

# Sur l'ensemble des valeurs stationnaires d'une application différentiable.

Autor(en): **Holy, Jean-Claude**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **41 (1966-1967)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-31376>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Sur l'ensemble des valeurs stationnaires d'une application différentiable

par JEAN-CLAUDE HOLY

## Introduction

Soit  $f$  une application d'un ouvert  $G$  de  $R^m$  dans  $R^p$ ,  $f(x_1, \dots, x_m) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_p(x_1, \dots, x_m))$ . Supposons  $p \leq m$  et  $f$  de classe  $C^1$ .

Un point  $\xi$  en lequel le rang de la matrice des dérivées premières

$$A = \left\| \left\| \frac{\partial y_j(\xi)}{\partial x_i} \right\| \right\| (j = 1, 2, \dots, p; i = 1, \dots, m)$$

est  $< p$  est appelé un *point critique* de  $f$ , et son image  $f(\xi)$  est appelée une *valeur critique* de  $f$ .

Le rang de  $A$  est par définition le *rang* du point critique  $\xi$  et de la valeur critique  $f(\xi)$ .

Si l'on a,  $r$  étant un nombre  $\geq 1$  non nécessairement entier,

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{|\xi - \eta|^r} = 0,$$

nous dirons que  $\xi$  est un *point stationnaire d'ordre  $r$*  et  $f(\xi)$  une *valeur stationnaire d'ordre  $r$*  de  $f$ . Un point critique de rang 0 est un point stationnaire d'ordre 1.

A. SARD [5] a établi les théorèmes suivants:

1. Si  $f$  est de classe  $C^q$  et  $q \geq m - p + 1$ , la mesure de l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  est nulle.
2. Si  $q \geq m/p$ , la mesure de l'ensemble des valeurs critiques de rang 0 est nulle.

La notion de  $s$ -mesure, de HAUSDORFF [1] permet de généraliser [6] ces théorèmes. Rappelons-en la définition: Soit  $E$  une partie de  $R^m$ ,  $s$  et  $\delta$  deux nombres positifs,  $0 < s < +\infty$ ,  $0 < \delta < +\infty$ ; désignons par  $\mathcal{R}_\delta$  tout recouvrement dénombrable  $\{E_1, E_2, \dots\}$  de  $E$  par des ensembles  $E_i$  dont les diamètres  $\delta(E_i)$  ne dépassent pas  $\delta$ , et soit  $m_s(E, \delta)$  la borne inférieure des nombres  $\sum_{i=1}^{\infty} [\delta(E_i)]^s$  pour tous les recouvrements  $\mathcal{R}_\delta$ . La  $s$ -mesure de  $E$  est par définition:

$$m_s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} m_s(E, \delta).$$

On montre que si  $m_s(E) = \alpha > 0$ ,  $\alpha \neq +\infty$ , alors  $m_{s'}(E) = 0$  pour tout  $s' > s$  et  $m_{s''}(E) = +\infty$  pour tout  $s'' < s$ . La borne inférieure des nombres  $s$  pour lesquels  $m_s(E) = 0$  est appelée la dimension au sens de Hausdorff de l'ensemble  $E$ . En désignant par  $|A|$  la mesure extérieure de Lebesgue d'un ensemble  $A \subset R^m$ , on démontre que [7]

$$m_m(A) = C |A|,$$

$C$  étant le volume de la sphère de diamètre unité dans  $R^m$ .

3. Si  $E \subset R^m$  est un ensemble de points critiques d'une application  $f$  de classe  $C^q$ , de  $s$ -mesure finie ou une réunion dénombrable de tels ensembles, et  $q \geq s - p + 1$  alors  $m_p f(E) = 0$ .
4. Si  $E \subset R^m$  est un ensemble de points critiques de rang 0 de  $f$ , de  $s$ -mesure finie, ou une réunion dénombrable de tels ensembles, et  $q \geq s/p$ , alors  $m_{s/q} f(E) = 0$ .

Les théorèmes 2 et 4 peuvent être encore précisés de la manière suivante:

5. Si  $E \subset R^m$  est un ensemble de points stationnaires d'ordre  $r$  de  $f$ ,  $m_{m/r} f(E) = 0$ .
6. Si  $E \subset R^m$  est un ensemble de points stationnaires d'ordre  $r$  de  $f$ , et si la  $s$ -mesure de  $E$  est finie (ou si  $E$  est réunion dénombrable de tels ensembles), alors  $m_{s/r} f(E) = 0$ .

Des exemples de H. WHITNEY [8] et A. SARD [5, 6] montrent que, dans les énoncés 1 et 3, la limite donnée pour  $q$  ne peut pas être abaissée:

Si  $q$  est un entier  $< s - p + 1$ , il existe une application  $f: R^m \rightarrow R^p$ , de classe  $C^q$ , ayant un ensemble  $E$  de points critiques, de  $s$ -mesure finie, telle que  $m_{s/q} f(E) > 0$ .

Ainsi, les théorèmes 1 et 3 ne peuvent être améliorés. Nous montrerons ici qu'il en est de même pour les théorèmes 2, 4, 5 et 6.

D'une manière précise, pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous construisons une application  $f$  d'un parallélotope  $\square$  à  $m$  dimensions sur un parallélotope  $\Delta$  à  $p$  dimensions, de classe  $C^q$  avec  $m/p - 1 \leq q < m/p$ , qui possède un ensemble  $P$  de points stationnaires d'ordre  $r = m/p - \varepsilon$ , telle que  $f(P) = \Delta$ .

Ainsi, les théorèmes 2 et 5 ne peuvent être améliorés. L'ensemble  $P$  est totalement discontinu, mais on peut faire en sorte que  $P$  soit contenu dans un arc simple  $\Gamma$ , dont tous les points sont stationnaires d'ordre  $r$ , et dont l'image  $f(\Gamma)$ , est une courbe de Peano qui remplit  $\Delta$ .

Par une construction analogue, pour tout  $s$  tel que  $0 < s < m$ , pour tout  $r \geq 1$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous obtenons une application  $f: \square \rightarrow \Delta$ , qui possède un ensemble  $P$  de points stationnaires d'ordre  $r$  tel que  $0 < m_s(P) < +\infty$ , et  $m_{s/(r+\varepsilon)} f(P) > 0$ , ce qui montre que les théorèmes 4 et 6 ne peuvent être améliorés.

Les résultats ci-dessus généralisent un théorème démontré par M. G. DE RHAM [2].

Dans le texte complet de cette thèse qui n'est pas reproduit ici, nous donnons certaines conditions suffisantes pour que la mesure  $|f(K)|$  de l'image  $f(K)$  d'un compact  $K \subset R^m$  varie continûment avec  $f$  pour la  $C^1$ -topologie.

J'exprime à M. G. de Rham, ma très vive reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée.

1. Nous donnons ici une démonstration rapide du Théorème 5, et du théorème 6 avec une hypothèse d'uniformité.

**Théorème 5: Démonstration:**

On peut supposer  $E$  de  $m$ -mesure finie. Etant donnés  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$ , pour chaque point

$x \in E$ , on peut trouver un nombre  $\varrho(x)$ , satisfaisant à  $0 < \varrho(x) \leq \delta$ , tel que,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x, \varrho)$  étant une boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $\varrho < \varrho(x)$ , on ait :

$$\delta(f(\mathcal{B})) \leq \delta \quad \text{et} \quad |f(x') - f(x)| \leq \varepsilon |x' - x|^r,$$

pour tout  $x' \in \mathcal{B}$ . Cela entraîne

$$\delta(f(\mathcal{B})) \leq 2 \sup_{x' \in \mathcal{B}} |f(x') - f(x)| \leq 2 \varepsilon \varrho^r < 2 \varepsilon \delta^r(\mathcal{B})$$

d'où  $\delta^{m/r}(f(\mathcal{B})) < (2 \varepsilon)^{m/r} \delta^m(\mathcal{B})$ .

Or, comme  $E$  est de  $m$ -mesure finie, on peut extraire [7] de la famille des boules  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x, \varrho)$ , ( $0 < \varrho < \varrho(x)$ ), un recouvrement dénombrable de  $E$ ,  $\mathcal{B}_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ), tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^m(\mathcal{B}_i) < M, M$$

étant fini et ne dépendant que de la mesure de  $E$ . Alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{m/r}(f(\mathcal{B}_i)) \leq (2 \varepsilon)^{m/r} M,$$

d'où  $m_{m/r}(f(E), \delta) \leq (2 \varepsilon)^{m/r} M$  et  $m^{m/r} f(E) = 0$ .

Pour le théorème 6, nous nous bornerons à indiquer une démonstration dans le cas où les points de  $E$  sont uniformément stationnaires d'ordre  $r$ , c'est-à-dire si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta$  tel que, si  $\xi \in E$  et  $|\eta - \xi| < \delta$ , on ait  $|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|^r$ .

**Lemme 1.** *Si l'application  $f$  est hölderienne d'exposant  $e > 0$  sur l'ensemble  $E$ , c'est-à-dire s'il existe une constante  $C$  telle que*

$$|f(p) - f(q)| \leq C |p - q|^e \tag{1}$$

pour tout couple de points  $p$  et  $q$  de  $E$ , alors pour tout  $s > 0$ , on a

$$m_s f(E) \leq C^s m_{es}(E). \tag{2}$$

Remarquons tout de suite que  $f$  est uniformément continue sur  $E$ . Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ , fixes, arbitrairement petits; il existe un recouvrement  $\mathcal{R}_\delta$  de  $E$  au moyen d'ensembles  $E_i$ , ( $i=1, 2, \dots$ ) tels que  $\delta(E_i) < \delta$ ,  $\delta(f(E_i)) < \delta$  et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{es}(E_i) \leq \alpha + \varepsilon, \quad \alpha = m_{es}(E); \tag{3}$$

les ensembles  $f(E_i) = F_i$  constituent un recouvrement de  $f(E)$  et (1) implique

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(F_i) \leq C^s \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{es}(E_i) \leq C^s(\alpha + \varepsilon) \tag{4}$$

par suite, pour tout  $\delta > 0$ ,  $m_s(f(E), \delta) \leq C^s(\alpha + \varepsilon)$ , ce qui entraîne  $m_s f(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0}$

$m_s(f(E), \delta) \leq C^s(\alpha + \varepsilon)$ . Comme  $\varepsilon$  est arbitraire on a :

$$m_s f(E) \leq C^s m_{\varepsilon s}(E).$$

Pour démontrer le théorème 6, il suffit d'appliquer le lemme 1, il vient :

$$m_{s/r} f(E) \leq \varepsilon^{s/r} m_s(E) \quad \text{et comme } s/r \text{ est } > 0,$$

et  $\varepsilon$  arbitraire, on a bien  $m_{s/r} f(E) = 0$ .

**2. Construction d'applications différentiables non constantes dont toutes les valeurs sont stationnaires.**

Considérons un compact  $\square \subset R^m$  et  $h$  similitudes  $F_i, (i=1, \dots, h)$  de même rapport  $q < 1$ , qui changent  $\square$  en les  $h$  compacts  $F_i \square = \square_i \subset \overset{\circ}{\square}$  deux-à-deux disjoints. Pour tout entier  $k$ , les  $h^k$  compacts  $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_k} \square = \square_{a_1 a_2 \dots a_k} (a_i = 1, \dots, h)$  sont deux-à-deux disjoints. Soit  $\square^k = \bigcup \square_{a_1 \dots a_k}$  leur réunion; on a  $\square^k \supset \square^{k+1}$  et l'intersection  $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} \square^k$  est un ensemble parfait, totalement discontinu. Pour toute suite infinie  $a_1 a_2 \dots a_k \dots, (a_k = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } \dots \text{ ou } h)$ , les  $\square_{a_1 a_2 \dots a_k} (k=1, 2, \dots)$  forment une suite décroissante ayant pour intersection un point de  $P$ , et l'on a ainsi une bijection  $b$  de l'ensemble de ces suites sur  $P$ . Posons encore  $D_0 = \square - \square^1, D_k = \square^k - \square^{k+1}$ . On a

$$\square^{k+1} = \bigcup_{j=1}^h F_j \square^k, \quad D_{k+1} = \bigcup_{j=1}^h F_j D_k.$$

Les ensembles  $P$  et  $D_k (k=0, 1, 2, \dots)$  sont deux-à-deux disjoints et ont pour réunion  $\square$ . Comme  $\square_i \subset \overset{\circ}{\square}$ , on a  $\square^1 \subset \overset{\circ}{\square}$  et la distance  $d$  de  $\square^1$  à  $C \square$  est positive; la distance de  $F_a \square^1$  à  $C \square_a$  est alors  $\alpha = qd > 0$ , indépendante de  $a$ .

Considérons encore un compact  $\Delta \subset R^p$  et  $h$  similitudes  $T_i (i=1, \dots, h)$  de rapport  $q' < 1$  telles que  $T_i \Delta \subset \Delta$ , sans supposer les  $T_i \Delta$  deux-à-deux disjoints. Soit encore  $\Delta^k$  la réunion des  $h^k$  compacts  $T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_k} \Delta$  et  $P'$  l'intersection  $P' = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^k$ . On définit comme ci-dessus une application  $s$  de l'ensemble des suites  $a_1 a_2 \dots a_k \dots$  sur  $P'$ , qui est surjective mais non injective lorsque les  $T_i \Delta$  ne sont pas deux-à-deux disjoints, et  $P'$  n'est en général pas totalement discontinu.

**Théorème (7):**

a) Il existe une application  $f: \square \rightarrow \Delta$ , et une seule qui satisfait aux équations fonctionnelles:

$$T_a \circ f = f \circ F_a, \quad (a = 1, 2, \dots, h) \tag{2.2}$$

et dont la restriction à  $D_0$  est une application donnée  $\varphi: D_0 \rightarrow \Delta$

b) La restriction  $f$  à  $P$  est  $f|P = s \circ b^{-1}$ , en sorte qu'elle ne dépend pas de  $\varphi$  et  $f(P) = P'$ .

c) Il est possible de choisir  $\varphi$  de manière que  $f$  soit  $C^\infty$  dans  $\square - P$ .

d) Si  $q$  est le plus grand entier tel que  $q' < q^q$  et si  $f$  est  $C^q$  dans  $\square - P$ ,  $f$  est  $C^q$  dans  $\square$ ,

toutes ses dérivées d'ordre  $\leq q$  sont nulles sur  $P$  et elle est hölderienne d'exposant  $e = \log \varrho' / \log \varrho$  aux points de  $P$ .

La dernière partie du théorème entraîne que tous les points de  $P$  sont des points stationnaires d'ordre  $r$  de  $f$  pour tout  $r < e$ .

Tout d'abord,  $f$  étant donnée sur  $D_0$ , on peut la définir de proche en proche sur les ensembles  $D_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) de manière à satisfaire à (2.2); si en effet,  $\xi \in D_{k+1}$ , on a  $\xi \in F_a D_k$  pour une valeur de  $a$ , ( $1 \leq a \leq h$ ),  $F_a^{-1}(\xi) \in D_k$  et l'on étend la définition de  $f$  de  $D_k$  à  $D_{k+1}$  en posant:

$$f(\xi) = T_a \circ f \circ F_a^{-1}(\xi)$$

L'application  $f$  est ainsi déterminée sur  $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \square - P$  lorsque  $f|_{D_0} = \varphi$  est donnée.

Pour définir  $f$  sur  $P$ , remarquons que (2.2) entraîne les équations plus générales,

$$T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_k} \circ f = f \circ F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_k}. \tag{2.3}$$

Si au point  $\xi \in P$  correspond la suite  $b^{-1}(\xi) = a_1 a_2 \dots a_k \dots$  on doit avoir d'après (2.3),  $f(\xi) \in T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_k} \Delta$  pour tout  $k$ , donc  $f(\xi) = s \circ b^{-1}(\xi)$ . L'application ainsi définie sur  $P$  satisfait effectivement à (2.2) et l'on a  $f(P) = P'$ . On a ainsi établi a) et b).

Si  $\varphi$  est  $C^\infty$  à l'intérieur de  $D_0$ , il résulte de la définition ci-dessus que  $f$  sera  $C^\infty$  à l'intérieur de  $D_k$  pour tout entier  $k$ . Mais il y aura en général des discontinuités à la frontière des  $D_k$ . Toutefois, comme la frontière intérieure de  $D_k$  (qui est en même temps la frontière extérieure de  $D_{k+1}$ , et la frontière de  $\square^{k+1}$ ) est la réunion des  $h^k$  images de la frontière intérieure de  $D_0$  par les  $h^k$  applications  $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_k}$ , en vertu de (2.2) il suffira que  $f$  soit  $C^\infty$  sur la frontière intérieure de  $D_0$  pour qu'elle le soit en tous les points frontière de tous les  $D_k$ , et par suite dans  $\square - P$ .

Pour réaliser cette condition, considérons un voisinage ouvert  $U$  de la frontière de  $\square$ , tel que  $\bar{U}, F_a \bar{U}$ , ( $a = 1, \dots, h$ ) soient deux-à-deux disjoints, et soit  $1 = \psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_h$  une partition de l'unité dans  $R^m$  en  $h+1$  fonctions  $C^\infty$  et  $\geq 0$ , telles que  $\psi_0 = 1$  dans  $U$ ,  $\psi_a = 1$  dans  $F_a U$ . Si alors  $\chi$  est une application  $C^\infty$  de  $R^m$  dans  $R_p$ , telle que  $\chi(\square) \subset \Delta$ , par exemple une application constante de  $R^m$  sur un point de  $\Delta$ , l'application

$$\varphi = \psi_0 \chi + \psi_1 (T_1 \circ \chi \circ F_1^{-1}) + \dots + \psi_h (T_h \circ \chi \circ F_h^{-1})$$

est  $C^\infty$ , égale à  $\chi$  dans  $U$ , à  $T_a \circ \chi \circ F_a^{-1}$  dans  $F_a U$  ( $a = 1, 2, \dots, h$ ).

L'application  $f$  égale à  $\varphi$  dans  $D_0$  qui satisfait à (2.2) est alors encore égale à  $\varphi$  dans  $F_a U$ , ( $a = 1, 2, \dots, h$ ), elle est donc  $C^\infty$  sur les frontières des  $\square_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) c.à.d. sur la frontière intérieure de  $D_0$  et par suite dans  $\square - P$ , ce qui prouve c).

Soit  $dx$  un vecteur unité dans  $R^m$  et  $t$  une variable réelle qu'on fera tendre vers 0; comme  $f$  est  $C^\infty$ , en tout point  $x \in \square - P$ , on a un développement asymptotique

$$f(x + t dx) - f(x) \cong \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P_k(x, dx) \tag{2.4}$$

où  $P_k(x, dx)$ , différentielle d'ordre  $k$  de  $f(x)$ , est un polynôme homogène de degré  $k$  en les composantes de  $dx$ , dont les coefficients sont les dérivées partielles d'ordre  $k$  de  $f$  en  $x$ .

Si  $x \in D_n$ , il existe une suite  $a_1 a_2 \dots a_n$  et un point  $x_n \in D_0$  tels que  $x = F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}(x_n)$ . Les similitudes  $F_a$  ( $a=1, 2, \dots, h$ ) agissent sur les vecteurs de  $R^m$  comme une rotation  $F'_a$  suivie d'une homothétie de rapport  $\varrho$ , par suite  $dx$  est l'image par  $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}$  du vecteur  $\varrho^{-n} F_{a_n}'^{-1} F_{a_{n-1}}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1}$ , ce qui entraîne :

$$x + t dx = F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}(x_n + t \varrho^{-n} F_{a_n}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1} dx) \quad (2.5)$$

D'autre part, chaque transformation  $T_1, T_2, \dots, T_h$  agit sur les vecteurs de  $R^p$  comme une rotation  $T'_a$  ( $a=1, \dots, h$ ) suivie d'une homothétie de rapport  $\varrho'$ , ce qui entraîne en tenant compte de (2.3) et (2.5)

$$f(x + t dx) - f(x) = \varrho^m T_{a_1}' \dots T_{a_n}' [f(x_n + t \varrho^{-n} F_{a_n}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1} dx) - f(x_n)] \quad (2.6)$$

En identifiant le développement (2.4) avec celui qu'on obtient en appliquant cette même formule (2.4) au second membre de (2.6) il vient :

$$P_k(x, dx) = (\varrho' \varrho^{-k})^n T_{a_1}' \dots T_{a_n}' P_k(x_n, F_{a_n}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1} dx) \quad (2.7)$$

Comme  $x_n$  varie dans  $D_0$ , où chaque dérivée de  $f$  est bornée, et  $F_{a_n}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1} dx$  étant comme  $dx$  un vecteur unité,  $|P_k(x_n, F_{a_n}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1} dx)|$  admet une borne supérieure  $A_k$ , d'où

$$|P_k(x, dx)| \leq (\varrho' \varrho^{-k})^n A_k \quad \text{pour } x \in D_n \quad \text{et} \quad |dx| = 1 \quad (2.8)$$

Si  $k \leq q$ , en vertu de (2.1;d), on a  $\varrho' \varrho^{-k} < 1$ . Si alors  $x \in \square - P$  tend vers un point de  $P$ ,  $n$  tend vers l'infini, par suite  $P_k(x, dx) \rightarrow 0$ .

Nous avons prouvé que si  $x \in \square - P$  tend vers un point de  $P$ , les dérivées de  $f(x)$  d'ordre  $\leq q$  tendent vers 0.

Montrons encore que ces dérivées existent et sont nulles sur  $P$ . Soit  $x \in P$  et  $a_1 a_2 \dots a_n \dots$  la suite telle que  $x \in \square a_1 a_2 \dots a_n$  pour tout  $n$ . Si  $x \neq x'$ , il existe un entier déterminé  $n$ , tel que  $x' \in \square a_1 \dots a_n$  et  $x' \notin \square a_1 \dots a_n a_{n+1}$ . Il existe alors deux points  $x_n$  et  $x'_n$  de  $\square$ , tels que  $x = F_{a_1} \dots F_{a_n} x_n$ ,  $x' = F_{a_1} \dots F_{a_n} x'_n$ ; et l'on a  $x'_n \notin \square a_{n+1}$ ,  $x_n \in \square a_{n+1} a_{n+2} \subset F_{a_{n+1}} \square 1$ . La distance de  $x_n$  à  $x'_n$  est par suite supérieure au nombre positif  $\alpha$ ,  $|x'_n - x_n| \geq \alpha$  d'où

$$|x' - x| \geq \alpha \varrho^n. \quad (2.9)$$

D'autre part, si  $\delta$  est le diamètre de  $\Delta$ , on a :

$$|f(x'_n) - f(x_n)| \leq \delta \quad \text{d'où} \quad |f(x') - f(x)| \leq \varrho^n \delta$$

Cela entraîne la continuité de  $f$  en  $x$ . De plus, on a

$$\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} \leq \frac{\delta}{\alpha} (\varrho' \varrho^{-1})^n$$

d'où résulte si  $q \geq 1$ , que la différentielle première de  $f$  existe et est nulle en  $x$ , car  $\varrho' \varrho^{-1} < 1$  en vertu de (2.1; d), et  $n \rightarrow \infty$  si  $x' \rightarrow x$ .

Si  $q > 1$ , raisonnant par récurrence, supposons que pour  $k \leq q - 1$ , la différentielle d'ordre  $k$ ,  $P_k(x, dx)$ , existe et est nulle en  $x$  et montrons qu'il en est de même de la différentielle d'ordre  $k + 1$ . En tenant compte alors de (2.8) et de (2.9), on a :

$$\frac{|P_k(x', dx) - P_k(x, dx)|}{|x' - x|} = \frac{|P_k(x', dx)|}{|x' - x|} \leq (\varrho' \varrho^{-k-1})^n \frac{A_k}{\alpha}$$

ce qui tend bien vers 0 pour  $x' \rightarrow x$ , ou  $n \rightarrow \infty$ , car,  $\varrho' \varrho^{-k-1} \leq \varrho' \varrho^{-q} < 1$ .

Enfin, si  $e = \log \varrho' / \log \varrho$ , on a  $\varrho' \varrho^{-e} = 1$ , d'où en tenant compte de (2.9)

$$\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|^e} \leq \frac{\delta}{\alpha^e} (\varrho' \varrho^{-e})^n = \frac{\delta}{\alpha^e}$$

ce qui montre que  $f(x)$  est hölderienne d'exposant  $e$  aux points de  $P$ . On voit de même que pour  $k \leq q$ , les dérivées d'ordre  $k$  de  $f(x)$  sont hölderiennes d'exposant  $e - k$  aux points de  $P$ .

Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers du précédent Théorème.

Prenons pour  $\square$  le parallélotope défini dans  $R^m$  par

$$0 \leq x_j \leq 2^{(1-j)/m} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

Le plan  $x_1 = 1/2$  partage  $\square$  en deux parallélotopes égaux entre eux et semblables à  $\square$  dans le rapport  $2^{-1/m}$ . Les applications

$$T_0: \begin{cases} x'_1 &= 2^{-1/m} x_m \\ x'_{j+1} &= 2^{-1/m} x_j \end{cases} \quad (j = 1, \dots, m - 1)$$

et

$$T_1: \begin{cases} x'_1 &= 2^{-1/m} x_m + \frac{1}{2} \\ x'_{j+1} &= 2^{-1/m} x_j \end{cases} \quad (j = 1, \dots, m - 1)$$

sont des similitudes de rapport  $2^{-1/m}$  qui changent  $\square$  en ses deux moitiés  $T_0 \square$  et  $T_1 \square$ .

Soit  $H$  une homothétie ayant pour centre le centre de  $\square$ , de rapport  $< 1$ . Les similitudes  $F_0 = T_0 \circ H$  et  $F_1 = T_1 \circ H$  de rapport  $\varrho < 2^{-1/m}$ , changent  $\square$  en deux parallélotopes  $F_0 \square = \square_0$  et  $F_1 \square = \square_1$  contenus dans  $\square$  et disjoints.

Prenons pour  $\Delta$  le parallélotope défini de la même manière dans  $R^p$  et pour  $T_0$  et  $T_1$  les applications analogues à celles définies ci-dessus; ce sont des similitudes de rapport  $\varrho' = 2^{-1/p}$ ,  $T_0 \Delta$  et  $T_1 \Delta$  ont pour réunion  $\Delta$  mais ne sont pas disjoints. Les  $2^k$  parallélotopes  $T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_k} \Delta$  ont pour réunion  $\Delta$ , quel que soit  $k$ .

Les applications  $F_0$  et  $F_1$  sont des similitudes de rapport  $\varrho < 2^{-1/m}$ , qu'on pourra supposer aussi voisin que l'on veut de  $2^{-1/m}$ . Soit  $q$  le plus grand entier strictement

inférieur à  $m/p$ ,  $m/p > q \geq m/p - 1$ . Alors  $1/pq > 1/m$  et

$$2^{-1/pq} < 2^{-1/m}$$

Nous choisirons  $q$  de manière que l'on ait:

$$2^{-1/pq} < q < 2^{-1/m}$$

en sorte que

$$q' = 2^{-1/p} < q^q.$$

Le Théorème (7) s'applique dans ce cas, on a  $h=2$ ,  $q' = 2^{-1/p}$  et dans les formules (2.5), (2.6), (2.7) on peut remplacer  $T'_a$ ,  $F'_a$  respectivement par les rotations uniques  $T$  et  $F$ . L'ensemble  $P'$  devient le paralléloèdre  $\Delta$ . Les points de  $P$  sont ainsi des points stationnaires d'ordre  $r$  aussi voisin qu'on veut de  $e$ , et cependant  $f(P) = \Delta$ . D'après (2.1; d), on a  $q < r < e < m/p$ , en choisissant  $q$  assez voisin de  $2^{-1/m}$ ,  $e$  sera aussi voisin qu'on veut de  $m/p$  et  $q$  le plus grand entier inférieur à  $m/p$ .

**Lemme (1):** Soit  $E \subset R^m$  alors  $m_s(E) = 0$  si  $s > m$ . Démonstration: Il suffit de supposer que  $E$  soit le cube unité dans  $R^m$ .  $E$  est donc défini par  $0 \leq x_i \leq 1$ , ( $i=1, 2, \dots, \dots, m$ ). On peut partager  $E$  en  $h^m$  cubes  $E_j$  de côtés  $1/h$  donnés par les inégalités:  $m_{i-1}/h \leq x_j \leq m_i/h$ ,  $i=1, 2, \dots, h$ . Les ensembles  $E_j$  recouvrent  $E$ , et le diamètre d'un cube  $E_j$  vaut  $(\sqrt{m}/h)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , fixe, arbitrairement petit, et  $\delta > 0$ ; il existe  $h$  tel que  $h^{m-s} \leq \varepsilon$  et  $(\sqrt{m}/h) < \delta$ . On a:

$$\sum_{j=1}^{h^m} \delta^s(E_j) = h^m \left( \frac{\sqrt{(m)}}{h} \right)^s = m^{s/2} h^{m-s} \leq \varepsilon m^{s/2}$$

alors  $m_s(E, \delta) \leq \varepsilon$  pour tout  $\delta$ , et par suite  $m_s(E) \leq \varepsilon$  et comme  $\varepsilon$  est arbitraire, on a  $m_s(E) = 0$ .

Des lemmes (1, § 1 et 1 § 2) il découle que  $m_s f(E) = 0$  pour  $s > m/e$ . En particulier  $m_p f(E) = 0$  si  $p > m/e$  c'est-à-dire  $e > m/p$ .

Or, dans l'exemple,

$$m_p f(E) > 0 \quad \text{et} \quad e = \frac{\log q'}{\log q} = \frac{\log 2^{-1/p}}{\log q}$$

est aussi voisin qu'on veut de  $\log 2^{-1/p} / \log 2^{-1/m} = m/p$ , on ne peut donc améliorer ni l'exemple, ni le Théorème 2 de A. Sard.

Avant de prouver que l'on ne peut améliorer le théorème 4 de A. Sard, nous allons étudier la  $s$ -mesure de l'ensemble  $P$ . Nous montrerons que la dimension de  $P$  au sens de Hausdorff est égale à  $s_0 = -\log 2 / \log q$  et que  $m_{s_0}(P)$  est positive, non infinie.

**Lemme 2:** Soit  $s_0 = -\log 2 / \log q$  alors  $m_{s_0}(P) > 0$ ,  $\neq \infty$ . Démonstration: Dans le cas où  $f$  est la fonction prenant ses valeurs dans  $R^1$ , nous avons d'après le théorème

(7): 
$$|f(p) - f(q)| \leq A |p - q|^e$$

le nombre  $e$  vaut précisément  $-\log 2 / \log \varrho$  car  $\varrho' = 1/2$ . D'après le lemme (1, § 1),  $m_e(P)$  ne peut être nulle car  $m_1 f(P) = 1$  et en posant  $s = 1$  dans le lemme (1, § 1), on a  $m_1 f(P) \leq A m_e(P)$ . D'autre part  $m_e(P)$  n'est pas infinie, car à tout  $\delta > 0$  on peut faire correspondre un indice  $n$ , tel que  $\varrho^n \delta(P) < \delta$  et comme l'ensemble  $P$  est contenu dans la réunion des  $2^n$  ensembles  $\square_{a_1 \dots a_n}$  deux-à-deux disjoints, semblables à  $\square$  dans le rapport  $\varrho^n$ , et que  $2\varrho^e = 1$ , on aura:

$$\sum_{(i=1, \dots, n), a_i=0,1} \delta^e(\square_{a_1 \dots a_n}) = 2^n \varrho^{ne} \delta^e(\square) = \delta^e(\square),$$

d'où il résulte que  $m_e(P, \delta) \leq \delta^e(\square)$  et comme  $\delta$  est aussi petit que l'on veut on a:

$$m_e(P) \leq \delta^e(\square)$$

On peut ainsi remarquer qu'à chaque valeur de  $e$ , comprise entre 0 et  $m$ ,  $0 < e < m$ , il correspond un nombre  $\varrho$  tel que  $2\varrho^e = 1$  et un ensemble  $P \subset R^m$ , tels que  $m_e(P) > 0$ ,  $\neq +\infty$ .

En nous basant sur les théorèmes (6, § 1) et (1, § 2), et le lemme (2, § 2), nous allons montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $1 > \varepsilon > 0$ , fixe, et tout couple d'entiers  $m$  et  $p$ ,  $m \geq 1$ ,  $p \geq 1$ , il existe pour tout nombre  $r \geq 1$ , et pour tout nombre  $e_1$ ,  $0 < e_1 < m$ , une application  $f_\varepsilon$  d'un ouvert  $G$  de  $R^m$  dans  $R^p$ , de classe  $C^q$ ,  $q = [r]$  et un ensemble  $P$  de points stationnaires d'ordre  $r$  de  $f_\varepsilon$ ,  $m_{e_1}(P) \neq 0$ , tels que

$$m_{e_1/r+\varepsilon} f_\varepsilon(P) \neq 0$$

Nous nous plaçons dans le cas où l'on a deux similitudes  $F_0$  et  $F_1$  de rapport  $\varrho_1 = h_1 2^{-1/m}$ , et deux similitudes  $T_0$  et  $T_1$  de rapport  $\varrho_2 = h_2 2^{-1/p}$ . D'après le théorème (7), si  $x \in P$  on a:

$$\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|^r} \leq \frac{A}{\alpha^r} \left( \frac{h_2 \cdot 2^{-1/p}}{h_1^r \cdot 2^{-r/m}} \right)^n$$

et cette dernière quantité tendra vers 0 pour  $n \rightarrow \infty$ , c.à.d. lorsque  $x' \rightarrow x$ , si

$$h_2 < h_1^r 2^{-r/m+1/p}$$

de sorte que l'on peut écrire:

$$h_2 = (1 - \varepsilon') h_1^r 2^{-r/m+1/p}, \quad \varepsilon' > 0.$$

Du théorème (7), il découle que l'application  $f_\varepsilon$  que l'on obtient est de classe  $C^q$ ,  $q = [r]$  dans  $\square$  et les points de  $P$  sont des points stationnaires d'ordre  $r$  de  $f_\varepsilon$ . L'application  $f_\varepsilon$  vérifie les hypothèses du théorème (6, § 1), sur  $P$  et il vient:

$$m_{e_1/r} f_\varepsilon(P) = 0.$$

En vertu du lemme (2, § 2), à tout nombre  $e_1$ ,  $0 < e_1 < m$ , il correspond un nombre  $\varrho_1$  et un ensemble  $P$ , tels que

$$m_{e_1}(P) > 0, \quad m_{e_1}(P) \neq \infty$$

Cela implique

$$e_1 = \frac{-\log 2}{\log \varrho_1} = \frac{-\log 2}{\log h_1 - 1/m \log 2}$$

Pour les mêmes raisons, au nombre  $h_2$  il correspond

$$e_2 = \frac{-\log 2}{\log \varrho_2} \quad \text{et} \quad m_{e_2}(P') > 0, \neq \infty$$

Nous avons

$$e_2 = \frac{-\log 2}{\log(1 - \varepsilon') h'_1 - r/m \log 2} < \frac{e_1}{r}$$

et l'on peut poser  $e_2 = e_1/(r + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

On peut rendre  $e_2$  aussi voisin que l'on veut de  $e_1/r$ , il suffit pour cela de choisir  $\varepsilon'$  suffisamment petit. Comme  $m_{e_2}(P') > 0$ , on a bien  $m_{e_1/r + \varepsilon} f_\varepsilon(P) \neq 0$ . On ne peut donc améliorer ni les théorèmes 5 et 6 § 1, ni le théorème 4 de Sard.

3. En nous basant sur le cas particulier du paragraphe 2, nous allons construire une courbe simple  $C$  passant par  $P$  et une application  $f: \square \rightarrow \Delta$  telle que  $f(P) = \Delta$  dont tous les points de  $C$  sont stationnaires d'ordre  $r = m/p - \varepsilon$ .

Pour construire  $C$ , considérons les applications  $t_0(z) = (1+z)/5$  et  $t_1(z) = (3+z)/5$  de l'intervalle  $I = (0 \leq z \leq 1)$ . Le théorème (7), montre qu'il existe une application  $g: I \rightarrow \square$  et une seule, qui satisfait aux équations

$$g \circ t_a = F_a \circ g \quad a = 0, 1, \quad (3.1)$$

et dont les restrictions aux intervalles  $0 \leq z \leq 1/5$ ,  $2/5 < z < 3/5$ , et  $4/5 < z \leq 1$  sont données. Dans ce cas,  $r = 0$  et  $g$  est continue.

Désignons par  $Q$  le sommet de  $\square$  opposé à  $O$ , et supposons que les restrictions de  $g$  à ces trois intervalles définissent trois arcs simples  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , joignant respectivement  $O$  à  $F_0 O$ ,  $F_0 Q$  à  $F_1 O$  et  $F_1 Q$  à  $Q$ , ces arcs étant deux-à-deux disjoints et contenus dans  $D_0$  à l'exception des extrémités qui sont sur  $D_1$ . Alors l'application  $g$  définit un arc simple  $C$ , joignant  $O$  à  $Q$ , égal à la réunion de  $P$  et des arcs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et de toutes leurs images pour toutes les applications  $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_k}$  ( $a_i = 0, 1$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ). Supposons  $p = 1$ . Les transformations  $T_0$  et  $T_1$  se réduisent alors à  $T_0 y = y/2$  et  $T_1 y = (1+y)/2$ , de sorte que  $T_0 O = O$ ,  $T_0 1 = T_1 O = 1/2$ ,  $T_1 1 = 1$ . Si la solution  $f$  des équations (2.2) satisfait à  $f(O) = 0$  et  $f(Q) = 1$ , on aura par suite  $f(F_0(O)) = 0$ ,  $f(F_0(Q)) = f(F_1(O)) =$

$= 1/2$  et  $f(F_1(Q)) = 1$  c.à.d. que  $f$  prend la même valeur aux deux extrémités de chacun des arcs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Il en résulte qu'on peut choisir la restriction  $\varphi$  de  $f$  à  $D_0$  de manière que  $f$  soit constante égale à  $0$  dans un voisinage  $W_1$  de  $\alpha$ , constante égale à  $1/2$  dans un voisinage  $W_2$  de  $\beta$  et constante égale à  $1$  dans un voisinage  $W_3$  de  $\gamma$  et  $C^\infty$  dans  $\square - P$ . La fonction  $f$  est alors stationnaire d'ordre  $\infty$  aux points de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et en leurs images par toutes les transformations  $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_k}$  ( $a_i = 0, 1$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ). Comme elle est stationnaire d'ordre  $r = m - \varepsilon$  aux points de  $P$ , elle est stationnaire d'ordre  $r$  en tous les points de la courbe  $C$  et  $f(C) = f(P) = I$ .

Cas de  $p > 1$ .

A partir de la construction précédente et du cas particulier du théorème (7), nous allons obtenir une application  $f$  d'un ouvert  $G$  de  $R^m$  dans  $R^p$ , de classe  $C^q$ ,  $m/p > q \geq \geq m/p - 1$  stationnaire d'ordre  $r = m/p - \varepsilon$ ,  $m/p - 1 < q < r < e < m/p$ , sur un arc de courbe  $\Gamma$ , telle que  $f(\Gamma) = \Delta$ . Nous pouvons prendre pour  $\beta$  un arc de courbe contenant un exemplaire de l'arc de courbe  $C$  construit ci-dessus, et disposer  $C$  de manière que seules son origine et son extrémité rencontrent respectivement les ensembles  $F_0 W_3$  et  $F_1 W_0$  et l'on raccordera  $C$  aux points  $F_0 Q$  et  $F_1 O$  au moyen d'arcs de courbe  $C'$ ,  $C''$ , rectifiables, entièrement contenus dans  $W_2$ .

Soient  $P_0$  et  $P_1$  deux sommets de  $\Delta$  dont nous supposons qu'ils vérifient la condition  $T_0 P_0 = P_0$  et  $T_1 P_1 = P_1$ , et  $a$  le segment de droite qui joint  $T_0 P_1$  à  $T_1 P_0$ . Nous pouvons maintenant choisir  $\varphi$  de manière que  $\varphi(x) = P_0$  dans  $W_1$ ,  $\varphi(x) = P_1$  dans  $W_3$  et que  $\varphi$  soit stationnaire d'ordre  $m - \varepsilon$  sur  $C$  avec  $\varphi(C) = a$ ,  $\varphi(C') = P_0$ ,  $\varphi(C'') = P_1$ . Le segment  $a$ , image de  $\beta$  par  $\varphi$  est donc entièrement constitué de valeurs stationnaires d'ordre  $m - \varepsilon$  de  $\varphi$ .

Soit  $\Gamma$  l'arc de courbe formé de la réunion de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , de toutes leurs images par les applications  $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}$ , ( $a_j = 0, 1$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) et de  $P$ . L'application  $f$  qu'on déduit de  $\varphi$  est stationnaire d'ordre  $r = m/p - \varepsilon$  sur  $\Gamma$  et  $C^\infty$  en dehors de  $\Gamma$ . En effet,  $f$  est stationnaire d'ordre  $m - \varepsilon$  sur tous les ensembles  $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}(C)$ , cela découle de la formule:

$$f \circ F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}(x) = T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_n} \circ f(x),$$

car si  $x$  est critique pour  $f$  il l'est aussi pour l'application  $T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_n} \circ f(x)$  car les  $T_a$  sont des difféomorphismes  $C^\infty$ , et comme il en va de même pour les  $F_a$ , le point  $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}(x)$  est aussi critique pour  $f$ . En vertu de ces équations, si  $x$  est stationnaire d'ordre  $r$  pour  $f$ , alors  $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}(x)$  est également stationnaire d'ordre  $r$  pour  $f$ . Comme on peut choisir  $\varepsilon$  de telle sorte que  $m - \varepsilon > m/p > r$ ,  $f$  est bien stationnaire d'ordre  $r$  sur  $\Gamma$  et  $f(\Gamma) = \Delta$ .

On peut encore remarquer que l'image de  $\Gamma$  est une courbe de Peano qui remplit le pavé  $\Delta$ , et le graphe de l'application  $f$  dans  $R^{m+p}$  est une variété à  $m$  dimensions de classe  $C^q$ . Le  $m$ -plan tangent  $\pi$  à cette variété, varie continûment le long d'une courbe  $\Gamma'$  qui est l'image de  $\Gamma$  par l'application  $\Omega(x) = (x, f(x))$ , et en chaque point de  $\Gamma'$ ,  $\pi$  est parallèle à  $R^m$ . La projection de  $\Gamma'$  sur  $R^p$  est  $\Delta$ .

4. Voici une autre construction d'une application du paralléloétope à  $m$  dimensions  $\square$  dans un cube à  $p$  dimensions  $\Delta$  de classe  $C^q$ ,  $m/p - 1 \leq q < r < m/p$ , et stationnaire d'ordre  $r = m/p - \varepsilon$  en tous les points d'une courbe  $C$ , dont l'image  $f(C)$  remplit néanmoins  $\Delta$ .

Désignons par  $\Delta$  le cube unité de  $R^p$ ,  $0 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ). Ordonnons ses sommets  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^p$ ) de manière que  $S_{i-1}$  et  $S_i$  ( $i = 2, 3, \dots, 2^p$ ) ainsi que  $S_{2^p}$  et  $S_1$  soient les extrémités d'une même arête. On peut déterminer cet ordre par récurrence, de manière que  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^{p-1}$ ) soient les sommets de la face de  $\Delta$  contenue dans le plan  $x_p = 0$  rangés dans un ordre satisfaisant à la condition ci-dessus, et prenant pour  $S_j$  si  $j > 2^{p-1}$  le sommet de la face contenue dans le plan  $x_p = 1$  qui se projette sur  $S_{2^p+1-j}$ . On peut supposer que  $S_1 = (0, 0, \dots, 0) = 0$ , alors  $S_{2^p} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ .

Partageons  $\Delta$  en  $2^p$  cubes égaux, par les plans  $x_k = 1/2$ , ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) et désignons par  $\Delta_i$  celui qui contient le sommet  $S_i$ . Choisissons dans chaque  $\Delta_i$  une arête orientée  $A_i$ , de manière que l'extrémité de  $A_i$  coïncide avec l'origine de  $A_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, 2^p - 1$ ) et que  $S_1$  soit l'origine de  $A_1$  et  $S_{2^p}$  l'extrémité de  $A_{2^p}$ . On peut faire ce choix par récurrence: si  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^{p-1}$ ) sont des arêtes des bases des  $\Delta_i$  dans le plan  $x_p = 0$ , on prendra  $A_i = B_i$  (les  $B_i$  satisfaisant par hypothèse à la condition énoncée pour  $p - 1$ ) pour  $i < 2^{p-1}$ ,  $A_{2^p-1} =$  arête parallèle à  $O_{x_p}$  ayant pour origine l'extrémité de  $B_{2^p-1-1}$ , et si  $j > 2^{p-1}$ ,  $A_j$  sera l'arête de  $\Delta_j$  qui se projette sur  $A_{2^p+1-j}$ , avec l'orientation opposée.

Si alors  $T_i$  est une similitude (de rapport  $\frac{1}{2}$ ) qui change  $\Delta$  en  $\Delta_i$  et l'arête  $\overline{S_1 S_{2^p}}$  de  $\Delta$  en  $A_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 2^p$ ), on a:

$$T_i S_{2^p} = T_{i+1} S_1, (i = 1, \dots, 2^p - 1), T_1 S_1 = S_1, T_{2^p} S_{2^p} = S_{2^p} \quad (4.1)$$

Considérons alors les  $2^p$  similitudes  $F_{a_1} \dots F_{a_p}$  ( $a_j = 0, 1$ ) les  $F_a$  étant les similitudes (de rapport  $q$ ) définies au § 2 et désignons-les par  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^p$ ). Le Théorème (7), fournit alors une application  $f$  qui satisfait aux équations fonctionnelles

$$T_i \circ f = f \circ \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2^p) \quad (4.2)$$

Soient  $\alpha_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, 2^p$ ),  $2^p + 1$  arcs simples, deux-à-deux disjoints contenus (sauf les extrémités) dans  $D_0$ ,  $\alpha_0$  joignant  $O$  à  $\phi_1 O$ ,  $\alpha_i$  joignant  $\phi_i Q$  à  $\phi_{i+1} O$ , ( $i = 1, \dots, 2^p - 1$ ) et  $\alpha_{2^p}$  joignant  $\phi_{2^p} Q$  à  $Q$ . La réunion de  $P$  avec les arcs  $\alpha_i$  et toutes leurs images par toutes les applications  $\phi_{i_1} \dots \phi_{i_k}$ , ( $i_j = 1, \dots, 2^p$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ) est un arc simple  $C$ , joignant  $O$  à  $Q$ .

Si la solution  $f$  des équations (2.2) satisfait à  $f(0) = S_1, f(Q) = S_{2^p}$ , en vertu de (4.1) elle prend la même valeur  $T_i S_{2^p} = T_{i+1} S_1$  aux deux extrémités de l'arc  $\alpha_i$ . On en déduit que l'on peut choisir la restriction  $\varphi$  de  $f$  à  $D_0$  de manière que  $f$  soit  $C^\infty$  dans  $\square - P$  et constante égale à  $T_i S_{2^p} = T_{i+1} S_1$  dans un voisinage de  $\alpha_i$ . C'est alors une application stationnaire d'ordre  $r$  en tous les points de  $C$ , telle que  $f(C) = \Delta$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. HAUSDORFF, Dimension und äusseres Mass, *Math. Ann.* 79 (1919) 157–179.
- [2] G. DE RHAM, Celebrazioni archimedee del secolo XX, Siracusa 11–16 aprile 1961. Vol. II: simposio di analisi, 61–65. Sur quelques fonctions différentiables dont toutes les valeurs sont des valeurs critiques.
- [3] S. SAKS, *Theory of the integral*, Warszawa, 1937.
- [4] S. SAKS et S. MAZURKIEWICZ, Sur les projections d'un ensemble fermé, *Fundamenta mathematicae*, 8 (1900) 109–113.
- [5] A. SARD, The measure of critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.* 48, (1942) 883–890.
- [6] A. SARD, Images of critical sets, *Annals of mathematics.* 68 (1958) 247–259.
- [7] A. SARD, The equivalence of  $n$ -measure and Lebesgue measure in  $E^n$ , *Bull. Amer. Math. Soc.* 49 (1943) 758–759.
- [8] H. WHITNEY, A function not constant on a connected set of critical points, *Duke. Math. Journal.* 1, (1935) 514–517.

Reçu le 24 novembre 1965