Sur les fonctions propres des membranes vibrantes couvrant un secteur symétrique de polygone régulier ou de domaine périodique.

Sur les fonctions propres des membranes vibrantes couvrant un secteur symétrique de polygone régulier ou de domaine périodique

par JOSEPH HERSCH (E.P.F., Zurich)

§ 1. Introduction

1.1. Ce travail a pour but de mettre en lumière des propriétés simples dont jouissent les fonctions propres de domaines d'un type particulier («secteurs symétriques de domaines périodiques»). Ces propriétés sont différentes (mais voisines) de celles indiquées dans [1]: elles sont valables pour une classe plus restreinte de domaines que [1]; mais, pour cette classe, elles donnent des renseignements bien plus considérables. Si, dans les résultats des paragraphes 2 et 3, on pose $N=3$, on retrouve un cas particulier de [1].

1.2. Nous allons voir que les fonctions propres des «secteurs symétriques de domaines périodiques» (cas particulier: secteur de polygone régulier) jouissent de quelques propriétés des fonctions propres des rectangles et des secteurs de couronnes circulaires (cas particulier: secteur de cercle). Le problème étudié et les résultats obtenus présentent des aspects communs avec la théorie de Floquet sur les équations différentielles ordinaires à coefficients périodiques.

1.3. Le raisonnement utilisé ici est différent de celui de [1], mais de nouveau très simple. Il nous permettra aussi (§§ 4 et 6) de montrer l'équivalence de problèmes aux valeurs propres pour plusieurs membranes de formes différentes.

§ 2. Secteurs symétriques de domaines périodiques

2.1. Un domaine G est «périodique selon la direction Ox» s'il reste inchangé par une translation $(x, y)\to(x+\Omega, y)$; c'est-à-dire que son translaté $(G)_\Omega$ se confond avec G. De plus, nous supposons donnée une fonction réelle $k(s)$ sur le contour ∂G de G, *jouissant de la même périodicité* (par exemple $k=$const.).

Un «N-secteur» S_N d'un domaine G de période Ω selon la direction Ox, est l'intersection de G avec une bande $x_0<x<x_0+N\Omega$ (N entier). Un tel secteur est dit «symétrique» s'il possède un axe de symétrie perpendiculaire à Ox.

Nous supposerons toujours qu'il existe un 1-secteur ou «cellule» symétrique S_1 de G [un autre est alors la «cellule complémentaire» $\tilde{S}_1=(S_1)_{\Omega/2}$]; *nous supposerons la même symétrie pour $k(s)$; nous ne considérerons que des N-secteurs symétriques eux aussi*: ils sont formés de N cellules symétriques (fig. 1).

2.2. Soit S_N (dans $x_0<x<x_0+N\Omega$) un N-secteur d'un domaine périodique G (fig. 1); soient $(S_N)_\Omega$ son translaté à droite et $(S_N)_{-\Omega}$ son translaté à gauche. Dans S_N,

Légende pour toutes les figures (1 à 11):

———————— arcs-frontière fixés.

\- - - - - - - - - arcs-frontière libres.

-·-·-·-·-·-·-·- arcs-frontière élastiquement liés de façon périodique et symétrique [par exemple k(s) = const; cas particuliers admis: k = ∞ arc fixé; k = 0 arc libre].

.... lignes auxiliaires pour la clarté de la figure.

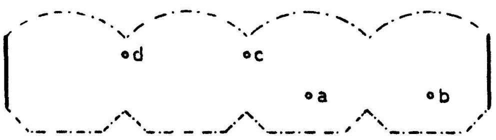

Fig 1a: S_4

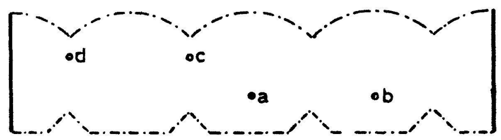

Fig. 1b: $\tilde{S}_4$

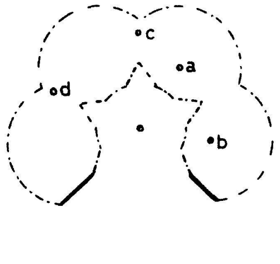

Fig. 2a: S_4

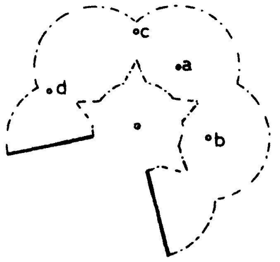

Fig. 2b: $\tilde{S}_4$

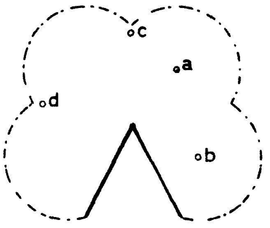

Fig. 3a: S_4

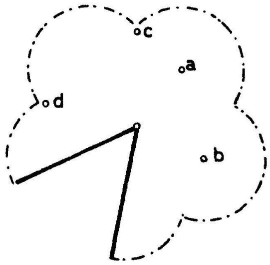

Fig. 3b: $\tilde{S}_4$

Fig. 1, 2 et 3: $\begin{cases} u_1(a) = (\sqrt{2}+1)u_1(b); & \tilde{u}_1(a) = \sqrt{2}\tilde{u}_1(b); \\ u_1(c) = \sqrt{2}u_1(d) \quad ; & \tilde{u}_1(c) = (\sqrt{2}+1)\tilde{u}_1(d); \\ \text{et } \lambda_1 = \tilde{\lambda}_1. \end{cases}$

nous considérons le problème de la membrane vibrante homogène à contour élastiquement lié:

$\Delta u + \lambda u = 0$ dans S_N,

$u = 0$ sur les arcs-frontière rectilignes $x = x_0$ et $x = x_0 + N\Omega$,

$\partial u/\partial n + k(s)u = 0$ sur le reste $\partial S_N \cap \partial G$ du contour de S_N ($\partial/\partial n$ = dérivation selon la normale extérieure).

(Si $k(s) \equiv \infty$, tout le contour de S_N est fixé.)

Soit $u_1(x, y)$ la première fonction propre, elle a signe constant dans S_N. De plus, S_N étant symétrique et λ_1 non-dégénérée, u_1 est symétrique: $u_1(x,y) = u_1(2x_0 + N\Omega - x, y)$. *Nous prolongeons u_1 dans tout G par des symétries successives*: $u_1(x, y) = -u_1(2x_0 - x, y)$, etc. Nous obtenons ainsi une function propre dans tout G, *de période* $2N\Omega$.

Alors $u_1(x - \Omega, y)$ est la première fonction propre du secteur translaté $(S_N)_\Omega$, $u_1(x + \Omega, y)$ celle de $(S_N)_{-\Omega}$.

Je dis que, *si* $N \geq 3$, la somme $f(x, y) = u_1(x - \Omega, y) + u_1(x + \Omega, y)$ est fonction propre de S_N. En effet:

$\Delta f + \lambda_1 f = 0$; $f = 0$ pour $x = x_0$ et $x = x_0 + N\Omega$;

$\partial f/\partial n + k(s)f = 0$ sur le reste du contour de S_N;

comme $N>2$, $f(x_0+\Omega, y)=u_1(x_0, y)+u_1(x_0+2\Omega, y)=u_1(x_0+2\Omega, y)\not\equiv 0$, donc $f\not\equiv 0$.

De plus, la valeur propre correspondante est λ_1, *non-dégénérée*; donc $f\equiv c\cdot u_1(x, y)$.

La première fonction propre $u_1(x, y)$ de S_N satisfait donc à l'équation aux différences:

$$u_1(x-\Omega, y) - c\cdot u_1(x, y) + u_1(x+\Omega, y) \equiv 0. \tag{1}$$

2.3. Pour déterminer la constante c, nous écrivons cette équation avec $x=x_0+\Omega$, $x_0+2\Omega, \ldots, x_0+(N-1)\Omega$, et nous savons que $u_1(x_0, y)\equiv u_1(x_0+N\Omega, y)\equiv 0$:

$$\begin{aligned}
-c\cdot u_1(x_0+\Omega, y) + u_1(x_0+2\Omega, y) \qquad\qquad\qquad &= 0\\
u_1(x_0+\Omega, y) - c\cdot u_1(x_0+2\Omega, y) + u_1(x_0+3\Omega, y) &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
u_1(x_0+(N-2)\Omega, y) - c\cdot u_1(x_0+(N-1)\Omega, y) \qquad &= 0
\end{aligned}$$

Comme u_1 ne s'annule pas en ces $N-1$ points, le déterminant de ce système homogène doit s'annuler:

$$\begin{vmatrix}
-c & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
1 & -c & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & -c & 1 & 0 & \ldots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 & -c
\end{vmatrix} = 0$$

Appelons A_{N-1} la matrice $\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \ldots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 0
\end{pmatrix}$;

on obtient immédiatement tous les vecteurs propres $\vec{a}_n$ et les valeurs propres c_n de A_{N-1}: $A_{N-1}\vec{a}_n = c_n \vec{a}_n$, en remarquant que tout notre raisonnement s'applique aux membranes homogènes rectangulaires, et même, plus simplement, aux *cordes vibrantes homogènes*; la corde homogène sur $x_0<x<x_0+N\Omega$ a les fonctions propres $u_n(x)=\sin[n\pi(x-x_0)/N\Omega]$, $n=1, 2, 3, \ldots$; le vecteur propre $\vec{a}_n$ de A_{N-1} est donc

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix}
\sin n\pi/N\\
\sin 2n\pi/N\\
\cdots\cdots\\
\sin(N-1)n\pi/N
\end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N-1; \tag{2}$$

la valeur propre correspondante c_n de A_{N-1} est:

$$c_n = \frac{\sin n\pi(X+\Omega)/N\Omega + \sin n\pi(X-\Omega)/N\Omega}{\sin n\pi X/N\Omega} = 2\cos n\pi/N. \tag{3}$$

La *première* fonction propre u_1 de S_N y a signe constant, elle induit donc le vecteur propre $\vec{a}_1$ de A_{N-1} et correspond à la valeur propre

$$c_1 = 2\cos \pi/N \tag{3'}$$

de cette matrice:

$$u_1(x-\Omega, y) - 2\cos \pi/N \cdot u_1(x,y) + u_1(x+\Omega, y) \equiv 0 \tag{1'}$$

et notamment par (2):

$$u_1(x_0 + \nu\Omega, y) = g_1(y) \sin \nu\pi/N, \qquad \nu = 1, 2, \dots, N-1. \tag{4}$$

2.4. Ecrivons maintenant (1) pour $x = x_0 + \Omega/2$, $x_0 + 3\Omega/2$, ..., $x_0 + (N - \frac{1}{2})\Omega$ et utilisons le fait que

$$u_1(x_0 - \Omega/2, y) = -u_1(x_0 + \Omega/2, y) \quad \text{et}$$
$$u_1(x_0 + (N+\tfrac{1}{2})\Omega, y) = -u_1(x_0 + (N-\tfrac{1}{2})\Omega, y);$$

nous obtenons un système de N équations linéaires à N inconnues, de la forme $B_N \vec{b} = c\vec{b}$ avec la matrice

$$B_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en obtient les vecteurs propres (comme ci-dessus pour la matrice A):

$$\vec{b}_n = \begin{pmatrix} \sin n\pi/2N \\ \sin 3n\pi/2N \\ \cdots \\ \sin (2N-1)n\pi/2N \end{pmatrix} \tag{2'}$$

avec de nouveau

$$c_n = 2\cos n\pi/N; \tag{3}$$

u_1 correspondant à $n=1$, (2') nous donne

$$u_1(x_0 + (\nu+\tfrac{1}{2})\Omega, y) = \hat{g}_1(y) \sin (\nu + \tfrac{1}{2})\pi/N, \qquad \nu = 0, 1, \dots, N-1. \tag{4'}$$

2.5. *Plus généralement*, appliquons (1) en des points

$$(\xi, y), (\xi+\Omega, y), (\xi + 2\Omega, y), \dots, (\xi + (N-1)\Omega, y) \qquad (x_0 \le \xi < x_0 + \Omega)$$

et utilisons le fait que

$$u_1(\xi+N\Omega,y)=-u_1(2x_0+N\Omega-\xi,y)=-u_1(\xi,y) \tag{5}$$

(période $=2N\Omega$); nous obtenons un système de N équations linéaires à N inconnues de la forme $C_N\vec{c}=c\vec{c}$ avec la matrice

$$C_N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

nous obtenons ses vecteurs propres $\vec{c}_n$ et valeurs propres c_n en considérant les vibrations *symétriques* d'une corde homogène:

$$\vec{c}_n=\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \sin(n\pi/N+\alpha) \\ \sin(2n\pi/N+\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sin((N-1)n\pi/N+\alpha) \end{pmatrix} \tag{2''}$$

avec de nouveau

$$c_n=2\cos n\pi/N, \quad \textit{mais avec} \quad \mathrm{n} \quad \textit{impair seulement}; \tag{3''}$$

α étant quelconque, toutes les valeurs propres c_n avec $n<N$ sont de multiplicité 2:

Si N est pair: $c_1, c_3, \dots, c_{N-1}$, donc $N/2$ valeurs propres de multiplicité 2.

Si N est impair: $c_1\ c_3, \dots, c_{N-2}$, donc $(N-1)/2$ valeurs propres de multiplicité 2; *et une* valeur propre non-dégénérée $c_N=-2$, correspondant au *seul* vecteur propre

$$\vec{c}_N=(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots,\ -1,\ 1)^*.$$

(L'étoile désigne la matrice transposée.)

La première fonction propre u_1 ayant signe constant (p. ex. positif), elle correspond à $\vec{c}_1$ avec $0\le\alpha_1<\pi/N$; nous obtenons ainsi:

$$u_1(\xi+\nu\Omega,y)=h_1(\xi,y)\sin\left[\nu\pi/N+\alpha_1(\xi,y)\right], \quad \nu=0,1,2,\dots,N-1. \tag{4''}$$

Les fonctions «locales» $h_1(\xi,y)$ et $\alpha_1(\xi,y)$ sont définies dans la cellule S_1.

La relation (4″) *permet de déterminer* u_1 *dans tout* S_N *si on la connaît dans une seule cellule* S_1, *notamment la première*: $x_0<x\le x_0+\Omega$. En effet, par symétrie on la connaît aussi dans la dernière cellule $x_0+(N-1)\Omega\le x<x_0+N\Omega$; nous avons alors deux relations pour déterminer, dans (4″), $h_1(\xi,y)$ et $\alpha_1(\xi,y)$. – Ou plus simplement: on connaît alors u_1 aussi dans $(S_1)_{-\Omega}(x_0-\Omega\le x\le x_0)$, d'où par (1′) dans $(S_1)_\Omega$, $(S_1)_{2\Omega}$, etc.

Prolongeons $h_1(x, y)$ dans tout S_N par périodicité: $h_1(\xi+\nu\Omega, y)=h_1(\xi, y)$, et posons $\beta_1(\xi, y)=\alpha_1(\xi, y)-\pi\xi/N\Omega$ et $\beta_1(\xi+\nu\Omega, y)=\beta_1(\xi, y)$ (périodique), nous obtenons $u_1(x, y)=h_1(x,y)\sin(\pi x/N\Omega+\beta_1(x,y))$, soit, avec $H_1(x, y)=h_1(x, y)e^{i\beta_1(x,y)}$ (périodique aussi, de période Ω),

$$u_1(x,y)=\operatorname{Im} U_1(x,y), \quad \text{où} \quad U_1(x,y)=H_1(x,y)\cdot\exp(i\pi x/N\Omega). \tag{6}$$

Cette forme de $U_1(x, y)$=*produit d'une fonction périodique* H_1 *par une exponentielle*, est à rapprocher de la *théorie de Floquet* sur les équations à coefficients périodiques.

On peut considérer le problème comme décomposé en un *aspect global* et un *aspect local*: l'aspect global est caractérisé par le nombre N et se réflète, dans (6), par l'exponentielle; l'aspect local y est représenté par la fonction $H_1(x, y)$.

Cas particulier $\xi=x_0$: $0=u_1(x_0, y)=h_1(x_0, y)\sin\alpha_1(x_0, y)$, donc $\alpha_1(x_0, y)=0$, $\beta_1(x_0, y)=-\pi x_0/N\Omega$ et l'on retrouve (4).

Cas particulier $\xi=x_0+\Omega/2$: $u_1(\xi, y)=u_1(2x_0+N\Omega-\xi, y)$ (symétrie), donc $\sin\alpha_1=\sin[(1-1/N)\pi+\alpha_1]$; $\pi-\alpha_1=(1-1/N)\pi+\alpha_1$; $\alpha_1=\pi/2N$, $\beta_1=-\pi x_0/N\Omega$ de nouveau, et l'on retrouve (4').

§ 3. Fonctions propres supérieures

Nous allons d'abord distinguer les valeurs propres simples des valeurs propres multiples (ou dégénérées).

3.1. *Valeur propre simple* λ_j, fonction propre correspondante u_j.

Le raisonnement du § 2.2 reste valable ici: il existe une constante c (dépendant de j) telle que

$$u_j(x-\Omega,y)-c\cdot u_j(x,y)+u_j(x+\Omega,y)\equiv 0. \tag{1''}$$

Deux cas peuvent se présenter:

Premier cas: u_j s'annulle sur tous les segments verticaux $x=x_0+\nu\Omega$, $\nu=1, 2, 3, \ldots, N-1$. C'est alors déjà une fonction propre de la cellule $S_1(x_0<x<x_0+\Omega)$, et λ_j est valeur propre de S_1. Alors $c=\pm 2$.

Second cas: $u_j(x_0+\Omega, y)\not\equiv 0$; écrivons alors (comme au § 2.3) l'équation aux différences (1″) pour les $N-1$ points

$$(x_0+\Omega,y),(x_0+2\Omega,y),\ldots,(x_0+(N-1)\Omega,y),$$

nous obtenons un système de $N-1$ équations linéaires homogènes à $N-1$ inconnues: $A_{N-1}\vec{a}=c\vec{a}$ (avec la même matrice A_{N-1} qu'au § 2.3), admettant une solution non-triviale. De nouveau, on a pour un certain entier $n_j(1\le n_j\le N-1)$,

$c=c_{n_j}=2\cos n_j\pi/N$, et $\vec{a}=\vec{a}_{n_j}$ est donné par (2):

$$u_j(x-\Omega,y)-2\cos(n_j\pi/N)\cdot u_j(x,y)+u_j(x+\Omega,y)\equiv 0, \tag{1'''}$$

$$u_j(x_0+v\Omega,y)=g_j(y)\sin vn_j\pi/N, \quad v=1,2,3,\ldots,N-1. \tag{4'''}$$

L'entier n_j (*inconnu a priori*) dépend de l'indice j; mais en général une infinité de fonctions propres $u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots$ correspondront au même entier $n_{j_1}=n_{j_2}=\cdots$ (considérer par exemple pour S_N un rectangle!). — Nous obtenons aussi

$$u_j(x_0+(v+\tfrac{1}{2})\Omega,y)=\hat{g}_j(y)\sin(v+\tfrac{1}{2})\hat{n}_j\pi/N, \quad v=0,1,2,\ldots,N-1. \tag{4^{IV}}$$

Le § 2.5 se laisse aussi étendre aux fonctions propres supérieures. Remarquons d'abord qu'il existe toujours un système complet formé par des fonctions propres les unes symétriques, les autres antisymétriques *relativement à la droite* $x=x_0+(N\Omega/2)$: en effet, soit u une fonction propre, alors chacune des deux fonctions

$$u(x,y)+u(2x_0+N\Omega-x,y), \quad u(x,y)-u(2x_0+N\Omega-x,y)$$

est soit identiquement nulle, soit fonction propre (symétrique ou antisymétrique) correspondant à la même valeur propre λ.

(a) Les fonctions propres u_j *symétriques* satisfont, comme u_1, à la relation (5), d'où la même matrice C_N, et (1‴) avec un entier n_j *impair*, $1\le n_j\le N$. — Utilisant de nouveau les vecteurs propres $\vec{c}_n$ de C_N donnés par (2″), nous obtenons

$$u_j(\xi+v\Omega,y)=h_j(\xi,y)\sin[vn_j\pi/N+\alpha_j(\xi,y)], \quad v=0,1,2,\ldots,N-1; \tag{4^{V}}$$

soit, de façon équivalente,

$$u_j(x,y)=\operatorname{Im} U_j(x,y) \quad \text{où} \quad U_j(x,y)=H_j(x,y)\exp(in_j\pi x/N\Omega), \tag{6'}$$

avec $\beta_j(\xi,y)=\alpha_j(\xi,y)-n_j\pi\,\xi/N\Omega$, h_j et β_j prolongés par périodicité (période Ω) et $H_j(x,y)=h_j(x,y)\exp(i\beta_j(x,y))$.

L'entier n_j dépend de la fonction propre u_j considérée, il ne dépend *pas* de ξ ni de y: en effet, u_j étant continue, on aura $\alpha(\xi,y)$ continue avec $n_j=$constante.

Cas particulier $\xi=x_0$: on retrouve (4‴) avec $g_j(y)=h_j(x_0,y)$, $\alpha_j(x_0,y)=0$, $\beta_j(x_0,y)=-n_j\pi\,x_0/N\Omega$. Si $n_j=N$, u_j est fonction propre de la cellule S_1 («premier cas»).

Cas particulier $\xi=x_0+\Omega/2$: on retrouve (4^{IV}) avec $\hat{g}_j(y)=h_j(x_0+\Omega/2,y)$, $\alpha_j(x_0+\Omega/2,y)=n_j\pi/2N$, $\beta_j(x_0+\Omega/2,y)=-n_j\pi\,x_0/N\Omega$ de nouveau, et $\hat{n}_j=n_j$.

(b) Les fonctions propres u_j *antisymétriques* ont la période $N\Omega$:

$$u_j(\xi+N\Omega,y)=-u_j(2x_0+N\Omega-\xi,y)=u_j(\xi,y); \tag{5'}$$

l'application de (1″) en des points $(\xi,y),(\xi+\Omega,y),\ldots,(\xi+(N-1)\Omega,y)\,(x_0\le\xi<x_0+\Omega)$ donne un système de N équations linéaires homogènes à N inconnues de la

forme $\hat{C}_N \vec{c} = c\vec{c}$ avec la matrice

$$\hat{C}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

nous obtenons ses vecteurs propres $\vec{c}_n$ et ses valeurs propres c_n en considérant les vibrations *antisymétriques* d'une corde homogène: les $\vec{c}_n$ sont de nouveau donnés par (2″), *mais avec $n = n_j$ pair seulement,*

$$c_n = 2 \cos n\,\pi/N, \qquad n \textit{ pair},\ 0 \leq n \leq N; \tag{3‴}$$

α étant quelconque dans (2″), toutes les valeurs propres c_n avec $0 < n < N$ sont de multiplicité 2:

Si N est pair: $c_2, c_4, c_6, \dots, c_{N-2}$, donc $(N-2)/2$ valeurs propres de multiplicité 2; *et deux* valeurs propres non-dégénérées $c_0 = 2$ et $c_N = -2$, correspondant respectivement aux vecteurs propres

$$\vec{c}_0 = (1, 1, 1, \dots, 1, 1)^* \quad \text{et} \quad \vec{c}_N = (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)^*.$$

Si N est impair: $c_2, c_4, c_6, \dots, c_{N-1}$, donc $(N-1)/2$ valeurs propres de multiplicité 2; *et une* valeur propre non-dégénérée $c_0 = 2$, correspondant au vecteur propre $\vec{c}_0$ (comme ci-dessus).

Comme dans le cas (a) (fonctions propres symétriques), nous obtenons pour u_j la forme (4^{V}) ou (6′), *mais avec n_j pair*; et l'on retrouve comme *cas particuliers* (4‴) et (4^{IV}) avec $n_j = \hat{n}_j$.

Si $n_j = N$, u_j est fonction propre de la cellule S_1.

Si $n_j = 0$, u_j est même fonction propre de la demi-cellule $x_0 < x < x_0 + (\Omega/2)$.

Dans le cas (a) comme dans le cas (b), *la fonction propre u_j est complètement déterminée* (grâce à (4^{V})), *si on la connaît dans S_1 et si l'on connaît l'entier n_j.*

3.2. *Valeur propre dégénérée* (multiplicité d + 1) $\lambda_m = \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_{m+d}$, $d \geq 1$; fonctions propres indépendantes correspondantes $u_m, u_{m+1}, \dots, u_{m+d}$.

Soit i entier, $0 \leq i \leq d$; $f_i(x, y) \equiv u_{m+i}(x - \Omega, y) + u_{m+i}(x + \Omega, y)$ est soit identiquement nulle, soit (comme au § 2.2) fonction propre de S_N, correspondant aussi à la valeur propre λ_m; donc

$$f_i(x, y) = \sum_{j=0}^{d} c_{ij} u_{m+j}(x, y); \qquad i = 0, 1, 2, \dots, d. \tag{7}$$

De façon analogue au § 2.3, nous écrivons chacune de ces $d+1$ équations pour $x = x_0 + \Omega, x_0 + 2\Omega, \dots, x_0 + (N-1)\Omega$; mais, comme au § 3.1, nous devons distinguer plusieurs cas:

Premier cas: Chacune des fonctions $u_m, \ldots, u_{m+d}$ s'annule sur tous les segments verticaux $x=x_0+\nu\,\Omega$, $\nu=1, 2, \ldots, N-1$: elles sont alors déjà des fonctions propres de la cellule S_1 ($\lambda_m=$«valeur propre purement locale»).

Deuxième cas: λ_m n'est pas valeur propre de S_1, aucune des fonctions $u_m, \ldots, u_{m+d}$ ne s'annule identiquement sur les segments $x=x_0+\nu\,\Omega$. («Valeur propre purement globale».) – Ecrivons alors (7) pour $N-1$ points $(x_0+\Omega, y)$, $(x_0+2\Omega, y), \ldots$, $(x_0+(N-1)\Omega, y)$, nous obtenons un système de $(d+1)(N-1)$ équations linéaires homogènes à autant d'inconnues.

Si, par un nouveau choix des fonctions de base: $\check{u}_m, \ldots, \check{u}_{m+d}$, on décompose la matrice (c_{ij}) en $d+1$ matrices du type considéré au § 3.1, on obtiendra (1‴) et (4‴) pour $\check{u}_m, \ldots, \check{u}_{m+d}$; prenons garde cependant que le nombre n n'est en général *pas le même* pour ces $d+1$ fonctions: c'est pourquoi *une fonction propre quelconque u_m, correspondant à une valeur propre dégénérée, ne satisfera en général à aucune relation de la forme* (1‴) ni (4‴).

Troisième cas: λ_m est valeur propre de la cellule S_1, mais avec une multiplicité $\mu<d+1$. – On peut alors choisir, comme base de l'espace propre correspondant, μ fonctions propres («locales») de S_1 et $d+1-\mu$ fonctions propres «globales»: pour ces dernières, on se retrouve dans la situation du deuxième cas.

§ 4. Un domaine périodique symétrique G étant donné, un N-secteur S_N et le N-secteur complémentaire $\tilde{S}_N$ posent, si $N\geqslant 2$, des problèmes aux valeurs propres «globaux» équivalents

4.1. Soit (Fig. 1) S_N le secteur de G dans $x_0<x<x_0+N\,\Omega$; le secteur «complémentaire» $\tilde{S}_N=G\cap\{x_0+(\Omega/2)<x<x_0+(\Omega/2)+N\Omega\}$ est formé de N cellules $\tilde{S}_1$ «complémentaires» à S_1.

Soit $u(x, y)$ une fonction propre de S_N: $\Delta u+\lambda\, u=0$; alors la translatée $u(x-\Omega, y)$ est fonction propre du N-secteur translaté $(S_N)_\Omega$; *si* la fonction

$$\tilde{u}(x, y)\equiv u(x-\Omega, y)+u(x, y) \tag{8}$$

n'est pas identiquement nulle [alors u serait fonction propre («locale») de la cellule S_1], elle est fonction propre de $\tilde{S}_N$, car

$$\begin{aligned}
&\Delta\tilde{u}+\lambda\,\tilde{u}=0\\
&\tilde{u}(x_0+\Omega/2, y)=u(x_0-\Omega/2, y)+u(x_0+\Omega/2, y)=0 \text{ (cf. 2.2);}\\
&\tilde{u}(x_0+N\Omega+\Omega/2, y)=u(x_0+N\Omega-\Omega/2, y)+u(x_0+N\Omega+\Omega/2, y)=0;\\
&\partial\tilde{u}/\partial n+k(s)\tilde{u}=0 \text{ sur le reste du contour de } \tilde{S}_N.
\end{aligned}$$

(Les fonctions propres ne sont définies qu'à un multiple constant près; dans les figures 4 à 7, où $N=2$, nous introduisons un facteur $\sqrt{2}$ pour obtenir des relations symétriques entre u et $\tilde{u}$.)

Toute valeur propre de S_N qui n'est pas valeur propre de S_1, est valeur propre de $\tilde{S}_N$. Plus précisément:

Si l'on laisse de côté les fonctions propres («locales») de S_1 et de $\tilde{S}_1$, il y a une correspondance, donnée par (8) et sa réciproque (permuter les rôles de S_N et $\tilde{S}_N$), entre les fonctions propres («globales») u de S_N et celles $\tilde{u}$ de $\tilde{S}_N$.

Si λ est valeur propre de S_N de multiplicité μ_N et de S_1 de multiplicité μ_1, alors elle est valeur propre de $\tilde{S}_N$ de multiplicité $\tilde{\mu}_N \geq \mu_N - \mu_1$; et la différence entre le membre de gauche et celui de droite *est la multiplicité $\tilde{\mu}_1$ de λ comme valeur propre* de $\tilde{S}_1$:

$$\mu_N - \mu_1 = \tilde{\mu}_N - \tilde{\mu}_1 . \tag{9}$$

($\mu_1 = 0$ signifie: λ n'est pas valeur propre de S_1.)

Cette relation est triviale si $N=1$; *elle a un sens pour tous les $N \geq 2$.*

(a) La relation (9) s'établit tout d'abord pour les nombres λ *qui ne sont pas valeurs propres multiples* de S_N ni de $\tilde{S}_N$: $\mu_N = 0$ ou 1 et $\tilde{\mu}_N = 0$ ou 1.

(a1) Si λ est valeur propre *simple* et *globale* de S_N, $\mu_N = 1$ et $\mu_1 = 0$; la fonction propre correspondante u satisfait alors à (1″) avec (cf. 3.1) $c \neq \pm 2$; nous définissons $\tilde{u}$ par (8); je dis que $\tilde{u}$ n'est pas fonction propre de $\tilde{S}_1$. En effet:

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}(x-\Omega, y) - \tilde{u}(x+\Omega, y) = u(x-2\Omega, y) + u(x-\Omega, y) - u(x, y) - u(x+\Omega, y) \\
&= [u(x-2\Omega, y) + 2u(x-\Omega, y) + u(x, y)] - [u(x-\Omega, y) + 2u(x, y) + u(x+\Omega, y)] \\
&= (2+c)[u(x-\Omega, y) - u(x, y)];
\end{aligned}$$

λ étant globale pour S_N, $c \neq -2$ et u n'a pas la période Ω; donc notre expression ne s'annule pas identiquement, $\tilde{u}$ n'a pas la période 2Ω, elle n'est pas fonction propre de $\tilde{S}_1$; donc λ est aussi valeur propre *globale* de $\tilde{S}_N$, $\tilde{\mu}_N - \tilde{\mu}_1 \geq 1$, d'où $\tilde{\mu}_N = 1$ et $\tilde{\mu}_1 = 0$.

(a2) De même, si λ est valeur propre *simple* et *globale* de $\tilde{S}_N$, $\tilde{\mu}_N = 1$ et $\tilde{\mu}_1 = 0$, et l'on obtient $\mu_N - \mu_1 \geq 1$, donc $\mu_N = 1$ et $\mu_1 = 0$, λ étant aussi valeur propre simple et *globale* de S_N.

Si l'on exclut toute dégénérescence de λ (dans S_N et dans $\tilde{S}_N$), $\mu_N - \mu_1$ et $\tilde{\mu}_N - \tilde{\mu}_1$ ont donc la même valeur 0 ou 1.

(b) Par un argument de continuité, on étend la validité de (9) aux valeurs propres multiples λ: une légère déformation *périodique* de G en G' décompose la valeur propre $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+\mu_N-1}$ en μ_1 valeurs propres simples de la cellule déformée S_1' et $\mu_N - \mu_1$ valeurs propres simples «globales» de S_N'; cette même déformation périodique décompose $\lambda = \tilde{\lambda}_m = \tilde{\lambda}_{m+1} = \ldots = \tilde{\lambda}_{m+\tilde{\mu}_N-1}$ en $\tilde{\mu}_1$ valeurs propres simples de $\tilde{S}_1'$ et $\tilde{\mu}_N - \tilde{\mu}_1$ valeurs propres simples «globales» de $\tilde{S}_N'$; par (a) nous savons que ces valeurs propres globales simples sont les mêmes et en même nombre: $\mu_N - \mu_1 = \tilde{\mu}_N - \tilde{\mu}_1$, c'est notre relation (9).

En particulier, la fonction propre fondamentale u_1 a signe constant dans S_N, elle ne peut (pour $N \geq 2$) être fonction propre de S_1, donc $\widetilde{(u_1)}$ est fonction propre de $\tilde{S}_N$;

c'est la première, car (cf. 2.3) elle correspond à n = 1:

$$\lambda_1(S_N) = \tilde{\lambda}_1(\tilde{S}_N) \quad \text{si} \quad N \geq 2. \tag{10}$$

On prendra garde, cependant, qu'une valeur propre *supérieure* «globale» $\lambda_i = \tilde{\lambda}_j$ commune à S_N et $\tilde{S}_N$, aura en général des *indices différents* $i \neq j$, car les valeurs propres de S_1 sont différentes de celles de $\tilde{S}_1$.

D'autre part, on remarquera que les valeurs propres et fonctions propres de la demi-cellule $x_0 < x < x_0 + \Omega/2$ sont communes à S_1 et $\tilde{S}_1$, donc à S_N et $\tilde{S}_N$.

4.2. Repassons de $\tilde{S}_N$ à S_N: Si $\tilde{u}(x, y)$ est fonction propre «globale» de $\tilde{S}_N$, alors $\tilde{u}(x, y) + \tilde{u}(x + \Omega, y)$ est fonction propre de S_N, donc, si la valeur propre correspondante λ est simple dans S_N et dans $\tilde{S}_N$ (par exemple si $\lambda = \lambda_1$),

$$\tilde{u}(x,y) + \tilde{u}(x + \Omega, y) = \gamma \cdot u(x,y);$$

par (8), nous avons donc

$$u(x - \Omega, y) + (2 - \gamma) u(x,y) + u(x + \Omega, y) \equiv 0;$$

c'est notre relation (1″) avec $2 - \gamma = -c$.

§ 5. Extension à des périodes angulaires

5.1. *Un domaine* G, *périodique relativement à un point* O, est en général situé sur une surface de recouvrement logarithmique, infiniment ramifiée au point O; il reste inchangé par une *rotation d'angle* Ω (la «période») autour de O.

Le domaine G ne pourrait être considéré dans le plan que si $\Omega = 2\pi/q$ avec q entier («domaine symétrique d'ordre q» [2]); mais, *même dans ce cas, nous le considérerons sur la surface de recouvrement logarithmique.*

Nous supposerons que la fonction $k(s)$, définie sur la frontiére de G, jouisse de la même périodicité.

Un «N-secteur» sera $S_N = G \cap \{\theta_0 < \theta < \theta_0 + N\Omega\}$. Nous considérons seulement des secteurs symétriques et des fonctions k(s) symétriques. – Toutes les «cellules» S_1 sont séparées entre elles par des droites passant par O.

5.2. L'extension des §§ 2, 3 et 4 est immédiate. Notamment:

$$u_1(r, \theta_0 + \nu\,\Omega) = g_1(r) \sin \nu\pi/N, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N-1; \tag{4*}$$

$$u_1(r, \theta_0 + (\nu + \tfrac{1}{2})\Omega) = \hat{g}_1(r) \sin(\nu + \tfrac{1}{2})\pi/N, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \tag{4'*}$$

Quelques exemples de secteurs S_N et $\tilde{S}_N$ sont indiqués par les figures 2 à 7. – Une catégorie particulière est formée par les *secteurs symétriques de polygones réguliers* (Fig. 8 b et c, 9 b et c, 10 c et d, 11 c et d).

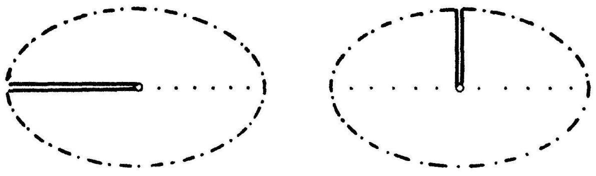

Fig.4a: S_2 Fig.4b: $\tilde{S}_2$

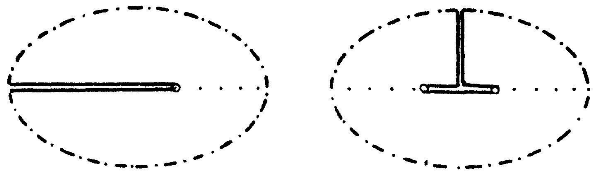

Fig. 5a: S_2 Fig.5b: $\tilde{S}_2$

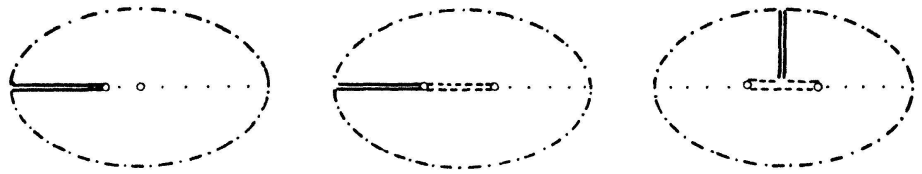

Fig.6a Fig.6b: S_2 Fig.6c: $\tilde{S}_2$

Fig. 4, 5 et 6: domaine initial symétrique relativement aux axes Ox et Oy; prenons $u_1 > 0$:

$$\sqrt{2}\,\tilde{u}_1(x, y) = \begin{cases} |u_1(x, y) - u_1(-x, y)| \text{ pour } y \geqslant 0; \\ u_1(x, y) + u_1(-x, y) \text{ pour } y \leqslant 0; \end{cases}$$
et $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1$.

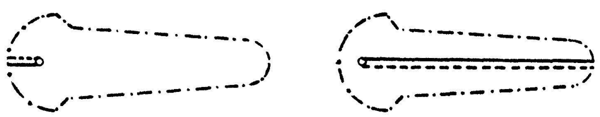

Fig.7a: moitié de S_2 Fig.7b: moitié de $\tilde{S}_2$

Fig. 7: domaine initial symétrique relativement à l'axe Ox;

$$\sqrt{2}\,\tilde{u}_1(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) - u_1(x, -y) \text{ pour } y > 0; \\ u_1(x, y) + u_1(x, -y) \text{ pour } y < 0; \end{cases}$$
et $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1$.

§ 6. Exemples de problèmes globaux équivalents

Chacune des figures 8 *à* 11 *indique une famille de membranes qui ont,* par (10), *même première valeur propre* λ_1 *et,* de plus, *des fonctions propres fondamentales en relation simple,* cf. (8).

Les problèmes aux valeurs propres dans S_N et dans $\tilde{S}_N$ ne diffèrent qu'en ce qui concerne les valeurs propres et fonctions propres «locales», c'est-à-dire celles des cellules S_1 et $\tilde{S}_1$; on prendra garde cependant que, par exemple, les fonctions propres *supérieures* de la figure 8b ne sont *pas* toutes fonctions propres de 8a, etc.

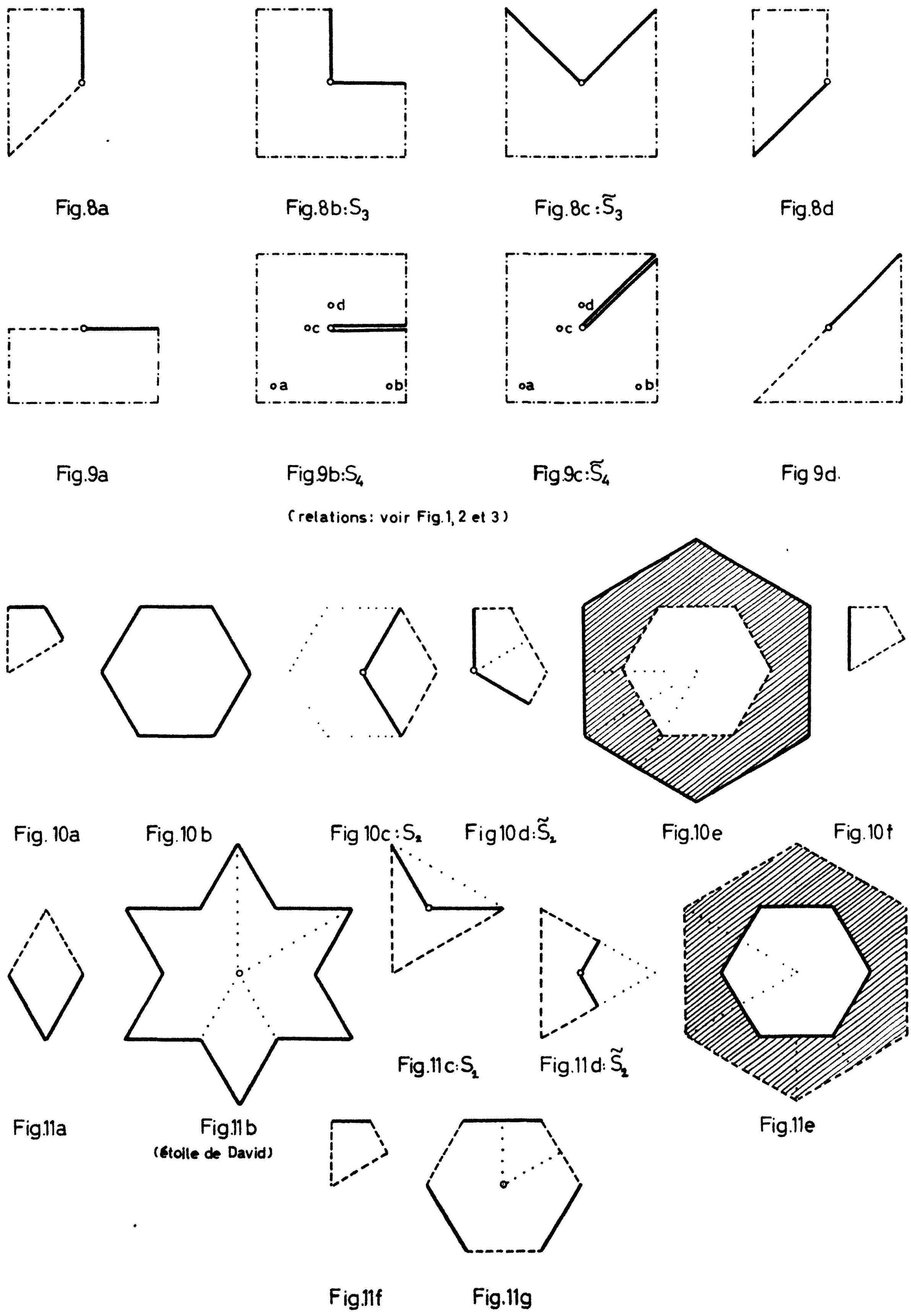

Fig.8a
Fig.8b: S_3
Fig.8c: $\tilde{S}_3$
Fig.8d
od
oc
oa
ob
Fig.9a
Fig.9b: S_4
Fig.9c: $\tilde{S}_4$
Fig 9d.
(relations: voir Fig.1, 2 et 3)
Fig. 10a
Fig.10 b
Fig 10c: S_2
Fig10d: $\tilde{S}_2$
Fig.10e
Fig.10f
Fig.11a
Fig.11 b
(étoile de David)
Fig.11c: S_2
Fig.11d: $\tilde{S}_2$
Fig.11e
Fig.11f
Fig.11g

Fig. 8–11.

Les figures 8(b, c) et 9(b, c) étendent l'égalité bien connue entre les valeurs propres fondamentales du demi-carré rectangulaire et du demi-carré triangulaire.

On remarque une certaine «complémentarité» entre les figures 10 et les figures 11.

§ 7. Equations de Sturm-Liouville à coefficients périodiques

Les §§ 2, 3 et 4 s'appliquent également aux équations de Sturm-Liouville à coefficients périodiques (période Ω) et «symétriques», si les conditions aux limites sont $u(x_0)=u(x_0+N\Omega)=0$. – On pourrait utiliser ici la *théorie de Floquet*, qui repose sur une discussion de la *solution générale* de l'équation différentielle (combinaison linéaire de deux solutions indépendantes); cette théorie ne s'applique pas directement aux problèmes à plusieurs dimensions, la solution générale étant trop vaste.

Il est particulièrement facile d'illustrer les §§ 2, 3 et 4 par l'*exemple* simple d'une corde vibrante à masses ponctuelles égales et équidistantes:

$$u''+\lambda\varrho(x)u=0,$$

masse «spécifique» $\quad \varrho=\delta_0+\delta_\Omega+\delta_{-\Omega}+\delta_{2\Omega}+\dots \quad$ (somme de mesures deDirac).

On vérifie que certaines des relations valables pour la corde homogène, restent valables pour la corde inhomogène de masse spécifique périodique.

Illustrons ici le § 4 *par le cas* $N=2$:

intervalle S_2: $0<x<2\Omega$ contenant une seule masse; $u(0)=u(2\Omega)=0$;

$$u_1(x)=\begin{cases} x & \text{pour} \quad 0\leq x\leq \Omega \\ 2\Omega-x & \text{pour} \quad \Omega\leq x\leq 2\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda_1=2/\Omega\,;$$

intervalle complémentaire $\tilde{S}_2$: $\Omega/2<x<5\Omega/2$ contenant deux masses; $\tilde{u}(\Omega/2)=\tilde{u}(5\Omega/2)=0$;

$$\tilde{u}_1(x)=u_1(x-\Omega)+u_1(x)=$$
$$\begin{cases} (x-\Omega)+x=2x-\Omega & \text{pour} \quad \Omega/2\leq x\leq \Omega\,; \\ (x-\Omega)+(2\Omega-x)=\Omega & \text{pour} \quad \Omega\leq x\leq 2\Omega\,; \\ (3\Omega-x)+(2\Omega-x)=5\Omega-2x & \text{pour} \quad 2\Omega\leq x\leq 5\Omega/2\,; \end{cases}$$

et $\tilde{\lambda}_1=2/\Omega=\lambda_1$.

Nous remarquons qu'ici λ_2 est infini, mais non pas $\tilde{\lambda}_2$; cela est dû (cf. 4.1) au fait que $\tilde{u}_2$ est déjà fonction propre de la cellule $\tilde{S}_1$.

§ 8. Remarques finales

(a) Les relations obtenues aux §§ 2 et 3 permettent de réduire de façon essentielle le nombre des inconnues, donc l'ordre du déterminant séculaire, dans un *calcul numé-*

rique à l'aide de différences finies (un raisonnement analogue s'applique): *seules demeurent les inconnues situées dans une cellule!*

Contrairement aux relations (valables pour une classe plus étendue de domaines) obtenues dans [1], nos présentes relations seront d'autant plus utiles que le nombre N de cellules sera plus grand.

(b) Des raisonnements analogues peuvent s'appliquer à l'étude des fonctions propres d'une équation de Schrödinger à coefficients périodiques dans un domaine fini; à certains problèmes aux limites; ainsi qu'à des problèmes globaux discrets présentant un caractère périodique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. HERSCH, *Erweiterte Symmetrieeigenschaften von Lösungen gewisser linearer Rand- und Eigenwertprobleme.* J. reine angew. Math., *218* (1965), 143–158.

[2] G. PÓLYA, *On the characteristic frequencies of a symmetric membrane.* Math. Zeitschr., *63* (1955), 331–337.

Reçu le 6 juin 1966