

Auswahlaxiom in der Algebra.

Autor(en): **Läuchli, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **37 (1962-1963)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28602>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Auswahlaxiom in der Algebra

von H. LÄUCHLI, Winterthur

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird von einigen mathematischen Sätzen, vorwiegend von Sätzen aus der Algebra, gezeigt, daß sie nicht ohne Auswahlaxiom beweisbar sind.

Zu diesem Zwecke werden Modelle für die Mengenlehre konstruiert nach einer Methode, wie sie erstmals von A. FRAENKEL in [3], später von A. MOSTOWSKI [6] und R. FRAISSÉ [4] angewendet wurde. E. SPECKER beschrieb diese Methode in ihrer allgemeinsten Art in [7].

Wir geben in Kapitel I im wesentlichen eine Zusammenfassung dieser Beschreibung. Als Rahmen dient das von P. BERNAYS [1] aufgestellte Axiomensystem für die Mengenlehre. Die Kapitel II–VI bringen Anwendungen der in Kapitel I beschriebenen Methode.

Wir zeigen in Kapitel II, daß die folgenden Sätze aus der Körpertheorie nicht ohne Auswahlaxiom beweisbar sind: Jeder Körper besitzt einen algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper; jeder formal-reelle Körper besitzt einen reell-abgeschlossenen Erweiterungskörper; jeder algebraisch-abgeschlossene, algebraische Erweiterungskörper eines abzählbaren Körpers ist abzählbar (insbesondere: jeder algebraische Erweiterungskörper des Körpers der rationalen Zahlen ist abzählbar); zwischen einem formal-reellen Körper und einer algebraisch-abgeschlossenen Erweiterung dieses Körpers gibt es einen reell-abgeschlossenen Körper.

In Kapitel III wird ein Modell konstruiert, worin ein (nicht endlich dimensionaler) Vektorraum v existiert mit den folgenden Eigenschaften: a) Jeder echte Unterraum von v ist endlich dimensional. Daraus ergibt sich beispielsweise, daß v keine Basis (im algebraischen Sinne) besitzt, und daß der duale Raum v^* nur aus der 0-Abbildung besteht. b) Die einzige zulässige Vektorraumtopologie auf v ist die triviale (größte). c) Die einzigen linearen Selbstabbildungen von v sind die Vielfachen der Identität.

In Kapitel IV wird gezeigt, daß der Schreiersche Satz über die Untergruppen freier Gruppen nicht ohne Auswahlaxiom beweisbar ist.

In Kapitel V wird ein Modell angegeben, worin isomorphe Vektorräume mit ungleich mächtigen Basen existieren. Das heißt der Satz, wonach alle Basen eines Vektorraumes gleich mächtig sind, ist nicht ohne Auswahlaxiom beweisbar. Im gleichen Modell existieren verschieden mächtige Mengen mit gleich

mächtigen Potenzmengen. Nach derselben «Methode der direkten Summe», wie sie hier zur Anwendung gelangt, können viele weitere Beispiele behandelt werden.

In Kapitel VI wird im wesentlichen gezeigt, daß der Satz von Urysohn (aus der Topologie) nicht ohne Auswahlaxiom beweisbar ist. Dabei gelangt ein Modell zur Anwendung, das sich von allen vorher konstruierten insofern unterscheidet, als es kein Normalmodell ist (vgl. 1.6).

Da das Hauptgewicht der Arbeit auf Anwendungen der in [7] beschriebenen Methode zur Konstruktion von Modellen liegt und nicht auf axiomatischen Untersuchungen der Mengenlehre, wurde auf einen formalen Aufbau im Sinne der Mathematischen Logik verzichtet.

I. Permutationsmodelle¹⁾

1. Wir legen der Mengenlehre die Axiome I–VI des Axiomensystems von BERNAYS [1] zugrunde: Dies sind die Axiome der Extensionalität, der direkten Mengenkonstruktion, der Klassenkonstruktion, das Auswahlaxiom, das Axiom über die Darstellung von Klassen durch Mengen, das Unendlichkeitsaxiom.

Zusätzlich erfülle die Mengenlehre ein «Fundierungsaxiom bezüglich einer Basismenge a_0 ».

Das heißt a) Die Klasse A derjenigen Mengen, die sich selbst als einziges Element enthalten, $A = \{x \mid x = (x)\}$, werde durch eine Menge repräsentiert: Die Basismenge a_0 .

b) Jede nicht leere Klasse C enthalte ein Element c , so daß $C \cap c \subset a_0$.

Dieses Axiom hat die folgende Bedeutung: Sei ψ die Funktion, die jedem Paar a, α , gebildet aus einer beliebigen Menge a und einer Ordnungszahl α , eine Menge $\psi(a, \alpha)$ zuordnet, so daß gilt: $\psi(a, 0) = 0$, $\psi(a, \alpha + 1)$ ist die Potenzmenge von $\psi(a, \alpha)$, für eine Limeszahl λ ist $\psi(a, \lambda)$ die Vereinigung der Mengen $\psi(a, \xi)$ mit $\xi \in \lambda$. $\Pi(a)$ sei die Vereinigungsklasse der Menge $\psi(a, \alpha)$, wo α die Klasse aller Ordnungszahlen durchläuft. Das Fundierungsaxiom bezüglich a_0 ist nun äquivalent mit der Forderung, daß $\Pi(a_0)$ die Allklasse sei.

Die Elemente der Basismenge a_0 übernehmen die Rolle der Urelemente in Zermelos Terminologie. Das klassische Fundierungsaxiom besagt, daß $\Pi(0)$ die Allklasse sei.

Das Fundierungsaxiom bezüglich a_0 ist konsistent mit den Axiomen I–VI; dabei darf die Mächtigkeit von a_0 frei vorgeschrieben werden (vgl. [7]).

Die von uns betrachtete Mengenlehre soll von abzählbarer Basis sein. a_0 wird zugleich Basismenge der Modelle sein, die wir, ausgehend von dieser

¹⁾ Vgl. mit der in [7], S.193–199, gegebenen Darstellung.

Mengenlehre, konstruieren werden; a_0 wird jedoch im Modellsinn nicht abzählbar sein.

In unserer Mengenlehre gibt es keine anderen Objekte als Mengen und Klassen. So werden geordnete Paare von Mengen, Abbildungen, Ordnungszahlen usw. in der üblichen Art durch Klassen (Mengen) dargestellt. Algebraische Strukturen können in natürlicher Weise durch Mengen repräsentiert werden: Ein Körper k ist beispielsweise ein Tripel $k = \langle \kappa, \alpha, \mu \rangle$, wobei α (die Addition) und μ (die Multiplikation) Abbildungen von $\kappa \times \kappa$ auf κ sind, welche den Körperaxiomen genügen; κ ist die Menge der «Körper-elemente», auch das «Feld» von k genannt.

2. Ein Automorphismus φ der Mengenlehre ist eine solche 1-1-deutige Abbildung der Allklasse $\Pi(a_0)$ auf sich, welche die ϵ -Relation erhält: $x \epsilon y$ genau dann, wenn $\varphi(x) \epsilon \varphi(y)$.

Jede Permutation der Basismenge a_0 läßt sich in eindeutiger Weise fortsetzen zu einem Automorphismus von $\Pi(a_0)$. Die Klasse $\Pi(0)$ besitzt somit nur den trivialen Automorphismus. $\Pi(0)$ wird von jedem Automorphismus der Klasse $\Pi(a_0)$ in sich transformiert und bleibt somit elementweise fest.

Die durch die Elemente einer Permutationsgruppe g von a_0 induzierten Automorphismen der Mengenlehre bilden wieder eine Gruppe \bar{g} (die Elemente von \bar{g} sind echte Klassen; \bar{g} ist kein Objekt der betrachteten Mengenlehre).

Sei g eine Permutationsgruppe von a_0 . Wir ordnen einer Klasse C (Menge c) die Untergruppe $h(C)$ ($h(c)$) derjenigen Elemente von g zu, die solche Automorphismen der Mengenlehre induzieren, welche $C(c)$ auf sich abbilden.

Ist f eine Menge von Untergruppen von g , dann existiert die Klasse der Mengen x mit $h(x) \epsilon f$.

3. Sei g eine Permutationsgruppe von a_0 . Eine Menge f von Untergruppen von g ist ein Filter auf g , wenn (1) mit einer Untergruppe auch ihre Konjugierten, (2) mit einer Untergruppe auch jede umfassendere, (3) mit zwei Untergruppen auch deren Durchschnitt zu f gehört.

4. Wir ordnen einem Filter f das folgende Modell $M(f)$ zu (die Gruppe g ist durch f bestimmt):

- a) Mengen des Modells sind Mengen mit der Eigenschaft, daß die ihnen und den Elementen ihrer transitiven Hülle zugeordneten Untergruppen zu f gehören.
- b) Klassen des Modells sind Klassen mit der Eigenschaft, daß die ihnen und den Elementen ihrer transitiven Hülle zugeordneten Untergruppen zu f gehören.

- c) Gleichheits- und ϵ -Relation des Modells sind die Gleichheits- und ϵ -Relation der Mengenlehre.

In $M(f)$ sind, abgesehen vom Auswahlaxiom, alle der oben aufgezählten Axiome erfüllt.

Wir erwähnen noch die folgenden Eigenschaften des Modells:

Eine M -Klasse (Klasse des Modells) wird genau dann im Modellsinn durch eine Menge repräsentiert, wenn sie in der Mengenlehre repräsentiert wird. Die transitive Hülle einer M -Klasse (M -Menge) im Modellsinn stimmt überein mit der transitiven Hülle im Sinne der Mengenlehre. Die Klasse $\Pi(0)$ im Modellsinn ist die Klasse $\Pi(0)$ der Mengenlehre, Ordnungszahlen des Modells sind diejenigen der Mengenlehre.

Der Endlichkeitsbegriff ist derselbe in Modell und Mengenlehre; denn zunächst ist der Begriff der endlichen Ordnungszahl derselbe. Des weiteren ist eine im Modellsinn 1-1-deutige Abbildung von einer M -Menge auf eine endliche Ordnungszahl eine 1-1-deutige Abbildung im Sinne der Mengenlehre, da die transitive Hülle dieser Abbildung in Modell und Mengenlehre dieselbe ist. Es bleibt zu zeigen, daß eine endliche M -Menge endlich im Modellsinn ist: Sei x eine M -Menge, φ eine 1-1-deutige Abbildung von x auf eine endliche Ordnungszahl α . Wir zeigen, daß φ eine M -Menge ist. Da alle Elemente der transitiven Hüllen von α und x M -Mengen sind, gilt dasselbe für die Elemente der transitiven Hülle von φ . Es bleibt zu zeigen, daß $h(\varphi) \in f$. Durch vollständige Induktion nach α beweist man unter Berücksichtigung von Filtereigenschaft (3), daß $\bigcap_{y \in x} h(y) \in f$. Diese Gruppe läßt sowohl x als auch α , somit auch φ elementweise fest. Sie ist somit Untergruppe von $h(\varphi)$ (sogar $= h(\varphi)$). Aus Filtereigenschaft (2) folgt $h(\varphi) \in f$.

$M(f)$ erfüllt das auf $\Pi(0)$ beschränkte Auswahlaxiom: Es gibt eine Funktion, die jeder nicht leeren Menge aus $\Pi(0)$ eines ihrer Elemente zuordnet.

5. Der Filter f , bzw. das Modell $M(f)$ heißen nicht trivial, wenn f die folgenden zusätzlichen Bedingungen erfüllt: (4) Für alle $r \in a_0$ ist $h(r) \in f$, (5) die triviale Untergruppe (die die Identität als einziges Element enthält) gehört nicht zu f .

Aus (4) folgt, daß a_0 Modellmenge ist. a_0 ist in jedem nicht trivialen Modell Basismenge. (5) zieht nach sich, daß nicht jede Menge M -Menge ist.

Wir werden nur nicht-triviale Modelle betrachten.

Satz. *In einem nicht trivialen Modell läßt sich a_0 nicht wohlordnen.*

Beweis: Eine im Modellsinn 1-1-deutige Abbildung Φ von a_0 auf eine Ordnungszahl α wäre auch eine solche Abbildung im Sinne der Mengenlehre.

Sei $r \in a_0$, $\langle r, \xi \rangle \in \Phi$, $\varphi \in h(\Phi)$, $\varphi(r) = r'$. Wegen $\varphi(\xi) = \xi$ folgt $\langle r', \xi \rangle = \langle \varphi(r), \varphi(\xi) \rangle = \varphi(\langle r, \xi \rangle)$, also $\langle r', \xi \rangle \in \Phi$. Somit, da Φ 1-1-deutig ist, $r' = r$. $h(\Phi)$ ist somit die triviale Untergruppe und gehört nach (5) nicht zu f , Widerspruch.

Wie aus dem Beweis hervorgeht, läßt sich eine M -Menge x genau dann im Modellsinn wohlordnen, wenn es eine Gruppe in f gibt, deren induzierte Automorphismen x elementweise fest lassen.

Eine Modellmenge x ist genau dann im Modellsinn transfinit (d.h. besitzt eine abzählbare Teilmenge), wenn es eine unendliche Teilmenge x' von x gibt, die von einer Gruppe aus f elementweise fest gehalten wird.

6. Unter dem einer Permutationsgruppe g von a_0 zugehörigen Normalfilter $f(g)$ verstehen wir den durch die Menge $\{h(r) \mid r \in a_0\}$ erzeugten Filter. Sei e eine endliche Teilmenge von a_0 . Wir setzen $\tilde{h}(e) = \bigcap_{r \in e} h(r)$. Der Normalfilter $f(g)$ ist die Gesamtheit derjenigen Untergruppe von g , die eine Gruppe $\tilde{h}(e)$ umfassen. $f(g)$ ist nicht-trivial, sobald (5) gilt, d.h. sobald es zu jeder endlichen Teilmenge e von a_0 eine von der Identität verschiedene Permutation in g gibt, die e elementweise fest hält.

Wir nennen das durch $f(g)$ definierte Modell das zu g gehörige Normalmodell $N(g) : N(g) = M(f(g))$.

Der Filter f irgendeines nicht-trivialen Modells umfaßt den Filter $f(g)$; die Normalmodelle sind in diesem Sinne minimal.

In der Literatur wurden meines Wissens bisher keine anderen Modelle als Normalmodelle untersucht. Wir geben in Kapitel VI ein Beispiel für ein anderes Modell.

II. Beispiele aus der Körpertheorie

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß gewisse Sätze aus der Körpertheorie nicht ohne Auswahlaxiom beweisbar sind.

1. Modell. Sei g die durch die Menge aller Transpositionen der Basismenge a_0 erzeugte Gruppe, $N(g)$ das zugehörige Normalmodell. $N(g)$ ist nicht-trivial, jede Gruppe aus dem Normalfilter $f(g)$ enthält Transpositionen.

Wir beweisen die Sätze

1.1. *In $N(g)$ existiert ein Körper, der keinen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper besitzt²⁾.*

²⁾ Satz und Beweis bleiben richtig, wenn wir überall «algebraisch-abgeschlossener Körper» durch «Körper, der mit jedem Element auch dessen Quadratwurzeln enthält» ersetzen.

1.2. In $N(g)$ existiert ein formal-reeller Körper, der keinen reell abgeschlossenen Erweiterungskörper besitzt³⁾.

Beweis von 1.1.: Der Beweis beruht auf dem folgenden algebraischen

Hilfssatz: (i) Jeder Automorphismus der Ordnung 2 eines algebraisch abgeschlossenen Körpers (mit Char. $\neq 2$) vertauscht die beiden Quadratwurzeln von -1 .

Beweis von (i): Sei φ ein Körperautomorphismus der Ordnung 2, $\varphi(x) = y$, $y \neq x$. Es ist $\varphi(y) = x$. Für $z = x - y$ ist $\varphi(z) = -z$ und $z \neq 0$. Sei u eine Quadratwurzel von z . Dann ist $\varphi(u)$ eine Quadratwurzel von $-z$, also $i = \frac{\varphi(u)}{u}$ eine Quadratwurzel von -1 . Es ist $\varphi(u) = iu$, also $u = \varphi^2(u) = \varphi(iu) = \varphi(i) \cdot \varphi(u) = \varphi(i) iu$, also $\varphi(i) i = 1$, $\varphi(i) = -i$. w.z.b.w.

Wir zerlegen den Beweis von 1.1 in zwei Schritte:

1.11. Es gibt in $N(g)$ einen Körper mit einer Charakteristik verschieden von 2, dessen Feld die Menge a_0 umfaßt.

1.12. Es gibt in $N(g)$ keinen algebraisch-abgeschlossenen Körper mit einer Charakteristik verschieden von 2, dessen Feld die Menge a_0 umfaßt.

Beweis von 1.11: Sei P ein Körper mit Charakteristik verschieden von 2, dessen Feld keine Elemente aus a_0 enthalte. Auf Grund des Funktions- und Endlichkeitsbegriffs läßt sich in üblicher Weise ein Oberkörper konstruieren, dessen Feld die Menge a_0 als Menge unabhängiger Transzendenten über P umfaßt.

Beweis von 1.12: Sei $k = \langle \kappa, \alpha, \mu \rangle$ ein algebraisch-abgeschlossener Körper im Modell mit Charakteristik $\neq 2$. Wir zeigen, daß $a_0 \not\subset \kappa$:

k ist auch im Sinne der Mengenlehre ein Körper mit den genannten Eigenschaften. Die durch die Elemente von $h(k)$ ($h(k)$ ist die k zugeordnete Untergruppe von g) induzierten Automorphismen der Allklasse bilden mit k auch die Mengen κ, α, μ je auf sich ab. Die Beschränkung eines solchen Automorphismus auf κ ist somit ein Körperautomorphismus von k . Sei i eine Quadratwurzel von -1 . Wir setzen $h = h(k) \cap h(i)$. Die Elemente von h induzieren solche Automorphismen von k , die i fest lassen, und somit nach der Kontraposition von (i) solche, deren Ordnungen von 2 verschieden sind. Da $h \in f(g)$, enthält h Transpositionen (von Elementen aus a_0). Eine solche Transposition τ induziert einen Automorphismus der Mengenlehre von der Ordnung 2 und somit einen Körperautomorphismus von k , dessen Ordnung ≤ 2 ist. Wären die durch τ transponierten Elemente von a_0 in κ enthalten,

³⁾ Für die Begriffe «formal-reell» und «reell-abgeschlossen» vgl. z.B. [8].

dann wäre diese Ordnung $= 2$, entgegen dem vorhergehenden. Es ist somit $a_0 \notin \kappa$, w.z.b.w.

Beweis von 1.2:

1.21. Es gibt in $N(g)$ einen formal-reellen Körper, dessen Feld die Menge a_0 umfaßt.

1.22. Es gibt in $N(g)$ keinen reell-abgeschlossenen Körper, dessen Feld die Menge a_0 umfaßt.

Beweis von 1.21: Ist der im Beweis von 1.11 betrachtete Körper P formal-reell, so ist es auch der dort erwähnte Oberkörper von P .

Beweis von 1.22: Ein reell-abgeschlossener Körper besitzt eine kanonische Anordnung ($x \geq 0$, wenn x ein Quadrat ist). Es läßt sich somit jede Teilmenge seines Feldes ordnen. Andererseits läßt sich die Menge a_0 im Modell nicht ordnen: Eine solche Ordnungsrelation wäre auch Ordnungsrelation im Sinne der Mengenlehre. Die ihr zugeordnete Gruppe h bestünde aus ordnungstreuen Permutationen von a_0 und enthielte somit keine Transpositionen. Jede Gruppe aus $f(g)$ enthält aber Transpositionen.

2. Modell. Sei k ein algebraisch abgeschlossener, algebraischer Erweiterungskörper seines Primkörpers P mit Charakteristik 0. Das Feld von k sei die Basismenge a_0 .

Es gibt einen solchen Körper: denn es gibt einen abzählbaren Körper h , der außer der letztgenannten alle diese Eigenschaften besitzt. Das Feld von h läßt sich 1-1-deutig auf a_0 abbilden. Diese Abbildung induziert auf a_0 in natürlicher Weise eine Körperstruktur k von der verlangten Art.

g sei die Gruppe aller Automorphismen von k . g ist eine Permutationsgruppe von a_0 . Wir betrachten das Normalmodell $N(g)$. k ist auch im Modellsinn ein algebraisch-abgeschlossener, algebraischer Erweiterungskörper von P ; P ist auch im Modellsinn abzählbar (die Gruppe g läßt das Feld von P elementweise fest).

Wir beweisen die folgenden Sätze:

2.1. *Das Feld von k ist im Modell nicht abzählbar.*

2.2. *k besitzt im Modell keinen reell-abgeschlossenen Unterkörper.*

Bemerkung zu 2.1: Der Primkörper P von k ist der Körper der rationalen Zahlen. k ist ein nicht abzählbarer, algebraischer Erweiterungskörper von P .

Beweis von 2.1: Nach Kap. I, Abschnitt 5, genügt es zu zeigen, daß das Modell $N(g)$ nicht trivial ist. k ist nicht endlich über P . Jede endliche Teilmenge e von a_0 spannt einen endlichen Erweiterungskörper E von P auf.

Es existieren nicht triviale Automorphismen von k rel. E^4) (Auswahlaxiom in der umfassenden Mengenlehre!). $N(g)$ ist somit nicht trivial.

Beweis von 2.2: Jeder reell-abgeschlossene Körper des Modells ist reell-abgeschlossen im Sinne der Mengenlehre. Sei k' im Sinne der Mengenlehre ein reell-abgeschlossener Unterkörper von k . Es ist zu zeigen, daß es zu jedem endlichen Erweiterungskörper E von P einen Automorphismus von k rel. E gibt, der k' nicht auf sich abbildet.

Sei E ein endlicher Erweiterungskörper von P . k' ist nicht Unterkörper von E , da ein endlicher Erweiterungskörper von P nicht reell-abgeschlossen ist. Sei x ein Körperelement von k' , das nicht in E liegt. Es gibt einen Automorphismus φ von k rel. E mit $\varphi(x) \neq x$. Würde k' von φ auf sich abgebildet, dann besäße k' einen nicht trivialen Automorphismus, was bekanntlich für reell-abgeschlossene, algebraische Erweiterungskörper von P nicht der Fall ist.

Mit den eben verwendeten Methoden läßt sich zeigen, daß auch der folgende Satz nicht ohne Auswahlaxiom beweisbar ist: Zu jedem Erweiterungskörper k' eines Körpers k gibt es einen Zwischenkörper z , so daß k' algebraisch über z und z rein transzendent über k (bzw. $= k$) ist.

Hingegen ist ohne Auswahlaxiom beweisbar, daß jeder reell-abgeschlossene, algebraische Erweiterungskörper k' eines abzählbaren Körpers k abzählbar ist: Erstens ist der Polynomring $k[x]$ abzählbar; zweitens gibt es vermöge der kanonischen Anordnung von k' eine Funktion, die jedem Polynom f aus $k[x]$ eine Ordnung der Menge der in k' liegenden Nullstellen von f zuordnet. Da nun jedes Körperelement von k' 0-Stelle eines Polynoms aus $k[x]$ ist, ist somit das Feld von k' abzählbar.

III. Beispiel aus der Theorie der Vektorräume

Es sei k ein Körper in $\Pi(0)$ mit abzählbarem Feld. v sei ein unendlich dimensionaler⁵⁾ Vektorraum über k mit $t(v) = a_0$.⁶⁾ Analog wie anläßlich der Definition des zweiten Modells im vorhergehenden Kapitel zeigt man, daß ein solcher Vektorraum existiert. Die Automorphismengruppe g von v ist eine Permutationsgruppe von a_0 . v ist im Normalmodell $N(g)$ ein unendlich dimensionaler Vektorraum über k mit den folgenden Eigenschaften:

1. Jede Teilmenge von $t(v)$ ist entweder Teilmenge des Feldes eines endlich

⁴⁾ Ein Automorphismus von k rel. E ist ein solcher, der E elementweise fest läßt.

⁵⁾ Unendlich dimensional soll heißen: Es existiert keine endliche Basis.

⁶⁾ Mit $t(v)$ bezeichnen wir das Feld von v .

dimensionalen Unterraumes von v , oder dann Komplement (bezüglich $t(v)$) einer solchen Menge.

Beweis: Sei $x \subset t(v)$ eine Modellmenge. Es existiert eine endliche Teilmenge e' von $a_0 = t(v)$, so daß x von der Gruppe $\tilde{h}(e')$ in sich transformiert wird (vgl. I. 6.). Ist e der von e' aufgespannte Unterraum von v , so wird x von jedem Automorphismus von v rel. e in sich transformiert. Da zu je zwei Elementen s, t aus $t(v) - t(e)$ ein Automorphismus von v rel. e existiert, der s in t überführt⁷⁾, folgt, daß entweder $x \subset t(e)$ oder $x \supset t(v) - t(e)$, w.z.b.w.

Aus 1. ergeben sich die folgenden Korollare:

1.1. *Jeder echte (lineare) Unterraum von v ist endlich dimensional.*

Beweis: Es ist ohne Auswahlaxiom beweisbar, daß jeder Unterraum eines endlich dimensional Vektorraumes endlich dimensional ist. Wegen 1. muß daher das Feld $t(u)$ eines unendlich dimensional Unterraumes u von v das mengentheoretische Komplement des Feldes $t(e)$ eines endlich dimensional Unterraumes e von v umfassen. Daraus folgt $t(u) = t(v)$:

Sei $x \in t(v)$. $t(v) - t(e)$ ist nicht leer, da v nicht endlich dimensional ist. Sei $y \in t(v) - t(e)$, also $y \in t(u)$. Falls $x + y \in t(e)$, dann $x \notin t(e)$, da $y \notin t(e)$; also $x \in t(v) - t(e) \subset t(u)$. Falls $x + y \notin t(e)$, dann $x + y \in t(u)$, und wegen $y \in t(u)$ folgt auch hier $x \in t(u)$. Es ist somit $t(u) = t(v)$, $u = v$, w.z.b.w.

1.2. *v besitzt keine Basis.*

Beweis: Eine Basis von v wäre nicht endlich und besäße somit echte, unendliche Teilmengen (z.B. Weglassen eines Elementes). Eine solche Teilmenge würde einen echten, unendlich dimensional Unterraum von v aufspannen, entgegen 1.1.

1.3. *v besitzt keine echte, komplementäre Unterräume.*

Beweis: Von zwei komplementären Unterräumen kann höchstens der eine endlichdimensional sein. Nach 1.1 muß dann der andere mit v übereinstimmen; die Zerlegung ist nicht echt.

1.4. *Der duale Raum v^* ist trivial, d.h. enthält nur die Nullfunktion.*

Beweis: Sei φ eine lineare Funktion auf v mit Werten im Koeffizientenkörper k , und sei u der Kern von φ . Dann ist $\dim(v/u) \leq 1$. Daraus folgt, daß u nicht endlich dimensional ist, also wegen 1.1: $u = v$, w.z.b.w.

⁷⁾ Man wähle geeignete Basen von v (im Sinne der Mengenlehre). Die Existenz einer solchen Basis ergibt sich auf Grund des Auswahlaxioms in der Mengenlehre, oder auf Grund der Abzählbarkeit von $t(v)$ im Sinne der Mengenlehre.

Von Interesse ist das folgende Korollar zu 1.4:

1.5. *Ein nicht-triviales Element des dualen Raumes u^* eines Unterraumes u von v läßt sich nicht auf ganz v erweitern.*

Der nächste Satz bezieht sich auf den Fall, daß der Körper k mit einer nicht-diskreten Topologie versehen ist. Eine zulässige Topologie auf v ist dann stets absorbierend: Zu jeder Umgebung U der Null und zu jedem Vektor x gibt es ein Körperelement λ , $\lambda \neq 0$, mit $\lambda x \in U$. Wir nennen die Topologie, in der der ganze Raum und die leere Menge die einzigen offenen Mengen sind, die triviale Topologie. Mit dem Auswahlaxiom ist für jeden Vektorraum die Existenz einer nicht trivialen Topologie beweisbar, sofern der Körper mit einer nicht trivialen Topologie versehen ist.

2. *Die einzige Vektorraumtopologie auf v ist die triviale Topologie.*

Beweis: Wir zeigen, daß für jede Umgebung U der Null gilt $U + U = t(v)$. Daraus folgt wegen der Stetigkeit der Addition, daß $t(v)$ die einzige Umgebung der Null ist, und wegen der Translationsinvarianz der Topologie, daß $t(v)$ die einzige nicht leere offene Menge ist.

Es sei U eine Umgebung der Null. Da U absorbierend ist, ist U nicht Teilmenge des Feldes eines echten linearen Unterraumes von v . Nach 1. existiert somit ein endlich dimensionaler Unterraum e von v mit $t(v) - t(e) \subset U$. Daraus folgt $U + U = t(v)$:

Vorerst ist $U + U \supset t(v) - t(e)$. Ist $x \in t(e)$, $y \in t(v) - t(e)$, dann auch $x - y \in t(v) - t(e)$. Also $x = y + (x - y)$ mit $y \in U$ und $x - y \in U$. Also $t(e) \subset U + U$ und somit $t(v) = U + U$, w.z.b.w.

3. *Die einzigen linearen Selbstabbildungen von v sind die Vielfachen der Identität (d.h. die Abbildungen $\lambda \cdot 1$, $\lambda \in t(k)$); insbesondere ist die Nullabbildung die einzige singuläre lineare Selbstabbildung.*

Beweis: Sei φ eine lineare Selbstabbildung von v . e sei ein endlich dimensionaler Unterraum von v , so daß φ von jedem Automorphismus von v rel. e in sich transformiert wird. w sei ein zu e komplementärer Unterraum (im Sinne der Mengenlehre). w ist unendlich dimensional. Wir zerlegen $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, so daß $\varphi_1(x) \in t(e)$, $\varphi_2(x) \in t(w)$. Der Kern r der auf w beschränkten Abbildung φ_1 ist nicht endlich dimensional, da e , hingegen nicht w , endlich dimensional ist. φ bildet r in w ab. Für $x \in t(r)$ ist $\varphi(x)$ ein Vielfaches von x ; denn sonst gäbe es einen Automorphismus von w , der x , aber nicht $\varphi(x)$, fest ließe, und jeder Automorphismus von w läßt sich fortsetzen zu einem solchen von v rel. e . Also $\varphi(x) = \lambda(x) \cdot x$ für alle $x \in t(r)$. Aus der Linearität von φ folgt, daß die Funktion λ konstant ist. Das heißt, es existiert ein $\lambda \in t(k)$, so daß $\varphi(x) = \lambda \cdot x$ für alle $x \in t(r)$. Im Modellsinn

existiert der lineare Raum u derjenigen $x \in t(v)$, für welche $\varphi(x) = \lambda \cdot x$. u ist nicht endlich dimensional, da u im Sinne der Mengenlehre einen nicht endlich dimensionalen Raum r umfaßt. Aus 1.1 folgt $u = v$, w.z.b.w.

IV. Beispiel aus der Gruppentheorie

Wir zeigen, daß der SCHREIERSche Satz über die Untergruppen freier Gruppen im allgemeinen Fall (freie Gruppen über beliebig unendlichem Erzeugendensystem) nicht ohne Auswahlaxiom bewiesen werden kann.

Sei S ein freies Erzeugendensystem einer Gruppe F , und sei $u, v \in S$. Wir betrachten den Automorphismus φ von F , der durch die Transposition $u \longleftrightarrow v$ induziert wird. Wir setzen $\bar{\alpha} = \varphi(\alpha)$ ($\alpha \in F$). Dann gilt:

1. Stellt das Wort $W = X_1^{\varepsilon_1} \dots X_u^{\varepsilon_u}$, $x_i \in S$, $\varepsilon_i = \pm 1$, das Element α dar, dann wird $\bar{\alpha}$ durch $\bar{W} = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_u^{\varepsilon_u}$ dargestellt. Das Wort \bar{W} ist genau dann ausgekürzt, wenn W es ist. Für zwei Worte W_1, W_2 ist $\overline{W_1 W_2} = \bar{W}_1 \bar{W}_2$; insbesondere ist $W_1 W_2$ genau dann ausgekürzt, wenn $\bar{W}_1 \bar{W}_2$ es ist.

2. Ist $\bar{W} = W$, dann kommen in W die Symbole u, v nicht vor.

3. Ist Q ein freies System von Elementen aus F , welches durch φ in sich transformiert wird, U die durch Q erzeugte Untergruppe von F , α eine Element aus U mit $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$, dann gibt es ein $\beta \in U$ mit $\alpha = \beta \bar{\beta}^{-1}$.

Beweis von 3.:

Sei $\alpha = \xi_0^{\varepsilon_0} \dots \xi_u^{\varepsilon_u}$, $\xi_i \in Q$, die bezüglich Q ausgekürzte Darstellung von α . Es ist $\bar{\xi}_i \in Q$ und es sind auch die Darstellungen $\bar{\alpha} = \bar{\xi}_0^{\varepsilon_0} \dots \bar{\xi}_u^{\varepsilon_u}$, $\alpha^{-1} = \xi_u^{-\varepsilon_u} \dots \xi_0^{-\varepsilon_0}$ ausgekürzt. Wegen $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$ ist somit $\bar{\xi}_{u-k} = \xi_k$, $\varepsilon_{u-k} = -\varepsilon_k$ für $k = 0, \dots, u$. Aus $\varepsilon_{u-k} = -\varepsilon_k$ folgt, daß $u+1$ gerade ist. Für $\beta = \xi_0^{\varepsilon_0} \dots \xi_l^{\varepsilon_l}$, wo $2l+1 = u$, gilt $\alpha = \beta \bar{\beta}^{-1}$, w.z.b.w.

Wir betrachten nun das Normalmodell $N(g)$, wo g wie in II.1. die durch alle Transpositionen der Basismenge a_0 erzeugte Gruppe sei. Wir betrachten (im Modell) die freie Gruppe F über $S = a_0$.

Satz. Die Kommutatorgruppe C von F besitzt kein freies Erzeugendensystem.

Beweis: F (bzw. C) ist auch in der umfassenden Mengenlehre die freie Gruppe über S (bzw. die Kommutatorgruppe von F). Ein freies Erzeugendensystem Q von C wäre dies auch im Sinne der Mengenlehre. Die Gruppen $h(Q)$, $h(F)$ (vgl. I.2.), und somit auch $h = h(F) \cap h(Q)$, wären Elemente des Normalfilters $f(g)$. h enthält diejenigen Elemente von g , die solche Auto-

morphismen der Mengenlehre induzieren, deren Beschränkung auf das Feld von F ein Gruppenautomorphismus von F ist, und die Q auf sich abbilden. h enthielte eine Transposition $\varphi: u \leftrightarrow v$, $u, v \in a_0$.

Wir betrachten das Gruppenelement $\alpha = uvu^{-1}v^{-1}$. Es ist $\alpha \in C$, und die Voraussetzungen für 3. sind erfüllt ($S = a_0$). Also gäbe es ein $\beta \in C$ mit $\alpha = \beta\bar{\beta}^{-1}$. W sei das ausgekürzte Wort in Elementen aus S , das β darstellt. Dann wird $\bar{\beta}^{-1}$ durch das ausgekürzte Wort \bar{W}^{-1} dargestellt (1.). W_2 sei dasjenige Endstück von W , das bei der Komposition $W\bar{W}^{-1}$ weggekürzt wird: $W = W_1W_2$, $\bar{W}^{-1} = \bar{W}_2^{-1}\bar{W}_1^{-1}$ (1.). Dasjenige Anfangsstück von \bar{W}^{-1} , das weggekürzt wird, ist von derselben Länge wie W_2 . Es wird somit genau \bar{W}_2^{-1} weggekürzt, also $W_2 = \bar{W}_2$. u, v kommen somit in W_2 nicht vor (2). Wegen $\beta \in C$ haben u und v in $W = W_1W_2$ je die Exponentensumme 0, und somit auch in W_1 . Andererseits folgt aus dem Vorhergehenden, daß $\bar{W}_1W_1^{-1}$ die ausreduzierte Darstellung von α ist (bezüglich S), das heißt $W_1\bar{W}_1^{-1} = uvu^{-1}v^{-1}$, $W_1 = uv$: Widerspruch.

V. Methode der direkten Summe

Es gelangt in diesem Kapitel eine Methode zur Anwendung, mit der viele weitere Beispiele behandelt werden könnten. Es wird darauf verzichtet, die Methode als solche zu beschreiben; das folgende Beispiel möge hinreichend instruktiv sein.

Unser Ziel ist, ein Modell zu konstruieren, worin isomorphe Vektorräume mit ungleich mächtigen Basen existieren.

Wir prägen der Basismenge a_0 die folgende Struktur auf: a_0 sei Vereinigung abzählbar vieler, paarweise disjunkter, 12-zahliger Mengen a_j . Für alle j sei a_j nochmals unterteilt in zwei geordnete 6-zahlige Mengen a_{j1}, a_{j2} . Wir setzen $b_i = \bigcup_j a_{ji}$, $i = 1, 2$. Es ist $a = b_1 \cup b_2$. $g_0 = \{1, \alpha, \beta, \gamma\}$ sei die (abstrakte) KLEINSche Vierergruppe. d_{ji} , $i = 1, 2$, seien die folgenden Darstellungen von g_0 als Permutationsgruppe von a_{ji} :

$$\begin{aligned} d_{j1}(\alpha) &= (12)(34)(5)(6) & d_{j2}(\alpha) &= (12)(34)(5)(6) \\ d_{j1}(\beta) &= (13)(24)(5)(6) & d_{j2}(\beta) &= (12)(3)(4)(56) \\ d_{j1}(\gamma) &= (14)(23)(5)(6) & d_{j2}(\gamma) &= (1)(2)(34)(56). \end{aligned}$$

(Ziffern beziehen sich auf die ausgezeichneten Ordnungen der a_{ji} ; es wird die übliche Zyklen-Schreibweise für Permutationen verwendet).

g_j sei das Bild von g_0 bei der Darstellung $d_{j1} + d_{j2}$; das heißt g_j ist die Gruppe derjenigen Permutationen π von a_j , zu denen ein $\xi \in g_0$ existiert

mit $d_{j1}(\xi) = \pi/a_{j1}$, $d_{j2}(\xi) = \pi/a_{j2}$. $g = \sum_j g_j$ sei die direkte Summe der Gruppen g_j ; das heißt, g ist die Permutationsgruppe von a_0 , die erzeugt wird durch alle diejenigen Permutationen, die auf irgendeinem der Teile a_j mit irgendeinem Element aus g_j , auf den übrigen Teilen als Identität wirken.

Wir betrachten das zu g gehörige Normalmodell. Die Mengen b_1, b_2 sind Modellmengen, da sie von g je in sich transformiert werden. Dasselbe gilt für die Mengen a_{ji} .

Wir beweisen die folgenden Sätze:

Satz 1. *Im Modell $N(g)$ existiert ein Vektorraum mit zwei ungleich mächtigen Basen.*

Satz 2. *In $N(g)$ existieren zwei Kardinalzahlen m, n mit $2^m = 2^n$ und $m \geq \aleph_0$, aber nicht $n \geq \aleph_0$.*

Für den Beweis der Sätze 1., 2. betrachten wir im Modell einen Körper k von der Charakteristik 0. v_1 und v_2 seien (im Modell) Vektorräume über k mit b_1 bzw. b_2 als Basis. Der Körper k sei Element der Klasse $\Pi(0)$. Die Elemente der Felder von $v_i, i = 1, 2$, seien solche Abbildungen von b_i in das Feld von k , die «fast überall» 0 sind (Funktions- und Endlichkeitsbegriff der Mengenlehre). Dann sind die zugeordneten Untergruppen $h(v_1)$ und $h(v_2)$ von g mit g identisch. Das heißt, jede Permutation aus g erzeugt einen solchen Automorphismus der Mengenlehre, dessen Beschränkung auf das Feld von v_i ein Vektorraum-Automorphismus ist.

Wir zeigen nun, daß gilt:

I. Die Räume v_1, v_2 sind (im Modell) isomorph.

Für $m = |b_1|$, $n = |b_2|$:

II. Es ist $m \geq \aleph_0$, aber nicht $n \geq \aleph_0$ (im Modell).

III. Es ist $2^m = 2^n$ (im Modell).

Aus I., II. folgt unmittelbar Satz 1.: Sei b'_1 das Bild von b_1 unter einem Isomorphismus von v_1 auf v_2 . b'_1 und b_2 sind ungleich mächtige Basen von v_2 . Die Behauptung von Satz 2. wird durch II. und III. zusammen ausgedrückt.

Beweis von I.: v_{ji} sei der durch a_{ji} aufgespannte Unterraum von v_i (sowohl im Modellsinn als auch im Sinne der Mengenlehre). d'_{ji} sei die durch d_{ji} induzierte Darstellung von g_0 als Automorphismengruppe von v_{ji} . Nach dem Vorhergehenden induziert die Gruppe $g_j = (d_{j1} + d_{j2})(g_0)$ auf $v_{j1} + v_{j2}$ die Automorphismengruppe $(d'_{j1} + d'_{j2})(g_0)$. Die Darstellungen d'_{j1}, d'_{j2} sind äquivalent. Denn ihre Charaktere χ_1, χ_2 sind gleich: $\chi_i(\alpha) = \chi_i(\beta) = \chi_i(\gamma) = 2, i = 1, 2$. Also existiert ein Isomorphismus ϱ_j von v_{j1} auf v_{j2} , der von allen durch Elemente von g_j induzierten Automorphismen der

Mengenlehre, und somit von allen durch Elemente von g induzierten Automorphismen der Mengenlehre in sich transformiert wird. Das heißt $h(\varrho_j) = g$. Also ist ϱ_j ein Isomorphismus im Modellsinn, und eine Funktion Φ im Sinne der Mengenlehre, die jeder natürlichen Zahl j einen solchen Isomorphismus ϱ_j zuordnet, ist Funktion im Modell: $h(\Phi) = g$. Es existiert somit im Modell der Isomorphismus ϱ von v_1 auf v_2 , der auf den Komponenten v_{j1} mit $\varrho_j = \Phi(j)$ übereinstimmt.

Beweis von II: Die Menge b_1 besitzt bezüglich der ganzen Gruppe g unendlich viele Fixpunkte: Je die beiden letzten Elemente (bezüglich der im Sinne der Mengenlehre ausgezeichneten Ordnung) eines jeden Teiles a_{j1} . Die Menge b_2 besitzt bezüglich keiner Gruppe aus $f(g)$ unendlich viele Fixpunkte: Eine Gruppe aus $f(g)$ wirkt, abgesehen von endlich vielen j , auf jedem Teil a_j mit der ganzen Gruppe g_j ; g_j besitzt in a_{j2} keine Fixpunkte.

Nach 1.5 folgt daraus, daß im Modellsinn b_1 transfinit, b_2 nicht transfinit ist. Das heißt $m \geq \aleph_0$, aber nicht $n \geq \aleph_0$.

Beweis von III: Wir betrachten die durch d_{ji} induzierte Darstellung d''_{ji} von g_0 als Permutationsgruppe der Potenzmenge $P(a_{ji})$ von a_{ji} . Um zu beweisen, daß $P(b_1)$ und $P(b_2)$ im Modellsinn gleichmächtig sind, genügt es, analog wie im Beweis von I. zu zeigen, daß die Darstellungen d''_{j1} und d''_{j2} äquivalent sind.

Die Gruppe g_0 besitzt die Untergruppen $u_1 = \{1\}$, $u_2 = \{1, \alpha\}$, $u_3 = \{1, \beta\}$, $u_4 = \{1, \gamma\}$, $u_5 = g_0$. Mit μ_k^i , $i = 1, 2$, $k = 1, \dots, 5$, bezeichnen wir die Anzahl der Fixpunkte in $P(a_{ji})$ bezüglich der Gruppe $d''_{ji}(u_k)$. Nach W. BURNSIDE sind die Darstellungen d''_{j1}, d''_{j2} genau dann äquivalent, wenn gilt $\mu_k^1 = \mu_k^2$, $k = 1, \dots, 5$ (vgl. [2]). In unserem Fall ist $\mu_k^i = 2^{m_k^i}$, wo m_k^i die Anzahl der Transitivitätsgebiete der Gruppe $d_{ji}(u_k)$ in a_{ji} bedeutet. Es ist

$$\begin{aligned} m_1^1 &= m_1^2 = 6, \\ m_k^1 &= m_k^2 = 4, \quad k = 2, 3, 4, \\ m_5^1 &= m_5^2 = 3, \end{aligned}$$

also sind die Darstellungen d''_{j1}, d''_{j2} äquivalent.

Die Konstruktion des eben betrachteten Modells beruht auf der folgenden Idee: Zwei im Sinne der Äquivalenz von Darstellungen verschiedene Permutationsgruppen können auf den durch die permutierten Mengen aufgespannten Vektorräumen gleiche Automorphismengruppen induzieren. Beispiele solcher Gruppen gab BURNSIDE in [2]. Die beiden permutierten Mengen lassen dann keine 1-1-deutige Zuordnung zu, die bezüglich simultanen Ausübens der beiden Permutationsgruppen invariant ist. Hingegen lassen die durch die Mengen aufgespannten Vektorräume invariante Isomorphismen zu. Mit der «Methode

der direkten Summe» werden diese Eigenschaften vom Endlichen ins Unendliche übertragen.

VI. Beispiel aus der Topologie

Das Lemma von URYSOHN, wonach es zu zwei abgeschlossenen, disjunkten Mengen A, B eines T_4 -Raumes⁸⁾ eine stetige, reellwertige Funktion gibt, die in den Punkten von A den Wert 0, in denjenigen von B den Wert 1 annimmt, ist nicht ohne Auswahlaxiom beweisbar. Wir zeigen dies für einen T_4 -Raum, der sogar das erste Abzählbarkeitsaxiom A_1 erfüllt und lokal-kompakt ist.

Dagegen läßt sich ohne Auswahlaxiom beweisen, daß in jedem lokal-kompakten T_4 -Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom A_2 erfüllt, das Lemma von URYSOHN gilt, sogar, daß jeder solche Raum metrisierbar ist. Ob die Metrisierbarkeit eines beliebigen $A_2 - T_4$ -Raumes (der nicht lokal-kompakt zu sein braucht) ohne Auswahlaxiom beweisbar ist, bleibt eine offene Frage. Die von uns betrachteten Modelle geben jedenfalls keine Auskunft darüber; denn in einer Mengenlehre, in der sich das Kontinuum wohlordnen läßt, ist jeder solche Raum metrisierbar. Unsere Modelle erfüllen aber das auf $\Pi(0)$ beschränkte Auswahlaxiom.

Wir definieren nun ein Modell, worin ein lokal-kompakter $A_1 - T_4$ -Raum existiert (der aus mehr als einem Punkt besteht), dessen einzige stetige, reellwertige Funktionen die Konstanten sind.

Die Basismenge a_0 sei geordnet nach dem Ordnungstypus der rationalen Zahlen. g sei die Gruppe aller ordnungstreuen Permutationen von a_0 . Eine Teilmenge t von a_0 sei Element der Menge q , wenn (1) sich t in höchstens endlich vielen Punkten häuft (bezüglich der Intervall-Topologie auf a_0), und wenn (2) jede unendliche Teilmenge von t einen Häufungspunkt besitzt. Gilt (1), dann ist (2) mit der folgenden Aussage äquivalent: Ist h_t die Menge der Häufungspunkte von t und U eine Umgebung von h_t , dann befinden sich außerhalb U nur endlich viele Punkte aus t .

$\tilde{h}(t)$ sei die Untergruppe derjenigen Permutationen aus g , die t elementweise fest lassen. Durchschnittsbildung und Konjugieren mit Elementen aus g führt nicht aus der Menge f' der Gruppen $\tilde{h}(t)$, $t \in q$, heraus; f' ist somit Basis eines Filters f .

Wir betrachten das zugehörige Modell $M(f)$ ⁹⁾. Die auf a_0 definierte Ord-

⁸⁾ Wir verwenden die Terminologie von KELLEY [5]: T_4 enthalte die Forderung, daß jeder einzelne Punkt abgeschlossen ist.

⁹⁾ Das zu g gehörige Normalmodell $N(g)$ ist das Modell von MOSTOWSKI [6. 1.]; unser Modell $M(f)$ ist davon verschieden.

nungsrelation ist eine Ordnungsrelation im Modellsinn. τ sei die zugehörige Intervall-Topologie im Modell.

Eine Modellmenge ist genau dann offen (abgeschlossen) im Modellsinn, falls sie es im Sinne der Mengenlehre ist. Denn vorerst ist ein Intervall in a_0 dasselbe in Modell und Mengenlehre. Eine Vereinigungsmenge im Modellsinn von Intervallen ist dies auch im Sinne der Mengenlehre. Das heißt, offene Mengen im Modell sind offen im Sinne der Mengenlehre. Ist umgekehrt eine Modellmenge offen im Sinne der Mengenlehre, dann ist sie Vereinigung der Menge y aller offenen Intervalle, die in x liegen. Die x und y zugeordneten Untergruppen von g sind dieselben. Mit x ist somit auch y Modellmenge; also ist x auch im Modellsinn Vereinigung offener Intervalle und somit offen. Die entsprechende Aussage über abgeschlossene Mengen ergibt sich daraus, daß der Begriff «komplementäre Teilmengen in a_0 » in Modell und Mengenlehre derselbe ist.

1. Der Raum $\langle a_0, \tau \rangle$ erfüllt A_1

Sei $x \in a_0$. t sei die Vereinigungsmenge zweier Punktfolgen, von denen die eine von links und die andere von rechts gegen x konvergiert. Es ist $t \in q$. Denn x ist der einzige Häufungspunkt von t , und außerhalb jeder Umgebung von x befinden sich nur endlich viele Punkte der Menge t . Jedes Intervall zwischen zwei Punkten von t wird von allen Permutationen aus $\tilde{h}(t)$ auf sich abgebildet. Die Menge aller dieser Intervalle ist daher auch im Modellsinn abzählbar (vgl. 1.5). Die Teilmenge derjenigen Intervalle, die x enthalten, bildet eine abzählbare Basis für die Umgebungen des Punktes x .

2. Der Raum $\langle a_0, \tau \rangle$ ist lokal-kompakt

Wir zeigen, daß der Ordnungstypus von a_0 im Modell das DEDEKINDSche Schnittaxiom erfüllt. Daraus folgt in üblicher Weise ohne Auswahlaxiom, daß jedes abgeschlossene Intervall kompakt ist.

Wir betrachten eine Zerlegung im Modell: $a_0 = b \cup c$, $b, c \neq 0$, $u < v$ für alle $u \in b$ und $v \in c$. $\langle b, c \rangle$ ist auch im Sinne der Mengenlehre eine Zerlegung und definiert infolgedessen entweder einen Schnitt oder eine Lücke. Wir zeigen, daß der zweite Fall auszuschließen ist. Die Gruppe $\tilde{h}(t)$, $t \in q$, transformiere sowohl b als auch c in sich. Würde $\langle b, c \rangle$ eine Lücke definieren, dann gäbe es, da t höchstens endlich viele Häufungspunkte besitzt, ein $u' \in b$ und ein $v' \in c$, so daß alle Häufungspunkte von t außerhalb des Intervalls $I(u', v')$ lägen. Aus Eigenschaft (2) von t folgt, daß höchstens endlich viele Punkte aus t in $I(u', v')$ lägen. Also gäbe es ein $u \in b$ und ein $v \in c$, so daß $I(u, v)$ mit t durchschnittsfremd wäre. $\tilde{h}(t)$ wirkte daher transitiv im Innern von $I(u, v)$. Es wäre somit entweder jeder Innere Punkt von $I(u, v)$ Element von b oder

jeder Element von c . Das heißt es wäre entweder v das erste Element von c oder u das letzte Element von b , im Widerspruch zur Annahme, daß $\langle b, c \rangle$ eine Lücke definiert. $\langle b, c \rangle$ definiert in der Mengenlehre, und somit auch im Modell, einen Schnitt.

3. Der Raum $\langle a_0, \tau \rangle$ erfüllt T_4

Jeder Punkt ist abgeschlossen: Denn jeder Punkt ist im Sinne der Mengenlehre abgeschlossen.

Zwei disjunkte, abgeschlossene Mengen A, B besitzen disjunkte, offene Umgebungen:

Die Gruppe $\tilde{h}(t), t \in q$, transformiere sowohl A als auch B in sich. Es sei h_t die (endliche) Menge der Häufungspunkte von t , $(x_1, \dots, x_m) = h_t \cap A$, $(y_1, \dots, y_n) = h_t - (x_1, \dots, x_m)$. Da A, B abgeschlossen und disjunkt sind, ist jeder Punkt x_i innerer Punkt eines Intervalls U_i mit $U_i \cap B = 0$, und jeder Punkt y_j innerer Punkt eines Intervalls V_j mit $V_j \cap A = 0$. Die U_i, V_j lassen sich so wählen, daß zusätzlich gilt $U_i \cap V_j = 0$ für alle $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Sei $A' = A \cup \bigcup_i U_i$, $B' = B \cup \bigcup_j V_j$. A', B' sind abgeschlossen und disjunkt.

Sowohl A' als auch B' zerfällt in höchstens endlich viele Komponenten. Denn $U = \bigcup_i U_i \cup \bigcup_j V_j$ ist eine Umgebung von h_t ; außerhalb U befinden sich somit nur endlich viele Punkte von t . Diese Punkte, zusammen mit den Endpunkten der Intervalle U_i, V_j , zerlegen a_0 in endlich viele Abschnitte, von denen jeder entweder ganz zu A' oder ganz zu B' gehört, oder sowohl mit A' als auch mit B' durchschnittsfremd ist ($\tilde{h}(t)$ wirkt transitiv auf jedem offenen Intervall, das keine Punkte von t enthält).

Es gibt daher offene, disjunkte Umgebungen O_1, O_2 von A', B' , die ihrerseits in nur endlich viele Komponenten zerfallen. O_1, O_2 sind somit Modellmengen. Wegen $A \subset A', B \subset B'$ ist damit der Satz bewiesen.

4. Die einzigen stetigen, reellwertigen Funktionen von $\langle a_0, \tau \rangle$ sind die Konstanten

Aus dem DEDEKINDSchen Schnittaxiom folgt, daß $\langle a_0, \tau \rangle$ zusammenhängend, das heißt nicht Vereinigung zweier disjunkter, abgeschlossener, nicht-leerer Mengen ist. Für stetige, reellwertige Abbildungen φ gilt somit der Zwischenwertsatz: Mit den reellen Zahlen ξ, μ gehören auch alle dazwischenliegenden Zahlen zum Wertebereich von φ . φ erfüllt auch im Sinne der Mengenlehre den Zwischenwertsatz (die reellen Zahlen sind in Modell und Mengenlehre dasselbe). Da a_0 im Sinne der Mengenlehre abzählbar ist, ist das Bild von a_0 höchstens abzählbar. Mit dem Zwischenwertsatz folgt, daß das Bild nur aus einem Punkt besteht; das heißt φ ist eine konstante Abbildung.

Bemerkung: Der Raum $\langle a_0, \tau \rangle$ besitzt zusätzlich die Eigenschaft, daß keine zwei verschiedenen Punkte durch einen Weg verbindbar sind (obwohl $\langle a_0, \tau \rangle$ zusammenhängend ist).

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. BERNAYS: *A system of axiomatic set theory*, Journ.Symb.Log. 2 (1937), 6 (1941), 7 (1942), 8 (1943), 13 (1948).
- [2] W. BURNSIDE: *Theory of Groups of finite order*, Dover 1955.
- [3] A. FRAENKEL: *Über eine abgeschwächte Fassung des Auswahlaxioms*, Journ.Symb.Log. 2 (1937).
- [4] R. FRAISSÉ: *Un modèle définissant une théorie aberrante des ensembles ou sont niés les axiomes du choix et d'extensionnalité*, Alger-Mathématiques V (1958) 1.
- [5] J.L.KELLEY: *General Topology*, van Nostrand, 1955.
- [6] A. MOSTOWSKI: 1. *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund.Math. 32 (1939). 2. *Axiom of choice for finite sets*, Fund.Math. 33 (1945).
- [7] E. SPECKER: *Zur Axiomatik der Mengenlehre*, Zeitschr.f.math.Logik und Grundl. der Math. 3 (1957).
- [8] B.L. VAN DER WAERDEN: *Algebra I*, Springer 1955.

(Eingegangen 28. September 1961)