Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 37 (1962-1963)

Artikel: Orthogonale Dreibeine in richtungsvollständigen, stetigen Geradenscharen des R3.

Autor: Debrunner, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28604

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Orthogonale Dreibeine in richtungsvollständigen, stetigen Geradenscharen des R^3

Von Hans Debrunner, Bern

1. Ergebnisse. Es sei E die Menge der (nichtorientierten) Geraden des dreidimensionalen euklidischen Raumes R^3. Wie üblich, schreiben wir für eine Gerade g_0 und eine Geradenfolge $g_1, g_2, g_3, \ldots$ genau dann $\lim g_i = g_0$, wenn irgend zwei verschiedene parallele Ebenen Γ' und Γ'' des R^3, zu denen g_0 nicht parallel liegt, von allen außer endlich vielen Geraden der Folge durchstoßen werden, und wenn für die Durchstoßpunkte $P'_k = g_k \cap \Gamma'$ und $P''_k = g_k \cap \Gamma''$ im euklidischen Sinne $\lim P'_i = P'_0$ und $\lim P''_i = P''_0$ gilt. Unter der Richtung einer Geraden g verstehen wir die zu g parallele Gerade $\pi(g)$ durch den Ursprung $0 \in R^3$; in diesem Sinne ist die Menge der Geradenrichtungen identisch mit dem Büschel B aller Geraden durch 0.

Ordnen wir in stetiger Weise jeder Richtung $b \in B$ eine zu b parallele Gerade $\sigma(b)$ des R^3 zu, so nennen wir die Bildmenge $\Sigma = \sigma(B)$ in E eine *richtungsvollständige, stetige Geradenschar im* R^3. Über solche Scharen hat H. Hadwiger in [1] und [2] die folgende Vermutung ausgesprochen:

Satz 1. *In jeder richtungsvollständigen, stetigen Geradenschar im R^3 lassen sich drei paarweise orthogonalstehende Geraden finden, die sich in einem Punkt schneiden.*

Als Beispiel mag das erwähnte Büschel B dienen; B bildet eine richtungsvollständige, stetige Geradenschar, bei der sich sogar jedes Tripel von paarweise orthogonalstehenden Geraden in einem Punkt, nämlich in 0, schneidet. Ein weniger triviales Beispiel, bei dem noch eine eindimensionale Schar von Tripeln mit den verlangten Eigenschaften existiert, findet sich in [1] angegeben. Daß auch im Hinblick auf Satz 1 bestmögliche Beispiele existieren, zeigt

Satz 2. *Es gibt im R^3 richtungsvollständige, stetige Geradenscharen, welche ein einziges Tripel von Geraden, die sich in einem Punkt paarweise orthogonal schneiden, enthalten.*

Die vorliegende Note erbringt einen Beweis von Satz 1, und zwar wesentlich gestützt auf den Nachweis von Satz 2. Es scheint mir, daß das Analogon von Satz 2 für richtungsvollständige, stetige Geradenscharen im R^n $(n > 3)$ nicht gilt.

Die Geradenmenge E mit der angegebenen Topologie und mit der erwähnten Abbildung π (durch Parallelverschiebung) auf die Richtungsmenge B kann auch als Faserbündel über B, mit R^2 als Faser, aufgefaßt werden; als Faser-

bündel ist sie zum Tangentialbündel der projektiven Ebene äquivalent. Auf diese Weise kann eine richtungsvollständige, stetige Geradenschar Σ als Schnitt über dem Basisraum B definiert werden. Dieser Auffassung als Faserbündel liegt allerdings die Struktur des Sichschneidens von Geraden im R^3 ferner, so daß wir sie nicht weiter ausnützen können. Dagegen wird im Beweis von Satz 1 wesentlich benutzt, daß E eine vierdimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist, in der jede richtungsvollständige, stetige Geradenschar Σ eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit bildet.

2. Beweis von Satz 2. a) Wir geben eine richtungsvollständige, stetige Geradenschar Σ_0 im R^3 an, die genau ein Orthogonaldreibein enthält; dabei soll fortan mit *Orthogonaldreibein* die Konfiguration von drei sich in einem Punkt schneidenden, paarweise orthogonalen Geraden gemeint sein. Wir verwenden rechtwinklige, kartesische Koordinaten (x, y, z) für Punkte und für Vektoren im R^3. Für Punkte auf der Einheitssphäre $S^2 \subset R^3$ benutzen wir außerdem die geographische Länge φ (mit $-\infty < \varphi < \infty$) und die geographische Breite θ (mit $-\frac{1}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\pi$). Jede Gerade g des R^3 soll durch die vektorielle Parameterdarstellung

$$g: \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{p} + t \cdot \mathfrak{r} \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{1}$$

charakterisiert werden, wobei $\mathfrak{p}$ den Ortsvektor eines Aufpunktes und $\mathfrak{r}$ einen Richtungsvektor bezeichnet. Ist dabei

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\varphi, \theta) = (\cos\varphi \cos\theta, \sin\varphi \cos\theta, \sin\theta), \tag{2}$$

so durchstößt die zu g parallele Gerade $\pi(g)$ durch 0 die S^2 in den Punkten (φ, θ) und $(\varphi + \pi, -\theta)$. Die in Aussicht gestellte Schar Σ_0 charakterisieren wir formelmäßig, indem wir $\mathfrak{p}$ in Abhängigkeit von φ und θ angeben.

Wir wählen eine genügend große reelle Zahl N (es genügt $N > \sqrt{2}$) und eine stetige Funktion einer reellen Veränderlichen mit reellen Werten $c(\theta)$ derart, daß gilt:

$$\begin{aligned} &c(|\theta|) = -c(-|\theta|) > 0 \text{ für } \operatorname{arctg} N^{-1} < |\theta| < \operatorname{arctg} 2N \\ &c(\theta) = 0 \text{ sonst}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dem Richtungsvektor (2) ordnen wir den folgenden Aufpunkt

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0(\varphi, \theta) \text{ zu:}$$

$$\mathfrak{p}_0(\varphi, \theta) = (0, 0, 2N^2 \operatorname{tg}^2\theta + [1 - N^2 \operatorname{tg}^2\theta] \sin 2\varphi) \quad \text{falls } 0 \leqq |\theta| \leqq \operatorname{arctg} N^{-1} \tag{4_f}$$

$$\mathfrak{p}_0(\varphi)\ \theta) = (c(\theta) \sin\varphi, -c(\theta) \cos\varphi, 2) \quad \text{falls } \operatorname{arctg} N^{-1} \leqq |\theta| \leqq \operatorname{arctg} 2N \tag{4_m}$$

$$\mathfrak{p}_0(\varphi, \theta) = (0, 0, 2) \qquad \text{falls arctg } 2N \leqq |\theta| \leqq \tfrac{1}{2}\pi . \tag{4$_s$}$$

Nach den Voraussetzungen über $c(\theta)$ ist $\mathfrak{p}_0(\varphi, \theta) = \mathfrak{p}_0(\varphi + \pi, -\theta)$, und für $|\theta| = \text{arctg } N^{-1}$ bzw. arctg $2N$ ergeben die beiden Berechnungsmöglichkeiten in (4) dieselben Werte. Deshalb bilden die Geraden $g: \mathfrak{x} = \mathfrak{p}_0(\varphi, \theta) + t\mathfrak{r}(\varphi, \theta)$ eine richtungsvollständige, stetige Geradenschar Σ_0 (für $|\theta| = \frac{1}{2}\pi$ ist die Schar regulär!). Σ_0 ist, entsprechend den drei Varianten in (4), die Vereinigung von drei Teilscharen Σ_f (flach liegende Geraden), Σ_m (mäßig steile Geraden) und Σ_s (steile Geraden). Die einem festen Wert von θ entsprechenden Geraden bilden den Mantel eines Rotationsdoppelkegels mit Spitze $(0, 0, 2)$, sofern sie zu Σ_s gehören, und sie bilden eine der Geradenscharen auf einem Rotationshyperboloid mit Striktionskreisradius $|c(\theta)|$ und Striktionskreiszentrum $(0, 0, 2)$, sofern sie zu Σ_m gehören. Gleich wie für $|\theta| = \text{arctg } 2N$ entartet für $|\theta| = \text{arctg } N^{-1}$ dieses Hyperboloid zu einem Doppelkegelmantel. Die für $\theta = 0$ entstehenden horizontalen Geraden treffen die z-Achse in je nach dem Wert von φ variierenden Punkten. Zwischen diesen beiden letztgenannten eindimensionalen Scharen bildet Σ_f eine stetige Verbindung, wobei jede Gerade die z-Achse schneidet, und zwar für $|\theta| \neq \text{arctg } N^{-1}$ nicht im Punkt $(0, 0, 2)$.

Die drei Koordinatenachsen a_x, a_y, a_z gehören zur Schar Σ_0; wir wollen nun zeigen, daß sie das einzige Orthogonaldreibein von Σ_0 bilden.

b) Wir behaupten, daß sich keine zwei Geraden der Teilschar

$$\Sigma_0 - \Sigma_f - \Sigma_s$$

unter rechtem Winkel schneiden. Diese Teilschar ist Untermenge von Σ_m, und wir können der Bestimmtheit halber und ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, es sei $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ und $c(\theta) > 0$. Wir betrachten die zwei den Parameterwerten (φ_i, θ_i) $i = 1{,}2$ entsprechenden Geraden. Schneiden sie sich in einem Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, so gilt wegen (1) für $i = 1{,}2$

$$\begin{aligned} c(\theta_i) \sin \varphi_i + t_i \cos \theta_i \cos \varphi_i &= \bar{x} \\ t_i \cos \theta_i \sin \varphi_i - c(\theta_i) \cos \varphi_i &= \bar{y} \\ 2 + t_i \sin \theta_i &= \bar{z} . \end{aligned}$$

Löst man diese Gleichungen nach $t_i, \sin \varphi_i, \cos \varphi_i$ auf und substituiert die Lösungswerte in

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 , \tag{5}$$

so ergibt sich

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\, c(\theta_1)\, c(\theta_2) + (\bar{z} - 2)^2 \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{ctg} \theta_2}{[c(\theta_1)^2 + t_1^2 \cos^2 \theta_1]\,[c(\theta_2)^2 + t_2^2 \cos^2 \theta_2]} > 0 . \tag{6}$$

Sind andererseits die Richtungsvektoren $\mathfrak{r}(\varphi_i, \theta_i)$ der betrachteten Geraden zueinander orthogonal, so ergibt das Nullsetzen des Skalarprodukts

$$\cos\varphi_i \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 = 0\,,$$

also

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -\operatorname{tg}\theta_1 \cdot \operatorname{tg}\theta_2 < 0\,. \tag{7}$$

Der Vergleich von (6) und (7) erhärtet die Behauptung.

c) Wir behaupten weiter, daß es in der Teilschar Σ_f kein Orthogonaldreibein, in der Schar Σ_s nicht einmal ein Orthogonalzweibein gibt. In der Tat: In den für $\theta = 0$ bzw. $|\theta| = \frac{1}{2}\pi$ entstehenden Teilscharen gibt es offensichtlich keine Orthogonaldreibeine bzw. Orthogonalzweibeine; und wählt man N genügend groß, läßt also nur «sehr» flach liegende bzw. «sehr» steile Geraden zu Σ_f bzw. Σ_s zu, so bleibt die behauptete Eigenschaft aus Stetigkeitsgründen erhalten. Eine genauere Rechnung zeigt, daß für die Gültigkeit der Behauptung $N > \sqrt{2}$ hinreicht, doch wird der Wert dieser Schranke nicht weiter benötigt.

d) Es sei $\{g_1, g_2, g_3\}$ ein Orthogonaldreibein in Σ_0 und P der gemeinsame Schnittpunkt von g_1, g_2, g_3. Wegen b) gehören mindestens zwei dieser Geraden zu $\Sigma_f \cup \Sigma_s$, etwa g_2 und g_3. Wir können sogar annehmen, daß die z-Achse a_z nicht parallel zu der von g_2 und g_3 aufgespannten Ebene Γ_1 ist. Ist sie es nämlich doch, so steht g_1 orthogonal zu a_z und somit gilt auch $g_1 \in \Sigma_f \cup \Sigma_s$, und nach einer passenden Indexpermutation trifft dann die Annahme doch zu. Die z-Achse durchstößt also Γ_1 in einem eindeutig festgelegten Punkt P_1; da aber nach $(4_{f,s})$ die z-Achse eine jede Gerade von $\Sigma_f \cup \Sigma_s$ trifft, insbesondere auch g_2 und g_3, muß $P_1 = P$ sein. Dann trifft a_z aber auch g_1 in P, und daraus folgt wegen (4_m), daß $g_1 \in \Sigma_f \cup \Sigma_s$ sein muß. Bis auf eine Permutation der Indizes ist dann wegen c) nur der Fall möglich, daß $g_1 \in \Sigma_s$ und $g_2, g_3 \in \Sigma_f$ gilt. Ist $|\theta_1| = \frac{1}{2}\pi$, so ist $\theta_2 = \theta_3 = 0$, also nach (4_f) $\sin 2\varphi_2 = z_2 = z_3 = \sin 2\varphi_3$; da zugleich $\varphi_2 - \varphi_3 \equiv \frac{1}{2}\pi \bmod \pi$ gelten muß, folgt $\varphi_2 \equiv 0 \bmod \frac{1}{2}\pi$, so daß es sich um das Tripel $\{a_x, a_y, a_z\}$ handelt. Ist aber $|\theta_1| \neq \frac{1}{2}\pi$, so kann der auf der z-Achse liegende Punkt P der Geraden g_1 nach (4_s) nur der Punkt $(0, 0, 2)$ sein. Aus $g_2, g_3 \in \Sigma_f$ folgt dann wegen (4_f) $\theta_2 = \theta_3 = \operatorname{arctg} N^{-1}$. Die Richtungsvektoren der drei Geraden sind dann gleichgerichtet mit den Vektoren $(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1, \operatorname{tg}\theta_1)$, $(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2, N^{-1})$ und $(\cos\varphi_3, \sin\varphi_3, N^{-1})$, und der rechte Winkel zwischen g_1 und g_2 drückt sich aus durch $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -N^{-1} \operatorname{tg}\theta_1$. Wegen $|\operatorname{tg}\theta_1| \geqq 2N$ gemäß (4_s) und wegen $|\cos(\varphi_1 - \varphi_2)| \leqq 1$ sieht man ein, daß der eben erwogene Fall nicht auftreten kann. Damit ist Satz 2 bestätigt.

3. Beweis von Satz 1. a) Im R^3 sei g_0 eine Gerade; es lassen sich Ebenen Γ' und Γ'' wählen, die zueinander parallel liegen und verschieden sind, und die von g_0 und von jeder Koordinatenachse des festgewählten (x, y, z)-

Systems in genau einem Punkt durchstoßen werden. Jeder Geraden g, die Γ' und Γ'' in je einem Punkt $P' = (x', y', z')$ bzw. $P'' = (x'', y'', z'')$ durchstößt, ordnen wir das Quadrupel

$$X_{\Gamma'\Gamma''}(g) = (x', y', x'', y'')$$

zu. Unter den gemachten Voraussetzungen bestimmen sich g und $X_{\Gamma'\Gamma''}(g)$ gegenseitig eindeutig und stetig, so daß $X_{\Gamma'\Gamma''}$ in der Mannigfaltigkeit E der Geraden des R^3 ein lokales Koordinatensystem in der Umgebung von g_0 bildet. Durch kartesische Produktbildung erhalten wir die Mannigfaltigkeit $E \times E \times E$ der geordneten Geradentripel (g_1, g_2, g_3). Zu jedem Geradentripel können wir Ebenen Γ' und Γ'' finden, die die genannten Voraussetzungen in bezug auf jede Gerade des Tripels (anstelle von g_0) erfüllen; die zwölf reellen Zahlen von $X_{\Gamma'\Gamma''}(g_i), i = 1, 2, 3$, können dann in der Umgebung des Tripels als lokale Koordinaten in $E \times E \times E$ dienen.

Für den Übergang zu ungeordneten Tripeln ist es angezeigt, alle Tripel (g_1, g_2, g_3), für die mindestens eine der Gleichungen $g_1 = g_2, g_1 = g_3, g_2 = g_3$ gilt, wegzulassen; mit Hinsicht auf einen zu verwendenden Hilfssatz reduzieren wir $E \times E \times E$ noch stärker. Dazu bezeichnen wir mit $D(g)$ den euklidischen Abstand der Geraden g vom Ursprung $0 \in R^3$ und mit $V(g_1, g_2, g_3)$ das Volumen eines Parallelepipeds, dessen von einer Ecke auslaufenden Kanten parallel zu g_1, g_2 und g_3, bezüglich, sind und je die Länge 1 haben. Jedem Tripel $\tau = (g_1, g_2, g_3)$ ordnen wir die Zahlen

$$\delta(\tau) = D(g_1) + D(g_2) + D(g_3) \tag{8}$$

und

$$\omega(\tau) = V(g_1, g_2, g_3) \tag{9}$$

zu. Nun sondern wir die Teilmenge

$$F = \{\tau \in E \times E \times E \mid \delta(\tau) \leqq M \text{ und } \omega(\tau) \geqq M^{-1}\} \tag{10}$$

aus, wo M eine später noch festzulegende Zahl > 1 ist. F ist eine berandete Mannigfaltigkeit; diese enthält mit jedem Tripel $\tau = (g_1, g_2, g_3)$ auch alle daraus durch Permutationen entstehenden Tripel; dasselbe gilt vom Rand von F. In F stiftet die Aequivalenz eines Tripels mit allen aus ihm durch Permutation entstehenden Tripeln eine Aequivalenzrelation, bei der der Übergang zu den Klassen $\bar{\tau}$ den Übergang von geordneten Tripeln (g_1, g_2, g_3) zu ungeordneten Tripeln $\{g_1, g_2, g_3\}$ bedeutet. G sei die Menge dieser Aequivalenzklassen in F, versehen mit der Identifikationstopologie. Offenbar ist G eine berandete, zwölfdimensionale, kompakte Mannigfaltigkeit. Die Funktionen δ und ω sind wie oben auch für ungeordnete Tripel $\bar{\tau}$ definiert. Setzt man $\Delta = \{\bar{\tau} \in G \mid \delta(\bar{\tau}) = M\}$ und $\Omega = \{\bar{\tau} \in G \mid \omega(\bar{\tau}) = M^{-1}\}$, so gilt für

den Rand ∂G von G die Beziehung $\partial G = \Delta \cup \Omega$. Da F eine (sechsblättrige) unverzweigte Überlagerung von G ist, können die Zahlen

$$X_{\Gamma'\Gamma''}(g_i)\ ,\ i = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,$$

genauer: die geordneten Zwölftupel

$$(x_1', y_1', x_1'', y_1''; x_2', y_2', x_2'', y_2''; x_3', y_3', x_3'', y_3'') \tag{11}$$

als lokale Koordinaten des Tripels $\{g_1, g_2, g_3\}$ benutzt werden.

Es sei H die Teilmenge aller Orthogonaldreibeine in G. Daß die Geraden g_k, g_l orthogonale Richtung haben, wird durch das Verschwinden des Skalarprodukts der Vektoren $P_k'P_k''$ und $P_l'P_l''$ ausgedrückt, in den lokalen Koordinaten (11) also durch die Gleichung

$$H_i \equiv (x_k' - x_k'')(x_l' - x_l'') + (y_k' - y_k'')(y_l' - y_l'') + (z_k' - z_k'')(z_l' - z_l'') = 0\ , \tag{12}$$

wobei z' und z'' mittels der Ebenengleichungen von Γ' und Γ'' durch x', y', x'', y'' auszudrücken sind. Daß sich g_k und g_l schneiden oder wenigstens koplanar sind, wird durch das Verschwinden der Volumendeterminante der Punkte P_k', P_k'', P_l', P_l'' ausgedrückt; in lokalen Koordinaten ergibt dies die Gleichung

$$H_{i+3} \equiv (x_k' - x_l')(y_k'' - y_l'') - (y_k' - y_l')(x_k'' - x_l'') = 0\ . \tag{13}$$

Die sechs Gleichungen, die aus (12) und (13) entstehen, wenn (i, k, l) durch zyklische Vertauschungen aus $(1, 2, 3)$ entsteht, bilden die lokalen Bedingungen dafür, daß $\{g_1, g_2, g_3\} \in H$ gilt. Die Menge H der Orthogonaldreibeine in G bildet daher eine sechsdimensionale Teilmannigfaltigkeit von G, und ihr Rand ∂H liegt ganz auf $\partial G - \Omega$, da ja für $\bar{\tau} \in H$ $\omega(\bar{\tau}) = 1$ gilt. Es sei Σ_1 irgend eine richtungsvollständige, stetige Geradenschar in R^3. Wählt man die Konstante M in (10) so, daß $M > 3 \max D(g)$, das Maximum erstreckt über $g \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, gilt (wo Σ_0 die in 2 konstruierte Schar ist), so bildet die Menge $J(\Sigma_1)$ derjenigen Tripel $\{g_1, g_2, g_3\} \in G$, für welche $g_i \in \Sigma_1$ $(i = 1, 2, 3)$ gilt, eine sechsdimensionale Teilmannigfaltigkeit von G, deren Rand $\partial J(\Sigma_1)$ ganz auf $\partial G - \Delta$ liegt, und dasselbe gilt für Σ_0 und für alle Scharen

$$\Sigma_\lambda\ (0 \leqq \lambda \leqq 1)\ ,$$

die wie folgt aus Σ_0 und Σ_1 entstehen: man lasse jede Gerade von Σ_0 in der Zeiteinheit durch gleichförmige Parallelverschiebung in einer Ebene in die zu ihr parallele Gerade von Σ_1 laufen; Σ_λ ist dann die zur Zeit λ gebildete richtungsvollständige, stetige Geradenschar. Um Satz 1 zu beweisen, muß gezeigt werden, daß $G \cap J(\Sigma_1)$ nicht leer ist. Wir zeigen mehr, nämlich daß bei Homologie mit der zyklischen Gruppe der Ordnung 2 als Koeffizienten-

bereich die Teilmannigfaltigkeiten H und $J(\Sigma_1)$ in G die Schnittzahl 1 haben. Wir werden unter b) zeigen, daß diese Behauptung jedenfalls für Σ_0 (anstelle von Σ_1) zutrifft. Dann gilt sie aber auch für Σ_1 nach dem folgenden

Hilfssatz: *L^{k+1} bzw. L^{n-k} seien zwei singuläre $k+1$- bzw. $n-k$-Ketten in der triangulierbaren, berandeten, kompakten, n-dimensionalen Mannigfaltigkeit G. Besteht der Rand (mod 2) ∂L^{k+1} von L^{k+1} aus den Ketten J_0 und J_1 und aus weitern k-dimensionalen Ketten, die zu L^{n-k} punktfremd sind, und sind die Bedingungen $(\partial J_0 \cup \partial J_1) \cap L^{n-k} = L^{k+1} \cap \partial L^{n-k} = L^{k+1} \cap L^{n-k} \cap \partial G = \varnothing$ erfüllt, so haben J_0 und J_1 mit L^{n-k} dieselben Schnittzahlen mod. 2.*

Dies ergibt sich aus dem Satz auf S. 248 des Lehrbuchs von H. SEIFERT und W. THRELFALL durch die in Anmerkung 41, S. 324 daselbst, erwähnte Modifikation; die vorliegende Sachlage ist bewiesen in [3], S. 46–52. In unserm Fall ist $J_0 = J(\Sigma_0)$, $J_1 = J(\Sigma_1)$, $L^{n-k} = H$ zu setzen; die singuläre Mannigfaltigkeit L^{k+1} ergibt sich durch die Homotopie, die zwischen $J(\Sigma_0)$ und $J(\Sigma_1)$ durch die Scharen $J(\Sigma_\lambda)$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ vermittelt wird; bei dieser Homotopie wird $\partial J(\Sigma_0)$ auf Ω, noch genauer: auf $\partial G - \Delta$ in $\partial J(\Sigma_1)$ übergeführt; ferner liegt ∂H auf Δ, genauer: auf $\partial G - \Omega$. Ob die durch (10) und die weitere Konstruktion definierte Mannigfaltigkeit G triangulierbar ist, sieht man nicht unmittelbar ein. Aber durch eine geringe Modifikation in einer beliebig kleinen Umgebung der «Kantenpunktmenge» $\Delta \cap \Omega$ wird aus G eine differenzierbare und damit triangulierbare Mannigfaltigkeit. Man hat dazu bloß die zwei Bedingungen in (10) durch die eine Bedingung

$$f(\delta(\tau)) \cdot \omega(\tau)^{-1} + f(\omega(\tau)^{-1}) \cdot \delta(\tau) \leqq M$$

zu ersetzen; dabei ist f eine differenzierbare reelle Funktion einer reellen Variablen, mit Werten zwischen 0 und 1, mit $f(x) = 0$ für $x \leqq M - \varepsilon$ und $f(x) = 1$ für $x \geqq M$, und bei genügend kleinem positiven ε fallen dabei keine Punkte $\bar{\tau}$ von G weg, die zu H oder zu einer der Scharen $J(\Sigma_\lambda)$ gehören.

b) Es bleibt zu zeigen, daß die Schnittzahl mod 2 von H und $J(\Sigma_0)$ den Wert 1 hat. Aus 2d) entnimmt man, daß $J(\Sigma_0)$ und H einen einzigen Punkt gemeinsam haben, nämlich das Tripel $\alpha = \{a_x, a_y, a_z\}$ der Koordinatenachsen. Ergänzend haben wir nachzuweisen, daß sich $J(\Sigma_0)$ und H in α durchsetzen. Da diese beiden Teilmannigfaltigkeiten in einer Umgebung von α differenzierbar sind, hat man rechnerisch zu zeigen, daß die Tangentialräume von $J(\Sigma_0)$ und H in α einzig den Nullvektor gemeinsam haben. Wir können in einer Umgebung von α die lokalen Koordinaten (11) mit Hilfe der Ebenengleichungen $\Gamma'\colon x' + y' + z' = 0$, $\Gamma''\colon x'' + y'' + z'' = 1$ bestimmen. Nach einer Umbenennung der Koordinaten $x_1', \ldots, y_3''$ in $u_1, \ldots, u_{12}$ (in dieser

Reihenfolge) ergibt sich aus den Schnittpunkten der Koordinatenachsen mit Γ' und Γ'', daß $\alpha = (0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0)$ gilt und daß an dieser Stelle die Funktionalmatrix $\|\partial H_i/\partial u_k\|$ (vgl. (12) und (13)) durch die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \tag{14}$$

vom Rang 6 gegeben ist. Aus den Gleichungen $(4_{f,\,s})$ lassen sich ebenfalls die Durchstoßpunkte mit Γ' und Γ'' und damit die lokalen Koordinaten

$$u_i(\varphi_1, \theta_1, \varphi_2, \theta_2, \varphi_3, \theta_3), \quad i = 1, \ldots, 12,$$

eines Tripels $\{g_1(\varphi_1, \theta_1), g_2(\varphi_2, \theta_2), g_3(\varphi_3, \theta_3)\}$ in der Umgebung von α explizit berechnen und damit sechs linear unabhängige Tangentialvektoren an $J(\Sigma_0)$ in α bestimmen, nämlich

$$\begin{aligned} v_1 &= (\partial u_i/\partial \varphi_1)\,|_\alpha &&= (-2, 0, -3, 1;\ 0, 0, 0, 0;\ 0, 0, 0, 0) \\ v_2 &= (\partial u_i/\partial \theta_1)\,|_\alpha &&= (0, 0, 0, -1;\ 0, 0, 0, 0;\ 0, 0, 0, 0) \\ v_3 &= (\partial u_i/\partial \varphi_2)\,|_\alpha &&= (0, 0, 0, 0;\ 0, 2, -1, 3;\ 0, 0, 0, 0) \\ v_4 &= (\partial u_i/\partial \theta_2)\,|_\alpha &&= (0, 0, 0, 0;\ 0, 0, 0, -1;\ 0, 0, 0, 0) \\ v_5 &= (\partial u_i/\partial \theta_3)_{\varphi_3 = 0}\,|_\alpha &&= (0, 0, 0, 0;\ 0, 0, 0, 0;\ 2, 0, 1, 0) \\ v_6 &= (\partial u_i/\partial \theta_3)_{\varphi_3 = \pi/2}\,|_\alpha &&= (0, 0, 0, 0;\ 0, 0, 0, 0;\ 0, 2, 0, 1)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Ist irgend eine Linearkombination

$$\sum_1^6 \gamma_i v_i = (-2\gamma_1, 0, -3\gamma_1, \gamma_1 - \gamma_2;\ 0, 2\gamma_3, -\gamma_3, 3\gamma_3 - \gamma_4;\ 2\gamma_5, 2\gamma_6, \gamma_5, \gamma_6)$$

zugleich Tangentialvektor $(\dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_{12})$ von H in α, so gilt

$$\sum_1^{12} (\partial H_i/\partial u_k)\cdot \dot{u}_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 6)\,. \tag{16}$$

Daraus ergibt sich leicht mit (14) und (15), daß $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_6 = 0$ ist. Damit ist gezeigt, daß sich H und $J(\Sigma_0)$ durchsetzen.

LITERATUR

[1] H. Hadwiger, *Ungelöste Probleme*, Nr. 39. Elemente der Math. *16*, 30–31 (1961).

[2] H. Hadwiger, *Kleine Studie zur elementaren Stetigkeitsgeometrie*. Jahresber. Deutsche Math, Ver. *64*, 78–81 (1961).

[3] E. R. van Kampen, *Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze*. Den Haag 1929,

(Eingegangen den 15. Dezember 1961)