

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1962-1963)

Artikel: Solutions élémentaires d'opérateurs différentiels paraboliques hyperboliques.
Autor: Jeanquartier, Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28624>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 03.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Solutions élémentaires d'opérateurs différentiels paraboliques hyperboliques

par PIERRE JEANQUARTIER, Lausanne

Introduction

Nous nous proposons de définir et d'étudier une solution élémentaire tempérée pour l'opérateur

$$D = \frac{\partial}{\partial t} - \square,$$

dans l'espace R^{n+1} , produit des espaces $R^n \ni x$ et $R \ni t$, où \square désigne le dalembertien

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

On sait que tout opérateur différentiel linéaire à coefficients constants admet une solution élémentaire tempérée; la transformation de FOURIER ramène la recherche d'une telle solution à un problème de division par un polynôme (cf. HÖRMANDER [3]). Dans le cas de l'opérateur D , ce problème de division est particulièrement simple. En effet, T étant une distribution tempérée de transformée de FOURIER FT , la condition $DT = \delta$ équivaut à $(it + u)FT = 1$, où u désigne la forme quadratique

$$u = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

Mais la fonction $Q = (it + u)^{-1}$ est localement intégrable et définit une distribution tempérée telle que $(it + u)Q = 1$. La distribution $E = F^{-1}Q$ est donc une solution élémentaire tempérée de D . L'objet de ce travail est l'étude de la distribution E .

Remarquons que Q est une distribution invariante par le groupe G de toutes les transformations linéaires de R^{n+1} qui conservent la forme quadratique u et la variable t . De plus, Q est homogène au sens suivant: lorsque x est multiplié par λ , et t par λ^2 , où $\lambda > 0$, Q est multipliée par λ^{-2} . Mais la transformation de FOURIER conserve ces caractères d'invariance et d'homogénéité. De façon précise, $E = F^{-1}Q$ est invariante par le groupe G et est multipliée par λ^{-n} lorsque x et t sont changés en λx et $\lambda^2 t$, et c'est d'ailleurs la seule distribution, à jouir de ces propriétés, qui vérifie $DE = \delta$ (théorème 1, § 5).

La distribution E étant ainsi caractérisée, par des méthodes classiques (cf. METHÉE [4], DE RHAM [7], TENGSTAND [9], GÅRDING [2]), on montre que, dans chaque composante connexe de l'ouvert $ut \neq 0$ de R^{n+1} , E est de la

forme $|t|^{-\frac{n}{2}} S\left(\frac{u}{4t}\right)$, où S est une distribution d'une seule variable. La condition $DE = \delta$ entraîne que S est combinaison linéaire de solutions usuelles analytiques d'une équation différentielle du 2e ordre. Dans $ut \neq 0$, E apparaît ainsi comme combinaison linéaire, à coefficients constants encore indéterminés, de fonctions analytiques (théorème 2, § 5). Le problème est alors de prolonger ces fonctions en distributions définies sur tout l'espace.

Nous montrerons qu'il existe une fonction F , localement intégrable, invariante par G et homogène au sens indiqué, telle que $E = \square^{\bar{n}} F$, où \bar{n} désigne la partie entière de $\frac{n-2}{2}$ (théorème 3, § 8). Dans l'ouvert $u \neq 0$, E est de classe C^∞ (théorème 4, § 8). Par contre, sauf dans les cas $n = 2$ ou 3 , E n'est pas localement intégrable au voisinage du cylindre $u = 0$.

Dans le cas $p = n$, E n'est autre que la solution élémentaire habituelle de l'équation de la chaleur; nous supposons donc $p \geq 1$ et $q = n - p \geq 1$. Nous envisagerons trois cas:

- 1er cas: p et q impairs,
- 2e cas: p impair et q pair,
- 3e cas: p et q pairs.

Le cas p pair et q impair se ramène au 2e cas par changement de t en $-t$.

En terminant, je tiens à remercier très vivement M. G. DE RHAM de l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail, et des précieux conseils qu'il m'a donnés pour la présentation des résultats.

1. Notations

Nous désignerons toujours par p et q des entiers ≥ 1 de somme $n = p + q$, et par \bar{n} la partie entière de $\frac{n-2}{2}$.

Nous considérons l'espace $R^{n+1} \ni (x, t)$ comme produit des espaces

$$R^n \ni x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } R \ni t.$$

Si x et y appartiennent à R^n , on pose

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad |x| = \sqrt{x \cdot x}.$$

La forme quadratique

$$u = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$$

sera toujours considérée comme une fonction sur R^n ou R^{n+1} . De même,

$w = \frac{u}{4t}$ désignera toujours une fonction définie dans R^{n+1} pour $t \neq 0$.

Soit $Y(v)$ la fonction d'HEAVISIDE définie pour $v \in R$; nous poserons $\text{sgn } v = Y(v) - Y(-v)$, et dans R^{n+1} :

$$\chi_1 = Y(u) Y(t), \quad \chi_2 = Y(-u) Y(t), \quad \chi_3 = Y(-u) Y(-t), \quad \chi_4 = Y(u) Y(-t).$$

Dans R^{n+1} , l'ouvert défini par $ut \neq 0$ est réunion des ouverts Ω_i , Ω_i étant l'ensemble où $\chi_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Soient U et V des ouverts d'un espace numérique R^m . Nous dirons qu'une application α de U sur V est *régulière* si α est un homéomorphisme C^∞ . En suivant les notations de SCHWARTZ [8], nous désignerons par $D(U)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans U et par $D'(U)$ l'espace des distributions dans U ; si $T \in D'(U)$, $\varphi \in D(U)$, la valeur de T pour φ sera notée $\langle T, \varphi \rangle$. Pour montrer que $T \in D'(R^n)$, $R^n \ni x$, nous utiliserons la notation $T = T(x)$.

Soit $\mathcal{S}(R^m)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide sur R^m et $\mathcal{S}'(R^m)$ son dual. Si $\varphi \in \mathcal{S}(R^m)$, ses transformées de FOURIER seront définies par $F\varphi(y) = \int e^{-ix \cdot y} \varphi(x) dx$ et $\bar{F}\varphi(y) = \int e^{ix \cdot y} \varphi(x) dx$. F et \bar{F} sont prolongées par continuité sur l'espace $\mathcal{S}'(R^m)$ des distributions tempérées.

Donnons enfin deux formules faisant intervenir le dalembertien itéré:

Si $f(v)$ est une fonction de classe C^{n-2} sur R , et si n est pair, on a, dans l'ouvert $ut \neq 0$ de R^{n+1} :

$$\square^{\bar{n}} \frac{f(w)}{w^{\bar{n}}} = \frac{f^{(n-2)}(w)}{t^{\bar{n}}}. \quad (1.1)$$

Supposons maintenant que n soit impair. Si $f(v)$ est une primitive \bar{n} -ième de $g(v) \sqrt{|v|}$, où $g(v)$ est de classe $C^{\bar{n}}$, on a, dans l'ouvert $ut \neq 0$ de R^{n+1} :

$$\square^{\bar{n}} \frac{f(w)}{|w|^{\frac{n-2}{2}}} = \left(\frac{\text{sgn } w}{t} \right)^{\bar{n}} g^{(\bar{n})}(w). \quad (1.2)$$

2. Distributions homogènes

Nous dirons qu'une distribution $T \in D'(R^{n+1})$ est *homogène de degré* ν si

$$\langle T, \varphi(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}t) \rangle = \lambda^{\nu+n+2} \langle T, \varphi(x, t) \rangle \quad (2.1)$$

quels que soient $\lambda > 0$ et $\varphi \in D(R^{n+1})$. Dans l'ouvert $t \neq 0$, une telle distribution est donc homogène par rapport aux variables x et $\sqrt{|t|}$. Lorsqu'une distribution de $D'(R^{n+1})$ est homogène par rapport aux variables x et t , nous préciserons qu'elle est homogène «au sens classique».

Si $T \in D'(R^{n+1})$ est homogène de degré ν , en dérivant (2.1) par rapport à λ , on obtient, pour $\lambda = 1$, la relation d'EULER :

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + 2t \frac{\partial T}{\partial t} = \nu T . \tag{2.2}$$

Si $T \in D'(R^{n+1})$ est homogène de degré ν , $\frac{\partial T}{\partial t}$ et $\square T$ sont homogènes de degré $\nu - 2$. La mesure de DIRAC δ est homogène de degré $-(n + 2)$.

La condition (2.1) permet aussi de définir les distributions homogènes de degré ν dans tout «cône» ouvert de R^{n+1} de sommet l'origine.

Proposition 2.1. *Dans R^{n+1} , toute distribution homogène est tempérée.*

Pour établir cette proposition, nous nous ramènerons au résultat analogue valable pour les distributions homogènes au sens classique. Nous construirons une application régulière du domaine Ω , complémentaire de l'origine dans R^{n+1} , sur lui-même, qui transforme les distributions homogènes en des distributions homogènes au sens classique.

Soit $\theta(s)$ une fonction C^∞ de la variable réelle s , telle que $\theta(s) = s$ au voisinage de $s = 0$, $\theta(s) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{s}}$ lorsque s est voisin de $+\infty$ et $\theta(s) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{|s|}}$ lorsque s est voisin de $-\infty$. Supposons en outre que $\theta'(s) > 0$ pour tout s . Posons $\varrho = (|x|^4 + t^2)^{\frac{1}{4}}$. Les formules

$$\begin{aligned} x' &= x |x|^{-1} \varrho \cos [\theta(t|x|^{-2})] \\ t' &= \varrho \sin [\theta(t|x|^{-2})] \end{aligned}$$

définissent une application régulière $\beta : (x, t) \rightarrow (x', t')$ de Ω sur lui-même, dont le jacobien

$$\frac{D(x', t')}{D(x, t)} = |x|^{-(n+2)} \varrho^{n+1} \cos^{n-1} [\theta(t|x|^{-2})] \theta'(t|x|^{-2})$$

est strictement positif dans Ω . On en déduit un isomorphisme β^* de $D(\Omega)$:

$$\beta^* : \varphi(x, t) \rightarrow \varphi(x'(x, t), t'(x, t)) \frac{D(x', t')}{D(x, t)} ,$$

d'où, par transposition, un isomorphisme β de $D'(\Omega) : \langle \beta T, \varphi \rangle = \langle T, \beta^* \varphi \rangle$ si $T \in D'(\Omega)$, $\varphi \in D(\Omega)$.

Si $\beta(x, t) = (x', t')$, on a $\beta(\lambda x, \lambda^2 t) = (\lambda x', \lambda t')$, pour tout $\lambda > 0$. Il en résulte que $T \in D'(\Omega)$ est homogène si et seulement si βT est homogène au sens classique.

Supposons que $T \in D'(R^{n+1})$ soit homogène. Soit $a(x, t)$ une fonction C^∞ dans R^{n+1} , nulle au voisinage de l'origine, égale à 1 pour $|x|^2 + t^2 > 1$. On a $T = aT + (1 - a)T$. Il est clair que $(1 - a)T$ est tempérée. D'autre part, $\beta(aT) = a'\beta T$, avec $a'(x, t) = a(\beta^{-1}(x, t))$. Dans Ω , puisque T est homogène, βT est homogène au sens classique, donc (GÅRDING [2], note de la page 398) $a'\beta T$ est tempérée. Compte tenu de la forme de l'application β , il en résulte que aT est aussi tempérée, ce qui établit la proposition.

La proposition suivante est conséquence immédiate des définitions :

Proposition 2.2. *Si $T \in D'(R^{n+1})$ est homogène de degré ν , FT et $\bar{F}T$ sont homogènes de degré $-(n + 2 + \nu)$.*

3. Distributions invariantes

Soit G le groupe de toutes les transformations linéaires de R^n qui laissent invariante la forme quadratique u^1). Si $L \in G$, nous désignerons encore par L la transformation linéaire $(x, t) \rightarrow (Lx, t)$ de R^{n+1} . Le groupe des transformations de R^{n+1} ainsi définies sera encore noté G ; c'est le groupe de toutes les transformations linéaires de R^{n+1} qui conservent u et t . Si $L \in G$, l'application :

$$L^* : \varphi(x, t) \rightarrow \varphi(Lx, t)$$

est un isomorphisme de $D(R^{n+1})$, auquel correspond un isomorphisme transposé L de $D'(R^{n+1})$: $\langle LT, \varphi \rangle = \langle T, L^* \varphi \rangle$ si $T \in D'(R^{n+1})$, $\varphi \in D(R^{n+1})$. Nous dirons qu'une distribution $T \in D'(R^{n+1})$ est *invariante* si $LT = T$ quel que soit $L \in G$. On vérifie facilement que si T est invariante, $\square T$ et $\frac{\partial T}{\partial t}$ sont aussi invariantes.

Dans R^{n+1} , désignons par X_{ij} la transformation infinitésimale :

$$X_{ij} = \varepsilon_i x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon_j x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

où $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_p = 1$, $\varepsilon_{p+1} = \dots = \varepsilon_n = -1$. Si T est une distribution invariante, on a :

$$X_{ij} T = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

De façon analogue, on peut définir les distributions invariantes dans tout ouvert de R^{n+1} qui est invariant par G .

¹⁾ Pour ce paragraphe, cf. METHÉE [4] et [5], DE RHAM [7] et TENGSTAND [9].

Proposition 3. 1. *Si $T \in D'(R^{n+1})$ est tempérée et invariante, les transformées de FOURIER FT et $\bar{F}T$ sont aussi invariantes.*

Démonstration: Si $\varphi \in D(R^{n+1})$, on a, pour $L \in G$:

$$FL^*\varphi = \int e^{-i(x \cdot \xi + t\tau)} \varphi(L\xi, \tau) d\xi d\tau = \int e^{-i(x \cdot L^{-1}\xi + t\tau)} \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

puisque $\det L = \pm 1$. Soit S la transformation de G définie par

$$S(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p, -x_{p+1}, \dots, -x_n).$$

Les transformations de G conservant la forme quadratique $(x, y) = x \cdot Sy = Sx \cdot y$ (x et $y \in R^n$), on a: $x \cdot L^{-1}\xi = (Sx, L^{-1}\xi) = (LSx, \xi) = (SLSx) \cdot \xi$, d'où $FL^*\varphi = S^*L^*S^*F\varphi$. Puisque $SLS \in G$, on en déduit, si $T \in D'(R^{n+1})$ est invariante:

$$\langle LFT, \varphi \rangle = \langle T, FL^*\varphi \rangle = \langle SLS T, F\varphi \rangle = \langle FT, \varphi \rangle,$$

et de même pour $\bar{F}T$, c. q. f. d.

4. Distributions homogènes et invariantes

Désignons par H^ν le sous-espace de $D'(R^{n+1})$ formé des distributions qui sont invariantes et homogènes de degré ν . Nous allons montrer que dans l'ouvert $ut \neq 0$, toute distribution de H^ν est le produit de $|t|^{\frac{\nu}{2}}$ par une distribution de la seule variable $w = \frac{u}{4t}$. Les méthodes utilisées sont classiques (cf. GÅRDING [2], METHÉE [4], DE RHAM [7] et TENGSTAND [9]).

Les ouverts Ω_i de R^{n+1} étant définis comme au § 1, l'application:

$$\alpha_i : (x, t) \rightarrow (x, w), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

est une application régulière de Ω_i sur $\Omega_{j(i)}$, avec $j(1) = 1, j(2) = 3, j(3) = 2$ et $j(4) = 4$. Il s'ensuit que

$$\alpha_i^* : \varphi(x, t) \rightarrow \varphi(x, w) \frac{|w|}{4t^2}$$

est un isomorphisme de $D(\Omega_{j(i)})$ sur $D(\Omega_i)$, d'où un isomorphisme transposé α_i de $D'(\Omega_i)$ sur $D'(\Omega_{j(i)})$.

Désignons par H_i^ν le sous-espace de $D'(\Omega_i)$ formé des distributions qui sont invariantes et homogènes de degré ν . On a alors:

Lemme 4. 1. *Si $T \in H_i^0$, alors $\alpha_i T$ est une distribution de $D'(\Omega_{j(i)})$ indépendante de x .*

En effet, en considérant $T \in H_i^0$ comme un courant de degré 0 (cf. DE RHAM

[6]), les relations (2.2) et (3.1) impliquent $dT \wedge dw = 0$. Comme $\alpha_i T$ est, au signe près, l'image de T par l'application régulière α_i , telle qu'elle est définie dans [6], on en déduit: $\alpha_i(dT \wedge dw) = 0$ ou encore $d(\alpha_i T) \wedge d(\alpha_i w) = 0$, d'où $d(\alpha_i T) \wedge dt = 0$ (cf. [6], p. 55–57). C'est dire que $\frac{\partial(\alpha_i T)}{\partial x_k} = 0$ pour

$$k = 1, 2, \dots, n$$

et le lemme est établi.

Ce lemme entraîne que, dans chaque composante connexe de $\Omega_{j(i)}^2$, on peut écrire de façon unique (cf. SCHWARTZ [8], t. 1, p. 114)

$$\alpha_i T = 1(x) \otimes S_i(t),$$

où $S_i(t)$ est une distribution sur une demi-droite ouverte: $S_i \in D'(R_i)$ avec $R_1 = R_3 = (0, +\infty)$, $R_2 = R_4 = (-\infty, 0)$. Mais il existe des transformations de G qui échangent les composantes connexes de $u > 0$ ou de $u < 0$. On en déduit qu'une distribution de $D'(\Omega_{j(i)})$, qui est de la forme $1(x) \otimes S_i(t)$ dans chaque composante connexe de $\Omega_{j(i)}$, est l'image par α_i d'une distribution de H_i^0 si et seulement si S_i est la même distribution pour chaque composante de $\Omega_{j(i)}$. On peut donc énoncer:

Lemme 4. 2. *Il existe un isomorphisme β_i de H_i^0 sur $D'(R_i)$ tel que, pour tout $T \in H_i^0$: $\alpha_i T = 1(x) \otimes \beta_i T$.*

Lorsque $S_i \in D'(R_i)$ est une fonction, $\beta_i^{-1} S_i$ est la fonction: $(x, t) \rightarrow S_i(w)$. Quel que soit $S_i \in D'(R_i)$, il est donc naturel de poser $S_i(w) = \beta_i^{-1} S_i$. D'autre part, pour tout ν , l'application $T \rightarrow |t|^{\frac{\nu}{2}} T$ est un isomorphisme de H_i^0 sur H_i^ν ; on a donc:

Proposition 4. 1. *Pour toute distribution $T \in H^\nu$, il existe quatre distributions déterminées de façon unique $S_i \in D'(R_i)$, telles que, dans Ω_i , on ait*

$$T = |t|^{\frac{\nu}{2}} S_i(w), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

On sait que si $T \in H_i^{-n}$, alors $DT \in H_i^{-(n+2)}$. De façon précise, si $S_i \in D'(R_i)$ on a:

$$\begin{aligned} D(|t|^{-\frac{n}{2}} S_i(w)) & \qquad \qquad \qquad (4.1) \\ & = -\operatorname{sgn} t |t|^{-\frac{n+2}{2}} \left[\frac{n}{2} (S_i(w) + S_i'(w)) + w(S_i'(w) + S_i''(w)) \right]. \end{aligned}$$

Cette formule s'obtient par dérivation au sens classique lorsque S_i est une fonction C^∞ . Elle reste valable par continuité pour une distribution quelconque.

²⁾ Si p et $q > 1$, Ω_i est connexe.

Remarque. Si l'on avait posé $w = k \frac{u}{t}$, le crochet au deuxième membre de (4.1) serait :

$$\frac{n}{2} (S_i(w) + 4k S_i'(w)) + w(S_i'(w) + 4k S_i''(w)).$$

Le choix $k = \frac{1}{4}$ apporte une légère simplification dans l'expression des résultats obtenus.

Le lemme suivant donne des exemples de distributions homogènes et in-variantes dans R^{n+1} :

Lemme 4.3. *Soit $f(v)$ une fonction d'une variable réelle, continue pour $v \neq 0$, telle que*

$$\begin{aligned} f(v) &= O(|v|^\alpha) && \text{quand } v \rightarrow 0, \\ f(v) &= O(|v|^\beta) && \text{quand } |v| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Si $\lambda > -2$, $\alpha > -1$, $\beta < \lambda + 1$, la fonction $|t|^\lambda f(w)$ est localement intégrable dans R^{n+1} et définit un élément de $H^{2\lambda}$.

Démonstration : Dans R^{n+1} , sur un compact de $t \neq 0$, on a $|t|^\lambda f(w) = O(|u|^\alpha)$. Cette fonction est donc intégrable sur un tel ensemble puisque $\alpha > -1$. Montrons que $|t|^\lambda f(w)$ est intégrable sur un compact défini par $|x| \leq A$, $|t| \leq \frac{1}{4}$. On a, en remplaçant la variable t par $v = \frac{u}{4t}$:

$$I = \int_{\substack{|x| \leq A \\ |t| \leq \frac{1}{4}}} |t|^\lambda |f(w)| dx dt = C \int_{|x| \leq A} |u|^{\lambda+1} \left(\int_{|v| \geq |u|} |f(v)| |v|^{-\lambda-2} dv \right) dx,$$

où C est une constante positive. Mais

$$\int_{|v| \geq 1} |f(v)| |v|^{-\lambda-2} dv \leq C_1 \int_1^\infty v^{\beta-\lambda-2} dv \leq C_2,$$

puisque $\beta - \lambda - 2 < -1$, et si $|u| < 1$:

$$\int_{|u| \leq |v| \leq 1} |f(v)| |v|^{-\lambda-2} dv \leq C_3 \int_{|u|}^1 v^{\alpha-\lambda-2} dv \leq C_4 |u|^{\alpha-\lambda-1} + C_5,$$

où les C_i sont des constantes positives, $|u|^{\alpha-\lambda-1}$ étant à remplacer par

$$|\log |u|| \text{ si } \alpha = \lambda + 1.$$

On a finalement, C' et C'' étant des constantes positives :

$$I \leq C' \int_{|x| \leq A} |u|^{\lambda+1} dx + C'' \int_{|x| \leq A} |u|^\alpha dx,$$

où $|u|^\alpha$ est à remplacer par $|u|^\alpha |\log |u||$ si $\alpha = \lambda + 1$. Puisque $\alpha > -1$ et $\lambda > -2$, il en résulte que l'intégrale I est finie, c. q. f. d.

5. Solution élémentaire homogène et invariante

Supposons que $T \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ soit une distribution homogène et invariante telle que $DT = \delta$. Comme $\delta \in H^{-(n+2)}$ et que D abaisse le degré d'homogénéité de deux unités, il faut que $T \in H^{-n}$. Par transformation de FOURIER on obtient $(it + u)FT = 1$. La distribution FT est donc une solution de l'équation précédente et d'après les propositions 2.2 et 3.1 $FT \in H^{-2}$. Mais $(it + u)^{-1}$ qui, d'après le lemme 4.3, est une fonction localement intégrable, définit une distribution possédant les propriétés de FT indiquées. Je dis que $FT = (it + u)^{-1}$. En effet, si $S \in H^{-2}$ vérifie $(it + u)S = 0$, S a son support dans l'ensemble défini par $u = 0$ et $t = 0$. S est donc de la forme

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \otimes \delta^{(k)}(t),$$

où $A_k(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$; sur tout ouvert borné, $A_k(x)$ est nulle dès que k est assez grand (cf. SCHWARTZ [8], t. 1, théorème 36, p. 101). De plus $A_k(x)$ doit être invariante, à support dans $u = 0$, et homogène au sens classique de degré $2k$. Mais les distributions non nulles, à support dans $u = 0$ et qui sont invariantes ne sont jamais homogènes de degré ≥ 0 (cf. METHÉE [4], DE RHAM [7] ou TENGSTRAND [9]). Il s'ensuit que $A_k(x) = 0$ pour tout k et $S = 0$.

Compte tenu des propositions 2.2 et 3.1, il est clair que

$$E = (2\pi)^{-(n+1)} \bar{F}[(it + u)^{-1}]$$

appartient à H^{-n} et vérifie $DE = \delta$. On a donc démontré:

Théorème 1. *Dans R^{n+1} , l'opérateur D admet une solution élémentaire E , et une seule, qui soit invariante et homogène de degré $-n$. La transformée de FOURIER de E est la fonction localement intégrable $(it + u)^{-1}$.*

Les résultats du § 4 vont nous donner des renseignements sur la forme de E dans $ut \neq 0$. En effet, dans chacun des ouverts Ω_i , on a d'après la proposition 4.1:

$$E = |t|^{-\frac{n}{2}} S_i(w), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

De plus, comme $DE = 0$ dans $ut \neq 0$, la formule (4.1) entraîne:

$$\frac{n}{2}(S_i + S'_i) + v(S'_i + S''_i) = 0,$$

où l'on désigne par v la variable sur la demi-droite R_i telle que $S_i \in \mathcal{D}'(R_i)$. Mais l'équation différentielle précédente est régulière pour $v \neq 0$ et ses solutions sont ses solutions usuelles. On a donc:

$$S_i(v) = C'_i e^{-v} + C''_i e^{-v} \int e^v |v|^{-\frac{n}{2}} dv,$$

C'_i et C''_i étant des constantes. En particulier, $S_i(v)$ est une fonction analytique pour $v \neq 0$. Comme la fonction $(x, t) \rightarrow w$ est aussi analytique dans l'ouvert $t \neq 0$ de R^{n+1} , on a le résultat suivant:

Théorème 2. *Dans l'ouvert $ut \neq 0$ de R^{n+1} , la solution élémentaire E est une fonction analytique.*

Comme au § 1, désignons par χ_i la fonction caractéristique de l'ouvert Ω_i . Dans $ut \neq 0$, E est donc combinaison linéaire des huit fonctions

$$\chi_i |t|^{-\frac{n}{2}} e^{-w}, \quad \chi_i |t|^{-\frac{n}{2}} f_n(w), \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{5.1}$$

où $f_n(v)$ est une solution de:

$$f'_n(v) + f_n(v) = C |v|^{-\frac{n}{2}} \tag{5.2}$$

dans $v \neq 0$, C constante arbitraire $\neq 0$. Il est clair que les fonctions (5.1) sont linéairement indépendantes et engendrent un espace vectoriel V de dimension 8.

6. Fonctions intervenant dans l'expression de E

Dans ce paragraphe, nous allons préciser quelles solutions $f_n(v)$ de l'équation (5.2) nous choisirons. Nous ferons ce choix de façon que les fonctions $\chi_i |t|^{-\frac{n}{2}} f_n(w)$, définies dans Ω_i , admettent des prolongements dans $D'(R^{n+1})$. Remarquons d'autre part, qu'on peut former une solution de (5.2) pour n impair (resp. n pair), par dérivation d'une solution de cette équation dans le cas $n = 1$ (resp. $n = 2$).

Comme solution de (5.2) dans le cas $n = 2$, nous choisirons:

$$h(v) = e^{-v} \text{Pf.} \int_{-\infty}^v e^s s^{-1} ds. \tag{6.1}$$

Cette fonction est analytique pour $v \neq 0$ et vérifie

$$h'(v) + h(v) = v^{-1}, \tag{6.2}$$

d'où:

$$h^{(m+1)}(v) + h^{(m)}(v) = (-1)^m m! v^{-(m+1)}, \quad m = 0, 1, \dots \tag{6.3}$$

Lorsque $|v| \rightarrow \infty$, $h(v)$ admet le développement asymptotique:

$$h(v) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{v^{k+1}}. \tag{6.4}$$

En effet, les fonctions $e^{-v} \int_1^v e^s s^{-1} ds$ et $e^{-v} \int_{-\infty}^v e^s s^{-1} ds$ admettent ce développement lorsque v tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. On a :

$$\text{Pf. } \int_{-\infty}^0 e^s s^{-1} ds = - \int_0^{\infty} e^{-s} \log s ds = C ,$$

où C désigne la constante d'EULER (cf. [1], formule 1.7 (7)).

D'autre part :

$$\text{Pf. } \int_0^v e^s s^{-1} ds = \int_0^v \frac{e^s - 1}{s} ds + \log |v| .$$

Par suite,

$$H(v) = e^{-v} \int_0^v \frac{e^s - 1}{s} ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) v^k \quad (6.5)$$

désignant une fonction entière, on a :

$$h(v) = e^{-v} (C + \log |v|) + H(v) ,$$

ou encore :

$$\left. \begin{aligned} h(v) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\log |v| + C_k) v^k , \\ C_0 &= C \text{ (constante d'EULER)}, \\ C_k &= C - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Si n est pair, $\bar{n} = \frac{n-2}{2}$, nous prendrons comme solution de (5.2) :

$$f_n(v) = h^{(\bar{n})}(v) , \quad (6.7)$$

de sorte que :

$$f'_n(v) + f_n(v) = (-1)^{\bar{n}} \bar{n}! v^{-\frac{n}{2}} . \quad (6.8)$$

Posons encore, pour tout entier $m \geq 0$:

$$h_m(v) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\log |v| + C_k) v^k , \quad (6.9)$$

avec C_k défini par (6.6). Pour $v \neq 0$, on a :

$$h_m^{(m)}(v) = (-1)^m h(v) . \quad (6.10)$$

Comme solution de (5.2) dans le cas $n = 1$, prenons

$$g(v) = e^{-v} \left[Y(-v) \int_{-\infty}^v e^s |s|^{-\frac{1}{2}} ds + Y(v) \int_0^v e^s |s|^{-\frac{1}{2}} ds \right] .$$

$g(v)$ est donc analytique pour $v \neq 0$ et vérifie

$$g'(v) + g(v) = |v|^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.11}$$

Lorsque $|v| \rightarrow \infty$, $g(v)$ admet le développement asymptotique

$$g(v) \sim |v|^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} v^{-i}. \tag{6.12}$$

Comme $\int_{-\infty}^0 e^s |s|^{-\frac{1}{2}} ds = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, on peut écrire :

$$g(v) = e^{-v} \int_0^v e^s |s|^{-\frac{1}{2}} ds + \sqrt{\pi} Y(-v) e^{-v}.$$

Mais, en posant $s = v(1 - s')$:

$$e^{-v} \int_0^v e^s |s|^{-\frac{1}{2}} ds = \operatorname{sgn} v \sqrt{|v|} \int_0^1 e^{-vs'} \frac{ds'}{\sqrt{1-s'}}.$$

Introduisons la fonction entière :

$$K(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(v \int_0^1 e^{-vs} \frac{ds}{\sqrt{1-s}} - 1 \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{\Gamma(i + \frac{1}{2})} v^i. \tag{6.13}$$

Comme solution de (5.2) dans le cas $n = 3$, nous prendrons la fonction $k(v) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} g'(v)$. On a donc, avec (6.13) :

$$k(v) = Y(-v) e^{-v} + \frac{K(v)}{\sqrt{|v|}}. \tag{6.14}$$

$k(v)$ est analytique pour $v \neq 0$ et vérifie :

$$k^{(m+1)}(v) + k^{(m)}(v) = (-1)^m \frac{\Gamma(m + \frac{3}{2})}{\pi} |v|^{-\frac{1}{2}} v^{-(m+1)}, \tag{6.15}$$

pour tout entier $m \geq 0$. Lorsque $|v| \rightarrow \infty$, on déduit de (6.11) et (6.12) que $k(v)$ admet le développement asymptotique :

$$k(v) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma(i + \frac{1}{2})}{\sqrt{|v|} v^i}. \tag{6.16}$$

Si n est impair, $\bar{n} = \frac{n-3}{2}$, comme solution de (5.2) nous choisirons :

$$f_n(v) = k^{(\bar{n})}(v), \tag{6.17}$$

de sorte que, d'après (6.15) :

$$f'_n(v) + f_n(v) = (-1)^{\bar{n}} (\operatorname{sgn} v)^{\bar{n}+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi} |v|^{-\frac{n}{2}}. \tag{6.18}$$

Posons $K_0(v) = K(v)$, $K_m(v) = \int_0^v K_{m-1}(s) ds$, pour $m \geq 1$.

Pour tout entier $m \geq 0$, $K_m(v)$ est donc une fonction entière :

$$K_m(v) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\frac{1}{2}) \Gamma(i+m+1)} v^{i+m}. \quad (6.19)$$

Pour tout entier $m \geq 0$, on a :

$$K_m^{(m)}(v) = K(v). \quad (6.20)$$

Désignant par $R_m(v)$ la fonction entière

$$R_m(v) = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} v^i, \quad (6.21)$$

on a, pour tout $m \geq 0$:

$$R_m^{(m)}(v) = (-1)^m e^{-v}. \quad (6.22)$$

Posons enfin $e_0(v) = \sqrt{|v|} e^{-v}$, $e_m(v) = \int_0^v e_{m-1}(s) ds$, de sorte que, pour tout entier $m \geq 0$:

$$e_m(v) = \sqrt{|v|} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \Gamma(i+\frac{3}{2})}{\Gamma(i+1) \Gamma(i+m+\frac{3}{2})} v^{i+m} \quad (6.23)$$

et :

$$e_m^{(m)}(v) = \sqrt{|v|} e^{-v}. \quad (6.24)$$

Donnons encore quelques résultats relatifs aux fonctions h et k , qui nous seront utiles pour former certains développements asymptotiques.

Lemme 6.1. *Lorsque $X \rightarrow \infty$, on a :*

$$\int_{-X}^{+X} h(v) \log |v| dv = \frac{\pi^2}{2} + O\left(\frac{\log X}{X}\right).$$

Démonstration: Remarquons d'abord que $h(v) \log |v|$ est localement intégrable. On peut écrire :

$$I(X) = \int_{-X}^{+X} h(v) \log |v| dv = \int_0^X [h(v) + h(-v)] \log v dv.$$

Mais, d'après (6.2), $h(v) + h(-v)$ est la dérivée de $h(-v) - h(v)$. En intégrant par parties :

$$I(X) = [h(-X) - h(X)] \log X + \int_0^X f(v) dv,$$

où, d'après (6.6) et (6.4), $f(v) = \frac{h(v) - h(-v)}{v}$ est intégrable sur R . On a donc :

$$I(X) = \int_0^{\infty} f(v) dv + O\left(\frac{\log X}{X}\right).$$

La définition (6.1) permet d'écrire aussi :

$$h(v) = e^{-v} R \int_{-\infty}^v e^s s^{-1} ds = R \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{v-z},$$

où \int désigne une intégrale prise sur un chemin du plan complexe qui évite les pôles de la fonction à intégrer. On a donc :

$$f(v) = 2 R \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{v^2 - z^2}.$$

Le théorème de CAUCHY appliqué au contour formé du segment $0 \leq z \leq r$ de l'axe réel, du quart de cercle $|z| = r, Rz \geq 0, Jz \geq 0$ et du segment $0 \leq Jz \leq r$ de l'axe imaginaire donne, lorsque $r \rightarrow \infty$:

$$f(v) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{v^2 + s^2} ds,$$

d'où enfin, par un calcul classique :

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 2 \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin s}{v^2 + s^2} ds \right) dv = \frac{\pi^2}{2}, \text{ c. q. f. d.}$$

Lemme 6. 2. Soit $\psi(v)$ une fonction C^∞ pour $v \neq 0$, à support compact, telle que :

$$\psi(v) = a \log |v| + f(v)$$

où $f(v)$ est continue, $f'(v) = O(\log |v|)$ lorsque $v \rightarrow 0$. On a alors :

$$\int h(Xv) \psi(v) dv = \frac{1}{X} \left(a \frac{\pi^2}{2} \operatorname{sgn} X + b \right) + o\left(\frac{1}{X}\right)$$

lorsque $|X| \rightarrow \infty$, b étant une constante.

Démonstration : D'après (6.4) on a :

$$\int_{|v|>1} h(Xv) \psi(v) dv = \frac{1}{X} \int_{|v|>1} \psi(v) \frac{dv}{v} + o\left(\frac{1}{X}\right).$$

D'autre part :

$$\int_{-1}^{+1} h(Xv) \psi(v) dv = a \int_{-1}^{+1} h(Xv) \log |v| dv + \int_{-1}^{+1} h(Xv) f(v) dv.$$

Mais :

$$\int_{-1}^{+1} h(Xv) \log |v| dv = \frac{1}{|X|} \int_{-|X|}^{+|X|} h(v) \log |v| dv - \frac{\log |X|}{|X|} \int_{-|X|}^{+|X|} h(v) dv.$$

Comme, en vertu de (6.2), $h(v)$ est la dérivée de $\log |v| - h(v)$, on a :

$$\int_{-|X|}^{+|X|} h(v) dv = h(-|X|) - h(|X|) = O\left(\frac{1}{X}\right).$$

D'après le lemme 6.1 on a donc :

$$\int_{-1}^{+1} h(Xv) \log |v| dv = \frac{1}{|X|} \frac{\pi^2}{2} + o\left(\frac{1}{X}\right).$$

D'autre part, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} h(Xv) f(v) dv &= \left[\frac{\log |Xv| - h(Xv)}{X} f(v) \right]_{-1}^{+1} \\ &- \frac{1}{X} \int_{-1}^{+1} \log |Xv| f'(v) dv + \frac{1}{X} \int_{-1}^{+1} h(Xv) f'(v) dv \\ &= -\frac{1}{X} \int_{-1}^{+1} \log |v| f'(v) dv + o\left(\frac{1}{X}\right). \end{aligned}$$

En effet, d'après le théorème de LEBESGUE,

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} \int_{|X|^{-1} < |v| < 1} h(Xv) f'(v) dv = 0,$$

puisque $h(Xv)$ est bornée pour $|Xv| > 1$, que $f'(v)$ est localement intégrable et que $h(Xv) \rightarrow 0$ lorsque $|X| \rightarrow \infty$. En outre :

$$\left| \int_{|v| < |X|^{-1}} h(Xv) f'(v) dv \right| \leq \frac{C'}{|X|} \int_{-1}^{+1} |h(v)| \left| \log \left| \frac{v}{X} \right| \right| dv \leq C'' \frac{|\log |X||}{|X|},$$

C' et C'' étant des constantes positives, c. q. f. d.

Lemme 6.3. *Si, dans $v \leq 0$, $f(v)$ est une fonction C^∞ à support compact, on a lorsque $|X| \rightarrow \infty$:*

$$\int_{-\infty}^0 k(Xv) f(v) dv \sim \sum_{i=1}^{\infty} (Y(X) a_i + |X|^{-\frac{1}{2}} b_i) X^{-i},$$

les a_i et les b_i étant des constantes.

Démonstration : D'après (6.15), $k(v)$ est la dérivée de $-\left(k(v) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} |v|^{-\frac{1}{2}}\right)$.

En intégrant par parties on a donc, pour tout $i \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 k(Xv) f^{(i)}(v) dv &= -\frac{Y(X)}{X} f^{(i)}(0) + \frac{1}{X} \int_{-\infty}^0 k(Xv) f^{(i+1)}(v) dv \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi} X \sqrt{|X|}} \int_{-\infty}^0 f^{(i)}(v) |v|^{-\frac{1}{2}} dv. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat du lemme en remarquant que, comme $k(v)$ est intégrable,

$$\int_{-\infty}^0 k(Xv) g(v) dv = O\left(\frac{1}{X}\right)$$

pour toute fonction $g(v)$ bornée.

7. Développements asymptotiques

Considérons une fonction $f(v)$ d'une variable réelle, de classe C^∞ pour $v \neq 0$. Nous dirons que $f(v)$ admet un développement asymptotique indéfiniment dérivable, en abrégé développement D^∞ , lorsque $v \rightarrow 0$, si $f(v)$ admet un développement asymptotique

$$f(v) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(v)$$

lorsque $v \rightarrow 0$, et si les dérivées successives de $f(v)$ admettent, lorsque $v \rightarrow 0$, les développements asymptotiques

$$f^{(m)}(v) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{(m)}(v)$$

déduits de celui de $f(v)$ par dérivation terme à terme. Nous utiliserons la définition analogue pour $|v|$ tendant vers l'infini.

On voit facilement qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f(v)$, de classe C^∞ pour $v \neq 0$, se prolonge en une fonction C^∞ sur la droite R , est que $f(v)$ admette, lorsque $v \rightarrow 0$, un développement D^∞ du type de TAYLOR:

$$f(v) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k.$$

Lemme 7.1. *Soit $F(v)$ une fonction C^∞ sur R . Pour que $f(v) = F\left(\frac{1}{v}\right)$ se prolonge en une fonction C^∞ sur R , il faut et il suffit que $F(v)$ admette un développement D^∞ de la forme*

$$F(v) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^{-k}$$

lorsque $|v| \rightarrow \infty$.

Démonstration: Remarquons d'abord que, pour tout entier $m \geq 1$,

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^m F\left(\frac{1}{s}\right) = \left[P_m\left(v, \frac{d}{dv}\right) F\right]\left(\frac{1}{s}\right),$$

où $P_m(X, Y)$ désigne un polynôme de degré $2m$ en X et de degré m en Y . Cela étant, montrons que la condition du lemme 7.1 est nécessaire. Si $f(v)$ est C^∞ sur R , $f(v)$ admet un développement D^∞ :

$$f(v) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k$$

lorsque $v \rightarrow 0$. Donc, lorsque $|s| \rightarrow \infty$:

$$F(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^{-k}.$$

De plus, pour tout $m \geq 1$, lorsque $v \rightarrow 0$

$$f^{(m)}(v) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dv} \right)^m (a_k v^k),$$

et comme $F^{(m)}(s) = \left[P_m \left(v, \frac{d}{dv} \right) f \right] \left(\frac{1}{s} \right)$ on a

$$F^{(m)}(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left[P_m \left(v, \frac{d}{dv} \right) (a_k v^k) \right] \left(\frac{1}{s} \right),$$

donc

$$F^{(m)}(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d}{ds} \right)^m (a_k s^{-k}),$$

lorsque $|s| \rightarrow \infty$. C'est dire que le développement de F est D^∞ . De façon analogue, on montre que la condition est suffisante.

Lemme 7.2. Soit $h(v)$ la fonction définie par (6.6). Quel que soit l'entier $m \geq 0$, la fonction $v^{-(m+1)} h^{(m)} \left(\frac{1}{v} \right)$ est C^∞ sur R .

Démonstration: De (6.3) on déduit:

$$h^{(i)}(v) = (-1)^i \left[h(v) - \sum_{k=0}^{i-1} k! v^{-(k+1)} \right], \quad (7.1)$$

pour tout entier $i \geq 0$. D'après (6.4), lorsque $|v| \rightarrow \infty$ on a donc:

$$h^{(i)}(v) \sim (-1)^i \sum_{k=i}^{\infty} k! v^{-(k+1)}. \quad (7.2)$$

Or ce développement est aussi celui obtenu par dérivation terme à terme de (6.4); donc (6.4) est un développement D^∞ . En vertu du lemme 7.1, $h^{(m)} \left(\frac{1}{v} \right)$ est donc C^∞ pour tout $m \geq 0$. D'après (7.2):

$$h^{(m)} \left(\frac{1}{v} \right) \sim (-1)^m \sum_{k=m}^{\infty} k! v^{k+1}.$$

Il en résulte que $v^{-(m+1)} h^{(m)} \left(\frac{1}{v} \right)$ est aussi C^∞ , c.q.f.d.

Lemme 7.3. Soit $k(v)$ la fonction définie par (6.14). Quel que soit l'entier $m \geq 0$, la fonction

$$f(v) = |v|^{-\frac{1}{2}} v^{-(m+1)} k^{(m)} \left(\frac{1}{v} \right)$$

est C^∞ sur R .

Démonstration: De (6.15) on déduit:

$$k^{(j)}(v) = (-1)^j \left[k(v) - \frac{1}{\pi} |v|^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^j \Gamma(i + \frac{1}{2}) v^{-i} \right], \tag{7.3}$$

pour tout entier $j \geq 0$. D'après (6.16), on a lorsque $|v| \rightarrow \infty$:

$$k^{(j)}(v) \sim \frac{(-1)^j}{\pi} \sum_{i=j+1}^{\infty} \Gamma(i + \frac{1}{2}) |v|^{-\frac{1}{2}} v^{-i}, \tag{7.4}$$

développement qu'on peut aussi former par dérivation terme à terme de (6.16). C'est dire que $k(v)$ admet un développement D^∞ lorsque $|v| \rightarrow \infty$, donc aussi $k^{(m)}(v)$. Par la même méthode que dans la démonstration du lemme 7.1, on en déduit que $k^{(m)}\left(\frac{1}{v}\right)$ admet un développement D^∞ lorsque $v \rightarrow 0$. D'après la formule de LEIBNIZ, il en sera de même pour $f(v)$. Mais, d'après (7.4):

$$f(v) \sim \frac{(-1)^m}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma(i + m + \frac{3}{2}) v^i$$

lorsque $v \rightarrow 0$. Il en résulte que $f(v)$ est C^∞ sur R , c. q. f. d.

Nous allons donner maintenant quelques développements asymptotiques; on désignera toujours par ε un nombre > 0 tendant vers 0.

Dans l'espace $D'(R)$ des distributions d'une variable t , on a:

$$\delta(t - \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)}(t) \varepsilon^k, \tag{7.5}$$

$$\delta(t + \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta^{(k)}(t) \varepsilon^k, \tag{7.6}$$

d'où l'on déduit:

$$\text{Pf.}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(-1)^k \delta(t - \varepsilon) + \delta(t + \varepsilon)}{\varepsilon^{k+1}} = 0. \tag{7.7}$$

Rappelons quelques résultats de [7] (voir aussi [9]). A toute fonction

$$\varphi \in D(R^n),$$

on peut associer une fonction $\Phi(v)$ d'une variable réelle, telle que, si $f(v)$ est par exemple une fonction continue:

$$\int_{x \in R^n} f(u) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \Phi(v) dv. \tag{7.8}$$

Avec les notations de [7], on a: $\Phi(v) = H_v[\varphi dx]$. $\Phi(v)$ est C^∞ pour $v \neq 0$.

Lorsque $v \rightarrow 0$, $\Phi(v)$ admet un développement D^∞ :

si p impair, q pair ou si p et q pairs :

$$\Phi(v) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (\langle A_k, \varphi \rangle v^k + \langle B_k, \varphi \rangle v^{k+\frac{n-2}{2}} Y(v)), \quad (7.9)$$

$$\text{avec } B_0 = (-1)^{\frac{q}{2}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta(x);$$

si p et q impairs :

$$\Phi(v) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (\langle A_k, \varphi \rangle v^k + \langle B_k, \varphi \rangle v^{k+\bar{n}} \log |v|), \quad (7.10)$$

$$\text{avec } B_0 = (-1)^{\frac{q+1}{2}} \frac{\pi^{\bar{n}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta(x);$$

les A_k et les B_k sont des distributions invariantes sur R^n (cf. [7], p. 351, formules 16–19).

Lemme 7.4. *Supposons que p et q soient impairs. Dans $D'(R^n)$ on a :*

$$h\left(\frac{u}{4\varepsilon}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} S_k \varepsilon^k + (-1)^{\frac{q+1}{2}} 2^{n-1} \pi^{\frac{n+2}{2}} \delta(x) \varepsilon^{\frac{n}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{n}{2}}),$$

$$h\left(-\frac{u}{4\varepsilon}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} S_k (-\varepsilon)^k - (-1)^{\frac{q+1}{2}} 2^{n-1} \pi^{\frac{n+2}{2}} \delta(x) (-\varepsilon)^{\frac{n}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{n}{2}}),$$

avec $S_k \in D'(R^n)$.

Démonstration: D'après (7.8), si $X \in R$ on a, pour $\varphi \in D(R^n)$:

$$\int h(Xu) \varphi(x) dx = \int h(Xv) \Phi(v) dv.$$

En vertu de (7.10), $\Phi(v)$ est de classe $C^{\bar{n}-1}$ et, lorsque $v \rightarrow 0$,

$$\Phi^{(\bar{n})}(v) = \bar{n}! \langle B_0, \varphi \rangle \log |v| + f(v),$$

où $f(v)$ est continue, $f'(v) = O(\log |v|)$ lorsque $v \rightarrow 0$.

D'après (6.2), $h(v)$ est la dérivée de la fonction continue $\log |v| - h(v)$. En intégrant par parties, on a donc pour $k < \bar{n}$:

$$\int h(Xv) \Phi^{(k)}(v) dv = \frac{1}{X} \int h(Xv) \Phi^{(k+1)}(v) dv - \frac{1}{X} \int \log |v| \Phi^{(k+1)}(v) dv.$$

On en déduit:

$$\int h(Xv) \Phi(v) dv = - \sum_{k=1}^{\bar{n}} X^{-k} \int \log |v| \Phi^{(k)}(v) dv + X^{-\bar{n}} \int h(Xv) \Phi^{(\bar{n})}(v) dv.$$

Les propriétés rappelées de $\Phi^{(\bar{n})}(v)$ et le lemme 6.2 entraînent

$$\int h(Xv) \Phi^{(\bar{n})}(v) dv = \frac{1}{X} \left(n! \langle B_0, \varphi \rangle \frac{\pi^2}{2} \operatorname{sgn} X + b \right) + o\left(\frac{1}{X}\right),$$

d'où le résultat en prenant $X = \pm \frac{1}{4\varepsilon}$.

Lemme 7.5. *Supposons que p soit impair et q pair. Dans $D'(R^n)$ on a les développements asymptotiques:*

$$Y(u) e^{-\frac{u}{4\varepsilon}} = \sum_{k=1}^{\bar{n}+1} S_k \varepsilon^k + (-1)^{\frac{q}{2}} 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \delta(x) \varepsilon^{\frac{n}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{n}{2}}),$$

$$Y(-u) k\left(\frac{u}{4\varepsilon}\right) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (T_i \varepsilon^i + U_i \varepsilon^i \sqrt{\varepsilon}),$$

$$Y(-u) k\left(-\frac{u}{4\varepsilon}\right) \sim \sum_{i=1}^{\infty} U_i (-\varepsilon)^i \sqrt{\varepsilon},$$

avec $S_i, T_i, U_i \in D'(R^n)$.

Démonstration: Soit en effet $\varphi \in D(R^n)$. D'après (7.9), la fonction $\Phi(v)$ correspondante est C^∞ dans $v \leq 0$. Dans $v \geq 0$, $\Phi(v)$ est de classe $C^{\bar{n}}$, avec:

$$\Phi^{(\bar{n}+1)}(v) = (-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \varphi(0) v^{-\frac{1}{2}} + O(1).$$

On a donc:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{4\varepsilon}} \Phi^{(\bar{n}+1)}(v) dv = 2(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \varphi(0) \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

Mais, à l'aide d'intégrations par parties:

$$\begin{aligned} \int_{u>0} e^{-\frac{u}{4\varepsilon}} \varphi(x) dx &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{4\varepsilon}} \Phi(v) dv \\ &= \sum_{i=0}^{\bar{n}} (4\varepsilon)^{i+1} \Phi^{(i)}(0) + (4\varepsilon)^{\bar{n}+1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{4\varepsilon}} \Phi^{(\bar{n}+1)}(v) dv, \end{aligned}$$

d'où le premier développement asymptotique.

D'autre part,

$$\int_{u<0} k\left(\pm \frac{u}{4\varepsilon}\right) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^0 k\left(\pm \frac{v}{4\varepsilon}\right) \Phi(v) dv;$$

les deux derniers développements asymptotiques du lemme résultent donc du lemme 6.3.

Lemme 7. 6. *Supposons que p et q soient pairs. Dans $D'(R^n)$ on a alors:*

$$Y(u) e^{-\frac{u}{4\varepsilon}} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} S_k \varepsilon^k + (-1)^{\frac{q}{2}} 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \delta(x) \varepsilon^{\frac{n}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{n}{2}}),$$

$$Y(-u) e^{\frac{u}{4\varepsilon}} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} S_k (-1)^{k-1} \varepsilon^k + o(\varepsilon^{\frac{n}{2}}),$$

avec $S_k \in D'(R^n)$.

Démonstration: Si $\varphi \in D(R^n)$, la fonction $\Phi(v)$ correspondante est, d'après (7.9), de classe C^∞ dans $v \geq 0$ et dans $v \leq 0$, avec cependant des valeurs différentes pour les dérivées à l'origine d'ordre $\geq \bar{n}$, suivant que $\Phi(v)$ est considérée dans $v \geq 0$ ou dans $v \leq 0$. En particulier:

$$\Phi^{(\bar{n})}(+0) - \Phi^{(\bar{n})}(-0) = (-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \varphi(0).$$

On a alors, en intégrant par parties:

$$\begin{aligned} \int_{u>0} e^{-\frac{u}{4\varepsilon}} \varphi(x) dx &= \int_0^\infty e^{-\frac{v}{4\varepsilon}} \Phi(v) dv \\ &= \sum_{i=1}^{\bar{n}} \Phi^{(i-1)}(0) (4\varepsilon)^i + \Phi^{(\bar{n})}(+0) (4\varepsilon)^{\bar{n}+1} + o(\varepsilon^{\bar{n}+1}), \\ \int_{u<0} e^{\frac{u}{4\varepsilon}} \varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^0 e^{\frac{v}{4\varepsilon}} \Phi(v) dv \\ &= \sum_{i=1}^{\bar{n}} (-1)^{i-1} \Phi^{(i-1)}(0) (4\varepsilon)^i + (-1)^{\bar{n}} \Phi^{(\bar{n})}(-0) (4\varepsilon)^{\bar{n}+1} + o(\varepsilon^{\bar{n}+1}), \end{aligned}$$

d'où le résultat du lemme.

8. Etude de la solution élémentaire

Nous avons vu, au § 5, que dans l'ouvert $ut \neq 0$ de R^{n+1} , la solution élémentaire E est égale à une fonction de l'espace vectoriel V engendré par les huit fonctions (5.1). Comme E est définie dans tout l'espace, nous avons donc, en premier lieu, à déterminer le sous-espace vectoriel de V formé des fonctions qui admettent un prolongement dans $D'(R^{n+1})$. Nous allons montrer que ce sous-espace est engendré par les six fonctions:

$$\chi_i |t|^{-\frac{n}{2}} e^{-w}, \quad \chi_j |t|^{-\frac{n}{2}} f_n(w), \quad (8.1)$$

avec $i = 1, 3$ et $j = 1, 2, 3, 4$. En effet, il est clair qu'aucune combinaison linéaire non nulle des fonctions $\chi_i |t|^{-\frac{n}{2}} e^{-w}$, $i = 2, 4$, n'est prolongeable

au voisinage de $t = 0$, en raison de l'ordre de croissance de e^{-w} dans $ut < 0$. Par contre, les six fonctions (8.1) sont prolongeables.

Considérons d'abord le cas n pair. Les fonctions

$$G_n = \frac{Y(w)}{|t|} \frac{R_{\bar{n}}(w)}{w^{\bar{n}}}, \tag{8.2}$$

avec (6.21), et

$$H_n = \frac{1}{t} \frac{h_{\bar{n}}(w)}{w^{\bar{n}}}, \tag{8.3}$$

avec (6.9), sont localement intégrables dans R^{n+1} . En effet, lorsque $v \rightarrow 0$

$$\frac{R_{\bar{n}}(v)}{v^{\bar{n}}} = O(1), \quad \frac{h_{\bar{n}}(v)}{v^{\bar{n}}} = O(\log |v|),$$

et, lorsque $|v| \rightarrow \infty$,

$$Y(v) \frac{R_{\bar{n}}(v)}{v^{\bar{n}}} = O\left(\frac{1}{v}\right), \quad \frac{h_{\bar{n}}(v)}{v^{\bar{n}}} = O\left(\frac{\log |v|}{v}\right);$$

le lemme (4.3) permet de conclure. D'autre part, compte tenu de (6.22), (6.10) et (6.7), la formule (1.1) donne, dans $ut \neq 0$:

$$\square^{\bar{n}} G_n = \operatorname{sgn} t Y(w) t^{-\frac{n}{2}} e^{-w}, \tag{8.4}$$

$$\square^{\bar{n}} H_n = (-1)^{\bar{n}} t^{-\frac{n}{2}} f_n(w). \tag{8.5}$$

Ces égalités prouvent que les fonctions (8.1) sont prolongeables.

Supposons maintenant n impair. Les fonctions

$$G_n = \frac{Y(w)}{|t|^{\frac{3}{2}}} \frac{e_{\bar{n}}(w)}{|w|^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{8.6}$$

$$H_n = \frac{Y(-w) e_{\bar{n}}(w) + K_{\bar{n}}(w)}{|t|^{\frac{3}{2}} |w|^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{8.7}$$

avec (6.23) et (6.19) sont localement intégrables dans R^{n+1} . En effet, si $v \rightarrow 0$:

$$e_{\bar{n}}(v) = O(|v|^{\bar{n}+\frac{1}{2}}), \quad K_{\bar{n}}(v) = O(|v|^{\bar{n}}).$$

D'autre part, pour $v \neq 0$, les fonctions $Y(v) e_{\bar{n}}(v)$ et $Y(-v) e_{\bar{n}}(v) + K_{\bar{n}}(v)$ admettent pour dérivées \bar{n} -ièmes $Y(v) \sqrt{v} e^{-v}$ et $Y(-v) \sqrt{|v|} e^{-v} + K(v) = k(v) \sqrt{|v|}$ (formules (6.24) et (6.20)). D'après (6.16), lorsque $|v| \rightarrow \infty$, ces dérivées sont $O\left(\frac{1}{v}\right)$; on en déduit que les fonctions elles-mêmes sont

$O(|v|^{\bar{n}-1} \log |v|)$. Le lemme 4.3 entraîne alors que G_n et H_n sont localement intégrables dans R^{n+1} . La formule (1.2) donne, dans $ut \neq 0$:

$$\square^{\bar{n}} G_n = (-\operatorname{sgn} u)^{\bar{n}} Y(w) |t|^{-\frac{n}{2}} e^{-w}, \quad (8.8)$$

$$\square^{\bar{n}} H_n = (\operatorname{sgn} u)^{\bar{n}} |t|^{-\frac{n}{2}} f_n(w), \quad (8.9)$$

où l'on a tenu compte de (6.24), (6.20), (6.14) et (6.17). Les fonctions (8.1) sont donc prolongeables en distributions sur R^{n+1} .

Il résulte de ce qui précède que, dans $ut \neq 0$, la solution élémentaire E est égale à une combinaison linéaire des six distributions:

$$\square^{\bar{n}} \chi_i G_n, \quad \square^{\bar{n}} \chi_j H_n, \quad (8.11)$$

avec $i = 1, 3$ et $j = 1, 2, 3, 4$. Il est clair que ces distributions, définies dans tout l'espace R^{n+1} , sont invariantes et homogènes de degré $-n$. Par suite, à une distribution invariante et homogène de degré $-n$, à support dans $ut = 0$ près, E est combinaison linéaire des distributions (8.11). En fait, comme il résulte du théorème suivant, E est exactement combinaison linéaire de distributions (8.11).

Théorème 3. *Quels que soient les entiers $p \geq 1$ et $q \geq 1$, il existe une fonction F , localement intégrable dans R^{n+1} , homogène et invariante, telle que la solution élémentaire E soit de la forme $E = \square^{\bar{n}} F$.*

Dans le 1er cas (p et q impairs):

$$F = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} H_n, \quad (8.12)$$

où H_n est défini par (8.3).

Dans le 2e cas (p impair et q pair):

$$F = \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} (\operatorname{sgn} w)^{\bar{n}} [Y(u) Y(t) G_n + \operatorname{sgn} t Y(-u) H_n], \quad (8.13)$$

avec G_n et H_n définis par (8.6) et (8.7).

Dans le 3e cas (p et q pairs):

$$F = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} G_n, \quad (8.14)$$

où G_n est défini par (8.2).

Il est clair, d'après les définitions, que dans chaque cas, $\square^{\bar{n}} F$ est une distribution sur R^{n+1} , invariante et homogène de degré $-n$. Par conséquent, en vertu du théorème 1, il nous suffira de montrer que $D \square^{\bar{n}} F = \delta$ pour établir le théorème 3. Pour calculer $D \square^{\bar{n}} F$, nous procéderons de la façon suivante: comme F est localement intégrable, F est la limite dans $D'(R^{n+1})$ de $Y(|t| - \varepsilon) F$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$. En utilisant les développements en séries des fonctions qui interviennent dans la définition de F , nous exprimerons $Y(|t| - \varepsilon) F$ comme somme de séries convergeant dans $D'(R^{n+1})$. Par dérivation terme à terme de ces séries, nous calculerons $D \square^{\bar{n}} Y(|t| - \varepsilon) F$, d'où $D \square^{\bar{n}} F$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous aurons besoin des formules suivantes:

$$\square^m (Y(\pm u) |u|^\lambda) = (\pm 1)^m A_m(\lambda) Y(\pm u) |u|^{\lambda-m}, \tag{8.15}$$

$$\square^m (|u|^\lambda \log |u|) = (\text{sgn } u)^m A_m(\lambda) |u|^{\lambda-m} [\log |u| + B_m(\lambda)], \tag{8.16}$$

avec:

$$A_m(\lambda) = \frac{4^m \Gamma(\lambda + 1) \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\lambda + 1 - m) \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2} - m\right)},$$

$$B_m(\lambda) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda + 1 - k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda + \frac{n}{2} - k}.$$

Ces formules sont valables pour tout entier $m \geq 1$, et pour λ complexe, $R \lambda > m - 1$. En effet, ces formules sont obtenues par dérivation au sens classique pour $R \lambda$ assez grand. Elles restent valables dans le domaine où leurs deux membres sont fonctions holomorphes de λ . Rappelons aussi les formules suivantes, démontrées dans [7] (p. 365-366):

$$\square^{\frac{n}{2}} \log |u| = 0, \quad \text{si } p \text{ et } q \text{ impairs.} \tag{8.17}$$

$$\square^{\frac{n-1}{2}} \frac{Y(-u)}{\sqrt{|u|}} = 0, \quad \text{si } p \text{ impair et } q \text{ pair.} \tag{8.18}$$

$$\square^{\frac{n}{2}} Y(u) = 0, \quad \text{si } p \text{ et } q \text{ pairs.} \tag{8.19}$$

Passons au calcul de $D \square^{\bar{n}} F$:

1er cas. A un facteur constant près, $Y(|t| - \varepsilon) F$ est égal à

$$F_\varepsilon = Y(|t| - \varepsilon) H_n = \sum_{i=\bar{n}}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} (\log |w| + C_i) w^{i-\bar{n}} \frac{Y(|t| - \varepsilon)}{t}.$$

Sur tout compact de R^{n+1} , chaque terme de la série précédente est majoré par le terme d'une série numérique convergente multiplié par la fonction $1 + |\log |u||$, localement intégrable dans R^{n+1} . Par suite, la série égale à F_ε converge dans $D'(R^{n+1})$. Par dérivation terme à terme, on a donc, d'après (8.15) et (8.16):

$$\begin{aligned} \square^{\bar{n}} F_\varepsilon &= \frac{Y(|t| - \varepsilon)}{t^{\frac{n}{2}}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} (\log |w| + C_i) w^i \\ &+ \sum_{i=0}^{\bar{n}-1} \frac{(-1)^{i+\bar{n}} i!}{\bar{n}!} \square^{\bar{n}-i} \log |u| \otimes \frac{Y(|t| - \varepsilon)}{t^{i+1}}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Toujours d'après (8.15) et (8.16), on en déduit:

$$\begin{aligned} D \square^{\bar{n}} F_\varepsilon &= h\left(\frac{u}{4\varepsilon}\right) \otimes \frac{\delta(t - \varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} + (-1)^{\bar{n}} h\left(-\frac{u}{4\varepsilon}\right) \otimes \frac{\delta(t + \varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \\ &+ \frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}!} \sum_{i=0}^{\bar{n}-1} i! \square^{\bar{n}-i} \log |u| \otimes \frac{(-1)^i \delta(t - \varepsilon) + \delta(t + \varepsilon)}{\varepsilon^{i+1}}, \end{aligned}$$

après avoir tenu compte de (6.6) et (8.17). Mais d'après (7.7):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D \square^{\bar{n}} F_\varepsilon &= \text{Pf.} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \left[h\left(\frac{u}{4\varepsilon}\right) \otimes \delta(t - \varepsilon) + (-1)^{\bar{n}} h\left(-\frac{u}{4\varepsilon}\right) \otimes \delta(t + \varepsilon) \right] \\ &= (-1)^{\frac{q+1}{2}} 2^n \pi^{\frac{n+2}{2}} \delta, \end{aligned}$$

en utilisant (7.5), (7.6) et le lemme 7.4. D'où $D \square^{\bar{n}} F = \delta$.

2e cas. A un coefficient constant près, $Y(|t| - \varepsilon) F$ est égal à:

$$F_\varepsilon = Y(|t| - \varepsilon) (\text{sgn } w)^{\bar{n}} [Y(u) Y(t) G_n + \text{sgn } t Y(-u) H_n].$$

Compte tenu de (8.6) et (8.7) on a donc:

$$\begin{aligned} F_\varepsilon &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \Gamma(i + \frac{3}{2})}{i! 4^i \Gamma(i + \frac{n}{2})} u^i \otimes Y(t - \varepsilon) t^{-(i + \frac{3}{2})} \\ &- 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i!}{4^i \Gamma(i + \frac{1}{2}) \Gamma(i + \frac{n-1}{2})} Y(-u) |u|^{i-\frac{1}{2}} \otimes \frac{Y(t - \varepsilon) + Y(-t - \varepsilon)}{t^{i+1}}. \end{aligned}$$

Sur tout compact de R^{n+1} , la première série est majorée par une série numérique convergente et la seconde par une série numérique convergente multipliée par $|u|^{-\frac{1}{2}}$. Comme $|u|^{-\frac{1}{2}}$ est localement intégrable dans R^{n+1} , les séries

qui servent à exprimer F_ε convergent dans $D'(R^{n+1})$. Par dérivation terme à terme, on a donc, en utilisant (8.15):

$$\begin{aligned} \square^{\bar{n}} F_\varepsilon &= (-1)^{\bar{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! 4^i} u^i \otimes Y(t - \varepsilon) t^{-(i + \frac{n}{2})} \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi \bar{n}!}} \sum_{i=0}^{\bar{n}-1} (-1)^i i! \square^{\bar{n}-i} \frac{Y(-u)}{\sqrt{|u|}} \otimes \frac{Y(t - \varepsilon) + Y(-t - \varepsilon)}{t^{i+1}} \quad (8.21) \\ &\quad - 2(-1)^{\bar{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i \Gamma(i + \frac{1}{2})} Y(-u) |u|^{i-\frac{1}{2}} \otimes \frac{Y(t - \varepsilon) + Y(-t - \varepsilon)}{t^{i+\bar{n}+1}}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, compte tenu de (6.13), (6.14) et (8.18):

$$D \square^{\bar{n}} F_\varepsilon = A_\varepsilon + B_\varepsilon,$$

avec:

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= (-1)^{\bar{n}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} Y(u) e^{-\frac{u}{4\varepsilon}} \otimes \delta(t - \varepsilon) \\ &\quad + \varepsilon^{-\frac{n}{2}} Y(-u) \left[(-1)^{\bar{n}} k \left(\frac{u}{4\varepsilon} \right) \otimes \delta(t - \varepsilon) + k \left(-\frac{u}{4\varepsilon} \right) \otimes \delta(t + \varepsilon) \right], \end{aligned}$$

et:

$$B_\varepsilon = - \frac{2}{\sqrt{\pi \bar{n}!}} \sum_{i=0}^{\bar{n}-1} i! \square^{\bar{n}-i} \frac{Y(-u)}{\sqrt{|u|}} \otimes \frac{(-1)^i \delta(t - \varepsilon) + \delta(t + \varepsilon)}{\varepsilon^{i+1}}.$$

D'après (7.7), en utilisant (7.5), (7.6) et le lemme 7.5, on obtient:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D \square^{\bar{n}} F_\varepsilon = \text{Pf. } A_\varepsilon = (-1)^{\frac{p+1}{2}} 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \delta,$$

d'où $D \square^{\bar{n}} F = \delta$.

3e cas. Si p et q sont pairs, $Y(|t| - \varepsilon) F$ est égal, à un facteur constant près, à:

$$F_\varepsilon = Y(|t| - \varepsilon) G_n,$$

d'où, d'après (8.2):

$$F_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\bar{n}}}{(k + \bar{n})! 4^k} \left[Y(u) u^k \otimes \frac{Y(t - \varepsilon)}{t^{k+1}} - Y(-u) u^k \otimes \frac{Y(-t - \varepsilon)}{t^{k+1}} \right].$$

Sur tout compact de R^{n+1} , chaque terme de la série précédente est majoré par le terme d'une série numérique convergente. Par conséquent, la série égale à F_ε converge dans $D'(R^{n+1})$ et peut être dérivée terme à terme. On a donc, d'après (8.15):

$$\begin{aligned} \square^{\bar{n}} F_\varepsilon &= \frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}!} \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} (-1)^k k! \square^{\bar{n}-k} Y(u) \otimes \frac{Y(t - \varepsilon) + Y(-t - \varepsilon)}{t^{k+1}} \quad (8.22) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 4^k} \left[Y(u) u^k \otimes \frac{Y(t - \varepsilon)}{t^{k+\bar{n}+1}} - Y(-u) u^k \otimes \frac{Y(-t - \varepsilon)}{t^{k+\bar{n}+1}} \right], \end{aligned}$$

d'où, en vertu de (8.19):

$$D \square^{\bar{n}} F_{\varepsilon} = Y(u) e^{-\frac{u}{4\varepsilon}} \otimes \frac{\delta(t - \varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} + (-1)^{\frac{n}{2}} Y(-u) e^{\frac{u}{4\varepsilon}} \otimes \frac{\delta(t + \varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \\ + \frac{(-1)^{\bar{n}} \bar{n}^{\bar{n}-1}}{\bar{n}!} \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} k! \square^{\bar{n}-k} Y(u) \otimes \frac{(-1)^k \delta(t - \varepsilon) + \delta(t + \varepsilon)}{\varepsilon^{k+1}}.$$

D'après (7.7), (7.5), (7.6) et le lemme 7.6 on a donc:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D \square^{\bar{n}} F_{\varepsilon} = \text{Pf.} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} [Y(u) e^{-\frac{u}{4\varepsilon}} \otimes \delta(t - \varepsilon) + (-1)^{\frac{n}{2}} Y(-u) e^{\frac{u}{4\varepsilon}} \otimes \delta(t + \varepsilon)] \\ = (-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} 2^n \delta.$$

Par suite $D \square^{\bar{n}} F = \delta$, et l'on a démontré complètement le théorème 3.

Les égalités (8.20), (8.21) et (8.22) vont nous fournir des renseignements complémentaires sur la solution élémentaire E . Plaçons-nous d'abord dans l'ouvert $u \neq 0$ de R^{n+1} . Dans le 1er cas, (8.20) donne:

$$\square^{\bar{n}} F_{\varepsilon} = Y(|t| - \varepsilon) t^{-\frac{n}{2}} \left[h(w) - \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \frac{k!}{w^{k+1}} \right].$$

D'après (7.1) on a donc:

$$\square^{\bar{n}} F_{\varepsilon} = (-1)^{\bar{n}} Y(|t| - \varepsilon) t^{-\frac{n}{2}} h^{(\bar{n})}(w).$$

Mais le lemme 7.2 montre que $w^{\bar{n}+1} h^{(\bar{n})}(w)$ est C^{∞} dans $u \neq 0$, donc aussi $t^{-\frac{n}{2}} h^{(\bar{n})}(w)$. On a donc:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \square^{\bar{n}} F_{\varepsilon} = (-1)^{\bar{n}} t^{-\frac{n}{2}} h^{(\bar{n})}(w). \tag{8.23}$$

Dans le 2e cas, (8.21), (6.13) et (6.14) donnent:

$$\square^{\bar{n}} F_{\varepsilon} = (-1)^{\bar{n}} Y(|t| - \varepsilon) |t|^{-\frac{n}{2}} [Y(u) Y(t) e^{-w} + (\text{sgn } t)^{\bar{n}+1} Y(-u) k(w)] \\ - (-1)^{\bar{n}} |t|^{-\frac{n}{2}} \frac{Y(-u)}{\pi \sqrt{|w|}} \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\Gamma(i + \frac{1}{2})}{w^i} [Y(t - \varepsilon) + (-1)^{\bar{n}+1} Y(-t - \varepsilon)].$$

En vertu de (7.3) il vient donc:

$$\square^{\bar{n}} F_{\varepsilon} = (-1)^{\bar{n}} Y(|t| - \varepsilon) |t|^{-\frac{n}{2}} [Y(u) Y(t) e^{-w} - Y(-u) (\text{sgn } w)^{\bar{n}+1} k^{(\bar{n})}(w)].$$

Mais il est clair que dans $u \neq 0$, $|t|^{-\frac{n}{2}} Y(u) Y(t) e^{-w}$ est une fonction C^{∞} .

D'après le lemme 7.3, il en est de même pour $(\text{sgn } w)^{\bar{n}+1} |w|^{\frac{n}{2}} k^{(\bar{n})}(w)$, donc pour $|t|^{-\frac{n}{2}} (\text{sgn } w)^{\bar{n}+1} k^{(\bar{n})}(w)$.

Il s'ensuit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \square^{\bar{n}} F_\varepsilon = (-1)^{\bar{n}} |t|^{-\frac{n}{2}} [Y(u) Y(t) e^{-w} - Y(-u) (\operatorname{sgn} w)^{\bar{n}+1} k^{(\bar{n})}(w)] \quad (8.24)$$

est une fonction C^∞ .

Enfin, dans le 3e cas, (8.22) permet d'écrire :

$$\square^{\bar{n}} F_\varepsilon = \operatorname{sgn} t Y(|t| - \varepsilon) t^{-\frac{n}{2}} Y(w) e^{-w}.$$

Comme la fonction $\operatorname{sgn} t t^{-\frac{n}{2}} Y(w) e^{-w}$ est C^∞ dans $u \neq 0$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \square^{\bar{n}} F_\varepsilon = \operatorname{sgn} t Y(w) t^{-\frac{n}{2}} e^{-w}. \quad (8.25)$$

Les égalités (8.23), (8.24) et (8.25) permettent d'énoncer :

Théorème 4. *Dans l'ouvert $u \neq 0$ de R^{n+1} , la solution élémentaire E est égale à une fonction de classe C^∞ . Dans le 1er cas :*

$$E = \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n+2}{2}}} t^{-\frac{n}{2}} h^{(\bar{n})}(w).$$

Dans le 2e cas :

$$E = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} (\operatorname{sgn} w)^{\bar{n}} |t|^{-\frac{n}{2}} [Y(u) Y(t) e^{-w} + \operatorname{sgn} t Y(-u) k^{(\bar{n})}(w)].$$

Dans le 3e cas :

$$E = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} \operatorname{sgn} t Y(w) t^{-\frac{n}{2}} e^{-w}.$$

Les fonctions h et k sont définies par (6.6) et (6.14).

Plaçons-nous maintenant dans l'ouvert $t \neq 0$ de R^{n+1} . Les expressions suivantes, conséquences de (8.20), (8.21) et (8.22) montrent que le cylindre $u = 0$ est une variété singulière pour la solution élémentaire E :

1er cas :

$$E = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n+2}{2}}} t^{-\frac{n}{2}} [h(w) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} a_i \square^i \log |u| t^i],$$

2e cas :

$$E = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} (\operatorname{sgn} t)^{\bar{n}+1} |t|^{-\frac{n}{2}}$$

$$\left[Y(u) Y(t) e^{-w} + Y(-u) k(w) - \frac{2\sqrt{|t|}}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{\bar{n}} a_i \square^i \frac{Y(-u)}{\sqrt{|u|}} t^i \right],$$

3e cas :

$$E = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} t^{-\frac{n}{2}} [\operatorname{sgn} t Y(w) e^{-w} + \sum_{i=1}^{\bar{n}} a_i \square^i Y(u) t^i],$$

où, dans chaque cas, on a posé

$$a_i = \frac{(-1)^i (n-i)!}{\bar{n}!}.$$

Pour $n \geq 4$, il résulte de ces expressions que dans $t \neq 0$, E est la somme d'une fonction localement intégrable et d'une distribution à support $u = 0$. Si $n = 2$ ou 3 , le théorème 3 montre que E est localement intégrable dans R^{n+1} .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ERDÉLYI, *Higher transcendental functions*. Vol. I, McGRAW - HILL Book Company, 1953.
- [2] L. GÅRDING, *Transformation de FOURIER des distributions homogènes*. Bull. Soc. math. France 89 (1961), 381-428.
- [3] L. HÖRMANDER, *On the division of distributions by polynomials*. Arkiv för matematik, Bd 3, nr 53 (1958), 555-568.
- [4] P.-D. METHÉE, *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de LORENTZ*. Comm. Math. Helv. 28 (1954), 225-269.
- [5] P.-D. METHÉE, *Transformées de FOURIER de distributions invariantes liées à la résolution de l'équation des ondes*. Colloques internationaux du CNRS, 71, La théorie des équations aux dérivées partielles, Nancy, 1956, 145-163.
- [6] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*. Paris, HERMANN, 1955.
- [7] G. DE RHAM, *Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre*. Ann. Inst. FOURIER, Grenoble, 8 (1958), 337-366.
- [8] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. Tomes 1 (2e édition) et 2, Paris, HERMANN, 1957 et 1951.
- [9] A. TENGSTRAND, *Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature*. Math. Scand. 8 (1960), 201-218.

(Reçu le 20 décembre 1962)