G(x/t - \xi))$  stetig ist für alle

$$0 \leq \xi \leq -s \leq t - \delta, \delta > 0,$$

kann bei festem  $s$  auch der 3. Integrand gleichmäßig beschränkt werden bei genügend kleinem  $\alpha$ , und das 2. Integral verschwindet wegen (32), wenn  $\alpha$  gegen 0 geht. Mithin kann die Differenz links in (36) beliebig klein gemacht werden, wenn nur  $\alpha$  genügend klein ist. Für  $s' \geq 0$  beweist man diese Tatsache analog.  $\bar{\Phi}_\alpha(t, x, s)$  konvergiert also gegen  $\Phi(t, x, s)$  gleichmäßig für alle  $s$  in  $[x, -t + \delta]$ . Daher konvergiert auch  $\bar{u}_\alpha(t, x) = u_\alpha(t - \alpha, x - \alpha)$  gegen  $u(t, x)$ . Aber  $\bar{u}_\alpha(t, x) = v(t, x)$ . Damit ist der Satz bewiesen.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. D. LAX, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws II*. Commun. Pure and Applied Math. Vol. X, 1957.
- [2] O. A. OLEJNIK (Dissertation), *Lokale Aufgaben über Gleichungen mit partiellen Ableitungen und Aufgabe von CAUCHY für nichtlineare Gleichungen im Großen*. Uspehi Mat. Nauk X, 1955.
- [3] O. A. LADYZENSKAYA, *Über die Konstruktion von unstetigen Lösungen von quasilinearen, hyperbolischen Gleichungen als Grenzlösungen der entsprechenden parabolischen Gleichung, wenn der Koeffizient des «Viskositätsgliedes» gegen Null geht*. Dokl. Akad. Nauk SSSR. (NS) 111, 1956.
- [4] E. HOPF, *The partial Differential Equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* . Commun. Pure and Applied Math. Vol. III, 1950.
- [5] R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*. Interscience Publ. New York 1948.
- [6] O. A. OLEJNIK, *Über unstetige Lösungen nichtlinearer Gleichungen*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 109, 1956.
- [7] A. DOUGLIS, *An Ordering Principle and Generalized Solutions of Certain Quasilinear Partial Differential Equations*. Commun. Pure and Applied Math. 13, 1960.
- [8] O. A. OLEJNIK, *Das CAUCHYSche Problem für nichtlineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit unstetigen Anfangsbedingungen*. Trudy Moskov. Mat. Obsč. Nr. 5, 1956.
- [9] S. MANDELBROJT, *Sur les fonctions convexes*. C. R. Acad. Sci. Paris Vol. 209, 1939.
- [10] B. L. ROŽDESTVENSKIĬ, *Über die Aufgabe von CAUCHY für quasilineare Gleichungen*. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 122, 1958.

(Eingegangen den 27. April 1962)