Extremallängen und eine konform invariante Maßfunktion für Kurvenscharen.

Extremallängen und eine konform invariante Maßfunktion für Kurvenscharen

H. RENGGLI

§ 1. Einleitung

1. Der von L. AHLFORS und A. BEURLING [1] eingeführte Begriff der Extremallänge spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der konformen wie auch der quasikonformen Abbildungen. Die Extremallänge ist eine reellwertige, nicht negative Funktion, definiert auf der Menge der Kurvenscharen bezüglich einer Riemannschen Fläche. Ferner ist sie konform invariant.

Für unsern Zweck ist es von Vorteil, nicht mit der Extremallänge, sondern mit der reziproken Funktion, die wir mit μ bezeichnen, zu arbeiten. μ ist dann nämlich monoton (Satz 1) und vollständig subadditiv (Satz 3), folglich eine Maßfunktion (Theorem 1). Auch werden wir uns, vor allem aus Gründen der Darstellung, auf die bezüglich der Ebene definierten Kurven beschränken.

Wir verwenden den Begriff der Maßfunktion, wie er auf den Arbeiten von C. CARATHÉODORY aufbauend von H. HAHN rein mengentheoretisch gefasst wurde, und wie er in H. HAHN und A. ROSENTHAL ([2], § 6.1) dargestellt ist.

2. Es stellt sich nun die Frage, welche Mengen bzw. welche Kurvenscharen bezüglich μ messbar sind. Wir zeigen in dieser Arbeit, dass jede Kurvenschar Γ, für die $0<\mu(\Gamma)<\infty$ gilt, nicht messbar ist (Theorem 2').

Dieses Resultat hängt natürlich eng mit den Additivitätseigenschaften von μ zusammen. Ist nämlich eine Maßfunktion additiv, so ist jede Menge messbar; umgekehrt bilden die μ-messbaren Mengen eine σ-Algebra, auf der μ vollständig additiv ist. Um also nicht messbare Mengen zu finden, müssen Eigenschaften der Funktion μ ausfindig gemacht werden, die die Additivität verletzen. Unser Resultat beruht deshalb wesentlich auf einer gewissen Absorptionseigenschaft der Funktion μ (Satz 6).

Trotzdem können wir zeigen, dass in gewissen Fällen die Funktion μ sich vollständig additiv verhält (Satz 4). Auch lösen wir das Additivitätsproblem für eine spezielle Klasse von Kurvenscharen (Definition 2 und Satz 5). Ferner möchten wir bemerken, dass Satz 3 schon von M. OHTSUKA [3] benutzt und bewiesen worden ist, während Satz 4 eine Verschärfung von Lemma 1 in [4] darstellt.

3. Die Einführung der Funktion μ mag auch sonst gewisse Vorteile bieten. In vielen Anwendungen kommt es nämlich vor, dass man die Kurvenscharen mit unendlicher Extremallänge vernachlässigt. In unserer Auffassung heisst das einfach, dass eine Menge vom Maß Null nicht berücksichtigt wird.

Zur Erleichterung der Lesbarkeit dieser Arbeit stellen wir zuerst die von uns benutzten elementaren Eigenschaften der Extremallänge in der sich für die Funktion μ ergebenden Form kurz zusammen. Da wir mit den Kurvenscharen mengentheoretische Operationen ausführen, fanden wir es auch für nötig, den von uns verwendeten Kurvenbegriff zu präzisieren.

§ 2. Die Mengenfunktion μ

1. Einen Punkt der euklidischen Ebene E bezeichnen wir entweder durch die beiden reellen Koordinaten (x, y) oder durch die eine komplexe Koordinate z. Unter einer Kurve γ verstehen wir eine Abbildung $\gamma(t)=\{x(t), y(t)\}$ entweder des offenen Intervalls $I=\{t$ reell: $0<t<1\}$ oder des abgeschlossenen Intervalls $I^*=\{t$ reell: $0\leq t\leq 1\}$ in E, wobei $\gamma(t)$ lokal ein-eindeutig und stetig ist und im zweiten Fall $\gamma(0)=\gamma(1)$ gilt.

Im Falle $\gamma: I\to E$ betrachten wir zwei Kurven $\gamma(t)$ und $\gamma^*(\tau)$ als gleich, falls eine ein-eindeutige und stetige Abbildung $t(\tau)$ von I auf I existiert, so dass $\gamma(t(\tau))=\gamma^*(\tau)$ für jedes τ, $\tau\in I$. Die Gleichheitsdefinition für geschlossene Kurven ist analog. Zusätzlich zur üblichen Äquivalenzrelation für orientierte Kurven fügen wir also hinzu, dass auch entgegengesetzt durchlaufene Kurven äquivalent sind.

Mit Γ bezeichnen wir eine Menge von Kurven γ. Die von den Kurven γ, $\gamma\in\Gamma$, in E überdeckte Punktmenge wird der Träger von Γ genannt und mit G notiert.

2. Sei ϱ eine in E definierte, erweitert reellwertige Funktion, die nicht negativ ist. In jedem Punkte ist durch $\varrho(z)|dz|$ ein konform invariantes Differential und damit eine sogenannte konforme Metrik definiert.

Falls $\iint_E \varrho^2$ im Lebesgueschen Sinne existiert, so bezeichne $F(\varrho)$ dieses Integral. Wir treffen hier und im folgenden die Verabredung, dass Operationen wie Quotienten oder Integrale dann den Wert ∞ haben sollen, falls sie nicht definiert sind. Ferner sei $F(G;\varrho)$ das über eine messbare Punktmenge G, $G\subset E$, erstreckte Integral $\iint_G \varrho^2$.

Unter der ϱ-Länge $l_\gamma(\varrho)$ einer Kurve γ verstehen wir das Integral $\int_\gamma \varrho\, ds$, das für rektifizierbare Kurven als Lebesguesches Integral über die Kurvenlänge erklärt wird. Es kann in naheliegender Weise auf lokal rektifizierbare Kurven verallgemeinert werden. $L(\Gamma;\varrho)=\inf_\Gamma l_\gamma(\varrho)$ ist die sogenannte Minimallänge der Schar Γ bezüglich der durch ϱ definierten konformen Metrik.

Nun werde jeder Kurvenschar Γ eine erweiterte reelle Zahl $\mu(\Gamma)$ zugeordnet durch

Definition 1.

$$\mu(\Gamma)=\inf_{\varrho}\frac{F(\varrho)}{L^2(\Gamma;\varrho)}.$$

Eine Funktion ϱ wird Extremalmetrik genannt und durch P bezeichnet, falls $\mu(\Gamma)=F(P)/L^2(\Gamma;P)$ gilt.

Unter Benutzung unserer Konvention ergibt sich leicht die folgende äquivalente

DEFINITION 1'. *$\mu(\Gamma)=\inf_\varrho F(\varrho)$, wobei nur solche ϱ zulässig sind, für die $L(\Gamma;\varrho)\geq 1$ gilt.*

Die Funktion μ ist in dem Sinne konform invariant, dass sie einer Schar Γ und ihrem konformen Bild Γ' dieselbe Zahl zuordnet.

3. Unmittelbar ergibt sich

SATZ 1. *Für jede Schar Γ gilt $0\leq\mu(\Gamma)\leq\infty$. Ist $\Gamma^*\subset\Gamma$, so folgt $\mu(\Gamma^*)\leq\mu(\Gamma)$.*

Ferner benötigen wir

SATZ 2. *Sei $R=\{(x,y):0<x<a, 0<y<b\}$ und S eine Teilmenge des Intervalls $I=\{x$ reell: $0<x<a\}$. Die Kurvenschar Γ sei wie folgt erklärt: $\gamma\in\Gamma$ falls $x\in S$ und $\gamma(t)=\{x, bt\}, 0<t<1$.*

Dann gilt $\mu(\Gamma)=m^*S/b$, wobei m^*S das äussere Lebesguesche Maß von S bezeichnet.

Beweis. Sei M messbar und $S\subset M\subset I$. Sei K diejenige Teilmenge von R, deren Projektion M ist. Wir beschränken ϱ auf die messbare Menge K und setzen dort $\varrho(z)=1/b$. Dann gelten $L(\Gamma;\varrho)=1$ und $\mu(\Gamma)\leq F(K;\varrho)=mM/b$, also $\mu(\Gamma)\leq m^*S/b$.

Infolge $\mu(\Gamma)<\infty$ gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine auf R beschränkte, durch ϱ gegebene konforme Metrik, so dass $L(\Gamma;\varrho)\geq 1$ und $F(R;\varrho)<\mu(\Gamma)+\varepsilon$ gelten. Unter Benutzung des Satzes von FUBINI und der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$1\leq\left(\int_0^b \varrho(x,y)\,dy\right)^2\leq b\int_0^b \varrho^2(x,y)\,dy$$

fast überall auf S. Sei unter Beachtung unserer Konvention f auf I durch $f(x)=\int_0^b\varrho^2(x,y)\,dy$ definiert. Bezeichnet M, $M\subset I$, diejenige Punktmenge, auf der $f(x)\geq 1/b$ ist, so gilt $S\subset M$ und M ist messbar. Somit folgen

$$\frac{1}{b}m^*S\leq\frac{1}{b}mM\leq\int_M f\leq F(R;\varrho)<\mu(\Gamma)+\varepsilon, \quad \text{also} \quad \frac{1}{b}m^*S\leq\mu(\Gamma).$$

§ 3. Einige Eigenschaften der Funktion μ

1. Als erste Eigenschaft wird gezeigt, dass die Mengenfunktion μ vollständig subadditiv ist.

SATZ 3. *Es seien Γ_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ abzählbar viele Kurvenscharen. Dann gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(\Gamma_i).$$

Beweis. Sei $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$. Ist $\mu(\Gamma_i) = \infty$ für mindestens eine Schar, so gilt Satz 3 trivialerweise. Es seien also alle $\mu(\Gamma_i)$ endlich. Gemäss Definition 1′ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem Index i eine durch ϱ_i definierte konforme Metrik, so dass $L(\Gamma_i; \varrho_i) \geq 1$ und $F(\varrho_i) < \mu(\Gamma_i) + \varepsilon/2^i$ gelten. Sei $\varrho(z) = \sup_i \varrho_i(z)$. Offenbar gilt $\varrho^2(z) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i^2(z)$. Damit ergeben sich $L(\Gamma; \varrho) \geq 1$ und $F(\varrho) \leq \sum_{i=1}^{\infty} F(\varrho_i)$, woraus nach Definition 1′ die Ungleichung

$$\mu(\Gamma) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Gamma_i) + \varepsilon$$

folgt.

2. Als zweite Eigenschaft wird gezeigt, dass die Mengenfunktion μ in gewissen Fällen vollständig additiv ist.

SATZ 4. *Es seien Γ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ abzählbar viele Kurvenscharen. Sind die Träger G_i der Scharen Γ_i derart in messbaren Mengen G_i^* enthalten, dass die Mengen $G_i^* \cap G_j^*$ für $i \neq j$ Flächenmaß Null haben, so gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Gamma_i).$$

Beweis. Sei $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$. Für $\mu(\Gamma) = \infty$ folgt Satz 4 aus Satz 3. Ist aber $\mu(\Gamma)$ endlich, so gibt es nach Definition 1′ zu jedem $\varepsilon > 0$ eine durch ϱ gegebene konforme Metrik, so dass $L(\Gamma; \varrho) \geq 1$ und $F(\varrho) < \mu(\Gamma) + \varepsilon$ gelten. Sei ϱ_i die auf G_i^* beschränkte Funktion ϱ. Da die $G_i^* \cap G_j^*$ für $i \neq j$ Flächenmaß Null besitzen, ergibt sich $\sum_{i=1}^{\infty} F(G_i^*; \varrho_i) \leq F(\varrho)$. Ferner ist $L(\Gamma_i; \varrho_i) \geq 1$ für jedes i. Somit folgt $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Gamma_i) < \mu(\Gamma) + \varepsilon$, was vereint mit Satz 3 das gewünschte Resultat liefert.

3. Wir geben zuerst die Definition der sogenannten regulären Kurvenscharen. Dann lösen wir für diese das Problem der vollständigen Additivität.

DEFINITION 2. *Eine Kurvenschar Γ werde regulär genannt, falls $0 < \mu(\Gamma) < \infty$ ist und auf dem als messbar vorausgesetzten Träger G von Γ eine Extremalmetrik P existiert, die dort fast überall positiv ist.*

SATZ 5. *Es seien Γ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ abzählbar viele reguläre Kurvenscharen, für die $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Gamma_i)$ endlich ist. Dann und nur dann gilt $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Gamma_i)$, falls die Mengen $G_i \cap G_j$ für $i \neq j$ Flächenmaß Null besitzen. Überdies ist dann auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ regulär.*

Beweis. Sei $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$. Aus der Regularität folgt leicht, dass auch solche Extremalmetriken P_i existieren, die ausserhalb G_i Null und in G_i f.ü. positiv sind und für die $L(\Gamma_i; P_i) = 1$ sowie $\mu(\Gamma_i) = F(P_i)$ gelten. Sei $P(z) = \sup_i P_i(z)$. Analog dem Beweise von Satz 3 folgen $L(\Gamma; P) \geq 1$ sowie $\mu(\Gamma) \leq F(P) \leq \sum_{i=1}^{\infty} F(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Gamma_i)$.

Da die letztere Summe nach Voraussetzung endlich ist, sind $\sum_{i=1}^{\infty} P_i^2$ und P^2 f.ü. endlich. Gilt nun $\mu(\Gamma)=\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Gamma_i)$, so ist infolge $F(P)=\sum_{i=1}^{\infty} F(P_i)$ die f.ü. definierte, nicht negative Funktion $f=[\sum_{i=1}^{\infty} P_i^2]-P^2$ f.ü. Null. Da aber P_i in G_i f.ü. positiv ist, muss offenbar auch f in $G_i \cap G_j$ für $i \neq j$ f.ü. positiv sein. Folglich haben alle $G_i \cap G_j$ für $i \neq j$ Flächenmaß Null. Dies, vereint mit Satz 4, ergibt Satz 5. Dass in beiden Fällen Γ regulär ist, folgt unmittelbar.

KOROLLAR 1. *Es seien Γ_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ abzählbar viele reguläre Kurvenscharen, für die $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Gamma_i)$ endlich ist. Hat mindestens eine Menge $G_i \cap G_j$ für $i \neq j$ positives Maß, so gilt $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Gamma_i)$.*

BEMERKUNG 1. *Die Beweise der Sätze 3, 4 und 5 bleiben mutatis mutandis richtig für endlich viele Kurvenscharen. Folglich gelten diese Sätze und auch Korollar 1 analog für endlich viele Kurvenscharen Γ_i.*

4. Der folgende Satz zeigt eine gewisse Absorptionseigenschaft von μ; m.a.W. zu jeder Schar Γ mit beschränktem Träger G und endlichem $\mu(\Gamma)$ gibt es eine Schar Δ, so dass $\mu(\Delta \cup \Gamma)$ beliebig nahe bei $\mu(\Delta)$ ist.

DEFINITION 3. *Sei $R=\{(x, y): a<x<b,\ c<y<d\}$ ein Rechtecksgebiet und $\delta=(d-c)/n$, wobei n eine natürliche Zahl ist.*

Die Kurvenschar Δ ist wie folgt erklärt: $\gamma \in \Delta$ falls $a<x<b$; $v=1, 2, \ldots, n$ und $\gamma(t)=\{x, c+(v-1)\delta+\delta t\}$, $0<t<1$.

Das Rechtecksgebiet R sei also durch $n-1$ horizontale Linien in n gleich grosse Teilrechtecke unterteilt. Die Kurvenschar Δ besteht nun aus allen vertikalen Segmenten, die in den einzelnen Teilrechtecken die horizontal gelegenen Seiten verbinden.

SATZ 6. *Es sei der Träger G der Kurvenschar Γ beschränkt und $\mu(\Gamma)<\infty$. Sei R ein Rechtecksgebiet mit $G \subset R$ und Δ eine gemäss Definition 3 erklärte Schar.*

Dann gibt es bei festem R zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta^*>0$, so dass für jedes Δ mit $\delta<\delta^*$ die Ungleichungen $\mu(\Delta) \leq \mu(\Delta \cup \Gamma) < \mu(\Delta)+\varepsilon$ gelten.

Beweis. Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert eine auf R beschränkte, durch ϱ gegebene konforme Metrik, so dass $L(\Gamma; \varrho) \geq 1$ und $F(R; \varrho) < \mu(\Gamma)+\varepsilon/2$ gelten. Sei ϱ_N durch $\varrho_N(z)=\min[N, \varrho(z)]$ in R definiert, und N derart gewählt, dass $F(R; \varrho)-\varepsilon/2< F(R; \varrho_N)$ gilt. Sei $\delta^*=1/N$ und Δ eine in R definierte Schar mit $\delta<\delta^*$. Nun ist für die in R durch $P(z)=1/\delta$ definierte Metrik $L(\Delta; P)=1$ sowie $\mu(\Delta)=F(R; P)$. Seien ϱ^* und ϱ_* in R durch $\varrho^*(z)=\max[\varrho(z), P(z)]$ bzw. $\varrho_*(z)=\min[\varrho(z), P(z)]$ erklärt. Dann folgen bezüglich $\Delta \cup \Gamma$ die Beziehungen $L(\Delta \cup \Gamma; \varrho^*) \geq 1$ und $\mu(\Delta \cup \Gamma) \leq F(R; \varrho^*)$. Überdies ist $\varrho_*^2+\varrho^{*2}=P^2+\varrho^2$ und $\varrho_* \geq \varrho_N$. Demnach ergeben sich

$$\mu(\Delta \cup \Gamma) \leq F(R; \varrho^*) \leq F(R; P)+F(R; \varrho) < \mu(\Delta)+\mu(\Gamma)+\frac{\varepsilon}{2}$$

und also

$$\mu(\Delta)+\mu(\Gamma)+\frac{\varepsilon}{2}-\mu(\Delta\cup\Gamma)>F(R;P)+F(R;\varrho)-F(R;\varrho^*)$$
$$=F(R;\varrho_*)\geq F(R;\varrho_N)>F(R;\varrho)-\frac{\varepsilon}{2}\geq\mu(\Gamma)-\frac{\varepsilon}{2},$$

woraus

$$\mu(\Delta)+\varepsilon>\mu(\Delta\cup\Gamma)$$

folgt. Dies, vereint mit Satz 1, ergibt Satz 6.

§ 4. Die Funktion μ als Maßfunktion

1. Jeder Kurvenschar Γ wurde in Definition 1 eine nicht negative, erweiterte reelle Zahl zugeordnet. Damit ist auf der Menge der Kurvenscharen eine Mengenfunktion μ definiert. Bezeichnet Ω die Menge aller zulässigen Kurven, so kann μ also auf der Menge der Teilmengen von Ω erklärt werden. Dabei sei $\mu(\phi)=0$. Satz 1 bedeutet nun einfach, dass μ auf der Menge aller Teilmengen von Ω monoton zunehmend ist. Ferner is μ vollständig subadditiv gemäss Satz 3. Somit gilt

THEOREM 1. *Die Mengenfunktion μ, definiert auf der Menge der Kurvenscharen, ist eine Maßfunktion.*

Wir können demnach die allgemeine Theorie der Maßfunktionen anwenden ([2], § 6.1). Speziell sind die Scharen Γ mit $\mu(\Gamma)=0$ messbar bezüglich μ. Dagegen werden wir zeigen, dass alle andern Scharen mit endlichem $\mu(\Gamma)$ nicht messbar sind.

2. Wir werden dieses Resultat zuerst für Scharen mit beschränktem Träger beweisen. Dazu benötigen wir einen Hilfssatz (Lemma 1).

Es seien θ und Γ zwei Kurvenscharen. Ist zusätzlich Γ messbar bezüglich der Maßfunktion μ, so folgen

$$\mu(\theta\cup\Gamma)=\mu(\Gamma)+\mu(\theta-\Gamma),$$
$$\mu(\theta)=\mu(\theta\cap\Gamma)+\mu(\theta-\Gamma),$$

also

$$\mu(\Gamma)+\mu(\theta)=\mu(\theta\cap\Gamma)+\mu(\theta\cup\Gamma).$$

Diese Beziehung zusammen mit Satz 6 ergibt

LEMMA 1. *Es sei der Träger G der Kurvenschar Γ beschränkt, es sei $\mu(\Gamma)<\infty$ und Γ sei messbar in bezug auf μ. Sei R ein Rechtecksgebiet mit $G\subset R$ und Δ eine gemäss Definition 3 erklärte Schar.*

Dann gibt es bei festem R zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta^*>0$, so dass für jedes Δ mit $\delta<\delta^*$ die Ungleichung

$$\mu(\Gamma)<\mu(\Delta\cap\Gamma)+\varepsilon$$

gilt.

Existierte nun ein den Voraussetzungen von Lemma 1 genügendes Γ mit $\mu(\Gamma)>0$, so ergäbe sich für $\varepsilon<\mu(\Gamma)$ die Ungleichung $\mu(\Delta\cap\Gamma)>0$, also wäre im besondern $\Delta\cap\Gamma\neq\emptyset$.

3. Wir beweisen jetzt

THEOREM 2. *Sei Γ eine Schar mit beschränktem Träger G. Gilt $0<\mu(\Gamma)<\infty$, so ist Γ nicht messbar bezüglich μ.*

Beweis. Sei Γ messbar bezüglich μ, sei $\mu(\Gamma)<\infty$ und der Träger G von Γ beschränkt. Nach Lemma 1 existiert zu jedem $\varepsilon>0$ eine Schar Δ, so dass $\mu(\Gamma)<\mu(\Delta\cap\Gamma)+\varepsilon/4$ gilt. Sei Δ' diejenige Schar, die der Zahl $\delta/2$ entspricht, also durch Unterteilung aus Δ hervorgeht. Analog folgt $\mu(\Gamma)<\mu(\Delta'\cap\Gamma)+\varepsilon/4$.

Um Satz 2 auf die Scharen $\Delta\cap\Gamma$ und $\Delta'\cap\Gamma$ anzuwenden, ordnen wir jeder gemäss Definition 3 gegebenen Kurve $\gamma(t)$ von $\Delta\cap\Gamma$ bzw. $\Delta'\cap\Gamma$ den Punkt $\gamma(0)$ zu und bezeichnen mit S bzw. S' die aus diesen Punkten bestehenden Mengen. S bzw. S' sind demnach die Vereinigungsmengen der vertikalen Projektionen von $\Delta\cap\Gamma$ bzw. $\Delta'\cup\Gamma$ in den einzelnen Teilrechtecken der Höhe δ bzw. der Höhe $\delta/2$. Nun lässt sich Satz 2 auf diesen Fall verallgemeinern. Damit ergibt sich $\mu(\Delta\cap\Gamma)=m^*S/\delta$ bzw. $\mu(\Delta'\cup\Gamma)=m^*S'\,2/\delta$. Sei analog des Beweises von Satz 2 die Menge M derart gewählt, dass M aus messbaren linearen Teilmengen besteht und $S'\subset M$ sowie $m\,M<m^*S'+\varepsilon\,\delta/8$ gelten. Es bezeichne K die Vereinigungsmenge aller Punkte in den einzelnen Teilrechtecken der Höhe $\delta/2$, die sich dort vertikal auf die betreffenden Teilmengen von M projizieren. Somit liegt die Schar $\Delta'\cap\Gamma$ in der messbaren Menge K.

Sei Ξ diejenige Teilmenge von $\Delta\cap\Gamma$, deren Kurven in $R-K$ liegen. Unter Anwendung von Satz 2 ist nun leicht zu sehen, dass die Abschätzung $[m^*S-m\,M]/\delta\leq\mu(\Xi)$ gilt. Mit den obigen Beziehungen folgt daraus

$$\mu(\Delta\cap\Gamma)-\tfrac{1}{2}\mu(\Delta'\cap\Gamma)-\frac{\varepsilon}{8}<\mu(\Xi).$$

Auf die in K bzw. $R-K$ gelegenen Scharen $\Delta'\cap\Gamma$ und Ξ können wir Satz 4 und Bemerkung 1 anwenden. Dies zusammen mit Satz 1 ergibt

$$\mu(\Xi)+\mu(\Delta'\cap\Gamma)=\mu(\Xi\cup(\Delta'\cap\Gamma))\leq\mu(\Gamma),$$

woraus man mit Hilfe der obigen Beziehungen

$$\mu(\Gamma)<\varepsilon$$

folgert.

4. Für den allgemeinen Fall müssen wir zuerst Satz 6 auf den Fall unbeschränkter Träger verallgemeinern. Dazu bilden wir das Innere des Einheitskreises konform auf ein Rechtecksgebiet R_1 und das Äussere des Einheitskreises bezüglich der Riemann-

schen Zahlenkugel konform auf ein Rechtecksgebiet R_2 ab, wobei $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ angenommen wird. Da μ konform invariant ist, können wir in $R_1 \cup R_2$ rechnen, wobei auf dem Einheitskreis $\varrho(z) = \infty$ für jede Metrik ϱ gesetzt werde. Für jene in R_2 zu betrachtenden Scharen Δ müssen wir jeweilen diejenigen Segmente weglassen, die eventuell das Bild des Punktes ∞ enthalten. Im übrigen lässt sich der Beweis von Satz 6 für $R_1 \cup R_2$ wiederholen. Man gelangt – nur $\mu(\Gamma) < \infty$ voraussetzend – durch konforme Übertragung zu einer in der Ebene gelegenen Kurvenschar Δ, für die die Ungleichungen von Satz 6 gültig bleiben.

Lemma 1 lässt sich dann sofort für messbare Scharen Γ mit $\mu(\Gamma) < \infty$ formulieren. Was den Beweis von Theorem 2 anbelangt, hat man nur die dortigen Überlegungen in den oben definierten Rechtecksgebieten R_1 und R_2 durchzuführen. Somit folgt

THEOREM 2'. *Sei Γ eine Kurvenschar. Gilt $0 < \mu(\Gamma) < \infty$, so ist Γ nicht messbar bezüglich μ.*

5. Was die Scharen Γ mit $\mu(\Gamma) = \infty$ anbelangt, so gibt es sowohl solche, die messbar, wie auch solche, die nicht messbar sind. Bezeichnen wir wieder mit Ω die Menge der zulässigen Kurven, so gelten

SATZ 7. a) *Ist Γ eine Schar mit $\mu(\Gamma) = 0$, so ist $\Omega - \Gamma$ messbar bezüglich μ.*

b) *Ist Γ eine Schar mit $0 < \mu(\Gamma) < \infty$, so ist $\Omega - \Gamma$ nicht messbar bezüglich μ.*

c) *Ist Γ eine Schar, so dass für jedes $\Gamma' \subset \Gamma$ entweder $\mu(\Gamma') = 0$ oder $\mu(\Gamma') = \infty$ gilt, so ist Γ messbar bezüglich μ.*

Beweis. a) Die Gesamtmenge Ω wie auch die Differenz zweier messbarer Mengen sind natürlich messbar.

b) Wäre nämlich $\Omega - \Gamma$ messbar, so auch die Differenz $\Omega - (\Omega - \Gamma) = \Gamma$, in Widerspruch zu Theorem 2'.

c) Sei θ eine Testschar für die Messbarkeitsbedingung. Dann gilt infolge der Voraussetzung entweder $\mu(\theta \cap \Gamma) = 0$ oder $\mu(\theta \cap \Gamma) = \infty$. Im ersten Fall ergibt sich $\mu(\theta - \Gamma) = \mu(\theta)$, und somit ist die Messbarkeitsbedingung erfüllt. Im zweiten Fall folgt sie aber sofort aus der Ungleichung $\mu(\theta \cap \Gamma) \leq \mu(\theta)$.

LITERATUR

[1] L. AHLFORS und A. BEURLING, *Conformal Invariants and Function-Theoretic Null-Sets*, Acta Math. *83* (1950), 101–129.

[2] H. HAHN and A. ROSENTHAL, *Set Functions* (The University of New Mexico Press 1948).

[3] M. OHTSUKA, *Extremal Length of Families of Parallel Segments*, J. Sc. Hiroshima Univ. [Ser. A] *28* (1964), 39–51.

[4] H. RENGGLI, *Quasiconformal Mappings and Extremal Lengths*, Amer. J. Math. *86* (1964), 63–69.

(Eingegangen den 14.8.1965.)

University of New Mexico.
Albuquerque, New Mex., USA.