

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1968)

Artikel: Kompakte Limesräume und limitierte Funktionenalgebren.
Autor: Binz, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32916>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 11.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kompakte Limesräume und limitierte Funktionenalgebren

E. BINZ

Einleitung

Es bezeichne X einen Limesraum (s. [7]). Die \mathfrak{R} -Algebra aller stetigen Funktionen von X nach dem Körper der reellen Zahlen \mathfrak{R} heiße $\mathcal{C}(X)$. In [2] wurden einige Bemerkungen zur Korrespondenz zwischen X und seiner, mit der *Limitierung der stetigen Konvergenz* (s. [1] und [6]) versehenen Funktionenalgebra $\mathcal{C}_c(X)$ zusammengestellt. Dabei wurden dort spezielle Limesräume, nämlich die *c-einbettbaren*, etwas näher betrachtet. Ein *c-einbettbarer* Limesraum Y ist dadurch charakterisiert, dass seine Limitierung durch die limitierte \mathfrak{R} -Algebra (s. [1]) $\mathcal{C}_c(Y)$ bestimmt ist.

Hier nun sollen die Beziehungen zwischen einem *kompakten* Limesraum X und seiner Limesalgebra (ist dasselbe wie limitierte Algebra) $\mathcal{C}_c(X)$ näher untersucht werden (s. Sätze 3, 4, 6, 8 und 9). Wir nennen einen Limesraum *kompakt*, wenn er separiert ist und jeder Ultrafilter konvergiert. Insbesondere soll festgestellt werden, welche der kompakten Limesräume *c-einbettbar* sind (s. Sätze 4 und 9). Es wird sich herausstellen, dass es genau die *topologischen* sind. (Ein Limesraum heißt *topologisch*, falls seine Limitierung eine Topologie ist.) Dass es kompakte Limesräume gibt, die nicht topologisch sind, kann etwa aus [5], Satz 4.12., p. 57 gefolgert werden. Man wähle einen separierten nicht-topologischen Limesraum. Nach dem erwähnten Satze besitzt dieser eine (separierte) Kompaktifizierung. Diese kann aber nicht topologisch sein!

Der von C. H. COOK und H. R. FISCHER in [6] behandelte verallgemeinerte Begriff der *Gleichstetigkeit* und der von denselben Autoren verallgemeinerte Satz von Ascoli (s. [6]) erlauben uns, das angekündigte Vorhaben leicht auszuführen. Die in [6] im Zusammenhang mit den *uniformen Limitierungen* (uniform convergence structures) eingeführten Begriffe werden hier als bekannt vorausgesetzt. Die von uns aus [6] benötigten Terme und Sätze werden in (1.4) und (1.5) kurz zusammengestellt.

1. Vorbemerkungen

In diesem Paragraphen sollen einige später zur Anwendung kommende grundlegende Begriffe und Beziehungen aus [1], [2] und [6] kurz aufgeführt werden.

1.1. Seien A und A' zwei limitierte \mathfrak{R} -Algebren (s. [1]) mit Einselement e und e' resp. Statt von einem *Algebrahomomorphismus* (nicht notwendig stetig) zwischen A und A' (der e in e' überführt) sprechen wir im folgenden kurz von einem *Homomorphismus* zwischen A und A' . Die Menge aller *stetigen* Homomorphismen von A

in A' heisse $\mathcal{H}om(A, A')$. Wenn A' identisch mit \mathfrak{R} ist, so kürzen wir $\mathcal{H}om(A, \mathfrak{R})$ durch $\mathcal{H}om A$ ab. Die Menge *aller* Homomorphismen von A nach \mathfrak{R} heisse $\text{Hom } A$.

Trägt $\mathcal{H}om A$ die *Limitierung der stetigen* resp. *der punktweisen Konvergenz* (s. [1] und [6]), so schreiben wir $\mathcal{H}om_c A$ resp. $\mathcal{H}om_s A$. Letzterer ist ein *vollständig regulärer* (s. [8], p. 36) *topologischer Raum*.

Für jeden Homomorphismus $u \in \mathcal{H}om(A, A')$ ist (falls $\mathcal{H}om A$ und $\mathcal{H}om A'$ nicht leer sind)

$$u^*: \mathcal{H}om_c A' \longrightarrow \mathcal{H}om_c A$$

resp.

$$u^*: \mathcal{H}om_s A' \longrightarrow \mathcal{H}om_s A,$$

definiert durch $u^*(h) = h \circ u$ für jedes $h \in \mathcal{H}om A'$, stetig.

1.2. Seien X und Y Limesräume (s. [1] und [7]). Die Menge der *stetigen* Abbildungen von X nach Y heisse $\mathcal{C}(X, Y)$. Ist diese mit der *Limitierung Λ_c der stetigen* resp. mit der *Limitierung Λ_s der punktweisen Konvergenz* versehen, so setzen wir $\mathcal{C}_c(X, Y)$ resp. $\mathcal{C}_s(X, Y)$. Letzterer ist genau dann *topologisch*, wenn Y topologisch ist. Der Einfachheit halber ersetzen wir das Zeichen $\mathcal{C}(X, \mathfrak{R})$ durch $\mathcal{C}(X)$. Die beiden Räume $\mathcal{C}_c(X)$ und $\mathcal{C}_s(X)$ sind limitierte \mathfrak{R} -Algebren (s. [1]).

Für jedes $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ist die Abbildung

$$f^*: \mathcal{C}_c(Y) \longrightarrow \mathcal{C}_c(X),$$

welche jedes $g \in \mathcal{C}_c(Y)$ in $g \circ f \in \mathcal{C}_c(X)$ überführt, ein stetiger Homomorphismus.

1.3. Jedes Element x aus einem Limesraum X induziert einen stetigen Homomorphismus

$$i_x(x): \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathfrak{R},$$

definiert durch $i_x(x)(f) = f(x)$ für jedes $f \in \mathcal{C}_c(X)$ (s. [2]). Die Abbildung

$$i_x: X \longrightarrow \mathcal{H}om_c \mathcal{C}_c(X)$$

(führt jedes $x \in X$ in $i_x(x)$ über) ist nach [2] ebenfalls stetig. Weil

$$id: \mathcal{H}om_c \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathcal{H}om_s \mathcal{C}_c(X)$$

stetig ist (s. [2]) muss

$$i_x: X \longrightarrow \mathcal{H}om_s \mathcal{C}_c(X)$$

auch stetig sein.

Wie in [2] steht $I(X)$ für $i_x(X) \subset \mathcal{H}om \mathcal{C}_c(X)$. Durch Einführen der Limitierung der stetigen resp. der punktweisen Konvergenz auf $I(X)$ erhält man die Limesräume $I_c(X)$ und $I_s(X)$. Dabei ist $I_s(X)$ als Unterraum von $\mathcal{H}om_s \mathcal{C}_c(X)$ ein *vollständig regulärer topologischer Raum*.

Satz 9 in [2] besagt, dass für jeden Limesraum X

$$id^*: \mathcal{C}(I_s(X)) \longrightarrow \mathcal{C}(I_c(X))$$

ein Isomorphismus ist. Der darauffolgende Satz 10 hält insbesondere fest, dass für jeden Limesraum X

$$i_X^*: \mathcal{C}_c(I_c(X)) \longrightarrow \mathcal{C}_c(X)$$

ein bistetiger Isomorphismus ist. Das gibt Anlass zur folgenden Definition (s. [2]):

DEFINITION 1. Ein Limesraum X heisst *c-einbettbar*, falls $i_X: X \longrightarrow I_c(X)$ ein Homöomorphismus ist. Ein *c-einbettbarer Limesraum* X wird *c-volleinbettbar* genannt, falls $I(X) = \mathcal{H}om \mathcal{C}_c(X)$ gilt.

Sei $\mathcal{C}^o(X)$ die \mathfrak{R} -Algebra aller stetigen, beschränkten Funktionen von X nach \mathfrak{R} .

LEMMA 1. Für einen Limesraum X sei $I_c(X)$ ein kompakter, topologischer Raum. Dann gelten $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}^o(X)$ und $I(X) = \text{Hom } \mathcal{C}^o(X)$.

Der Beweis soll hier nur kurz skizziert werden. Die Voraussetzungen implizieren: $\mathcal{C}(I_c(X)) = \mathcal{C}^o(I_c(X))$ und folglich $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}^o(X)$. Aus 10.5.c, p. 142 in [8] folgert man $I(I_c(X)) = \text{Hom } \mathcal{C}^o(I_c(X))$. Die Abbildung i_X^* induziert eine Bijektion von $I(X)$ auf $I(I_c(X))$, woraus $I(X) = \text{Hom } \mathcal{C}^o(X)$ resultiert.

1.4. C. H. COOK und H. R. FISCHER führten in [6] den Begriff der *uniformen Limitierung* (*uniform convergence structure*) auf einer nicht-leeren Menge $E \times E$ ein. Dieser stellt eine Verallgemeinerung desjenigen der *uniformen Struktur* von BOURBAKI [3] dar. Die Menge E zusammen mit einer uniformen Limitierung heisst *uniformer Limesraum* (*uniform convergence space*). Jede uniforme Limitierung auf $E \times E$ induziert in natürlicher Weise eine Limitierung auf E . Die Menge E versehen mit dieser Limitierung heisse der zum betrachteten uniformen Limesraum *assoziierte Limesraum*. Sowohl den uniformen Limesraum, als auch den dazu assoziierten Limesraum werden wir fortan mit dem selben Symbol bezeichnen.

Für einen Limesraum X und einen uniformen Limesraum Y definierten die oben genannten Autoren auf $\mathcal{C}(X, Y)$ die *Limitierung der uniformen Konvergenz* (*the structure of uniform convergence*, s. [6], p. 98, § 2). Wir bezeichnen diese Limitierung mit Λ_u . Die Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ versehen mit Λ_u heisse $\mathcal{C}_u(X, Y)$. Die Limitierung der uniformen Konvergenz auf $\mathcal{C}(X, Y)$ ist stets *feiner* als die Limitierung der stetigen Konvergenz (s. Theorem 6 in [6])! Sind speziell X ein topologischer und Y ein (im Sinne von [3]) uniformisierbarer Raum, so sind die Limitierung der uniformen Konvergenz und die Topologie der uniformen Konvergenz auf $\mathcal{C}(X, Y)$ identisch!¹⁾

In unseren Betrachtungen in (2.) wird Λ_u stets auf $\mathcal{C}(X)$ definiert sein. Die uniforme Limitierung auf $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ sei stets die von der Addition in \mathfrak{R} erzeugte uniforme Struktur im Sinne von [3].

1.5. Seien X ein Limesraum und Y ein uniformer Limesraum. Die Menge aller Abbildungen von X nach Y sei mit $\mathcal{F}(X, Y)$ bezeichnet. Eine nicht-leere Teilmenge

¹⁾ Die Aussage bleibt auch dann richtig, wenn X durch einen beliebigen Limesraum ersetzt wird.

$H \subset \mathcal{F}(X, Y)$ versehen mit der Limitierung der punktweisen Konvergenz heiße H_s . In [6] findet sich:

DEFINITION 2. *Es bezeichnen X ein Limesraum und Y ein uniformer Limesraum. Eine nicht-leere Teilmenge $H \subset \mathcal{F}(X, Y)$ heißt gleichstetig in $x_0 \in X$, falls*

$$d: X \longrightarrow \mathcal{C}_u(H_s, Y),$$

definiert durch $d(x)(f) = f(x)$ für jedes $x \in X$ und jedes $f \in H_s$, an der Stelle x_0 stetig ist.

H heißt gleichstetig, falls H in jedem $x \in X$ gleichstetig ist.

Wenn $H \subset \mathcal{F}(X, Y)$ gleichstetig ist, so sind alle Funktionen in H stetig, d.h. $H \subset \mathcal{C}(X, Y)$.

Eine nicht-leere Teilmenge $H \subset \mathcal{C}(X, Y)$ versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz sei mit H_c bezeichnet. Sind H_c und H_s vermöge der Identität homöomorph, so drücken wir das oft durch $H_c = H_s$ aus.

LEMMA 2 (COOK und FISCHER). *Seien X ein Limesraum und Y ein uniformer Limesraum. Für eine gleichstetige Teilmenge $H \subset \mathcal{C}(X, Y)$ gilt $H_c = H_s$.*

LEMMA 3 (COOK und FISCHER). *Die Voraussetzungen seien wie in Lemma 2. Eine nicht-leere Teilmenge einer gleichstetigen Menge $M \subset \mathcal{C}(X, Y)$ ist gleichstetig.*

Eine nicht-leere Teilmenge $A \subset Z$ eines Limesraumes Z heißt *relativ kompakt*, falls die Adhärenz (s. [7]) \bar{A} in Z kompakt ist.

SATZ VON ASCOLI (COOK und FISCHER). *Seien X ein Limesraum, Y ein separierter, uniformer Raum (im Sinne von [3]) und $H \subset \mathcal{C}(X, Y)$ eine nicht-leere Teilmenge. Genau dann ist $H \subset \mathcal{C}_c(X, Y)$ relativ kompakt, wenn H gleichstetig ist und*

$$H(x) = \{f(x) \mid f \in H, \quad x \in X \quad \text{fest}\}$$

für jedes $x \in X$ in Y relativ kompakt ist.

Bemerkung: Sei (A, Λ) ein kompakter Unterraum des separierten Limesraumes Z . Dann gilt $A = \bar{A}$. Für jeden separierten Limesraum Y ist $\mathcal{C}_c(X, Y)$ separiert (s. [1]). Folglich ist mit einem kompakten Unterraum $H_c \subset \mathcal{C}_c(X, Y)$ die Menge H *relativ kompakt*.

2. ber kompakte $I_c(X)$

Weil für jeden Limesraum X die Limesalgebren $\mathcal{C}_c(I_c(X))$ und $\mathcal{C}_c(X)$ vermöge i_X^* bistetig isomorph sind, können wir an Stelle von $\mathcal{C}_c(X)$ das Objekt $\mathcal{C}_c(I_c(X))$ untersuchen. Für jeden kompakten Limesraum X ist $I_c(X)$ ebenfalls kompakt. Deshalb versuchen wir in diesem Paragraphen erst Näheres über den kompakten Limesraum

$I_c(X)$ zu erfahren, um später mit Hilfe von $\mathcal{C}_c(I_c(X))$ stärkere Aussagen über $\mathcal{C}_c(X)$ machen zu können.

2.1. Um etwas weitere Aufschlüsse zu erhalten, wählen wir für einen Limesraum X eine Teilmenge $H \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{C}_c(X)$, die $I(X)$ umfasst, und versuchen festzustellen, wie einschränkend die Eigenschaft „kompakt“ für H_c ist. Es sei bemerkt, dass H_s topologisch ist.

Aus dem Satze von Ascoli und der Bemerkung in (1.5.) erhält man:

LEMMA 4. *Wenn H_c kompakt ist, dann ist H gleichstetig.*

Die Lemmata 2 und 4 implizieren:

LEMMA 5. *Wenn H gleichstetig ist, dann gilt $H_c = H_s$. Ist H_c kompakt, so ist er topologisch.*

Mehr über kompakte H_c erfahren wir (s. Satz 3), wenn wir die Beziehung zwischen der Kompaktheit von H_c und der Gleichstetigkeit von H eingehender studieren (s. Satz 1). Dazu benötigen wir die nächsten drei Lemmata.

LEMMA 6. *$H_c = H_s$ impliziert, dass*

$$d: \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathcal{C}_c(H_c),$$

definiert durch $d(f)(h) = h(f)$ für jedes $f \in \mathcal{C}_c(X)$ und jedes $h \in H_c$, ein bistetiger Isomorphismus ist.

Vorerst verifiziert man, dass

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_c(X) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}_c(H_c) \\ & \searrow id & \downarrow i_X^* \\ & & \mathcal{C}_c(X) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm stetiger Abbildungen ist. (Hierin ist i_X aufgefasst als Abbildung von X in H .) Mithin muss d injektiv sein. $\text{Hom}_s \mathcal{C}(X)$ bedeute den topologischen Raum gebildet aus der Menge aller Homomorphismen von $\mathcal{C}(X)$ nach \mathfrak{R} und der Topologie der punktweisen Konvergenz. Aus 11.7. in [8] entnehmen wir, dass $I(X)$ in $\text{Hom}_s \mathcal{C}(X)$ dicht liegt. Das bedeutet, dass $I(X) \subset H_s$ ebenfalls dicht liegt. Weil $H_c = H_s$ vorausgesetzt ist, muss daher i_X^* injektiv sein. Nun ergibt sich aus dem obigen Diagramm leicht die Surjektivität und hernach die Bistetigkeit von d .

LEMMA 7. *Sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum, für den $\mathcal{C}_c(X)$ eine topologische Algebra ist. Dann ist die Limitierung Λ_c auf $\mathcal{C}_c(X)$ die Topologie der kompakten Konvergenz.*

Unter den gemachten Voraussetzungen ist \mathcal{A}_c eine Topologie. Diese ist nach [4], exercice 10c, §3, p. 72 identisch mit der Topologie der kompakten Konvergenz.

LEMMA 8. *Ein vollständig regulärer topologischer Raum X , für den*

$$id: \mathcal{C}_u(X) \longrightarrow \mathcal{C}_c(X)$$

ein Homöomorphismus ist, muss notwendigerweise kompakt sein.

Die Voraussetzungen implizieren: \mathcal{A}_u auf $\mathcal{C}_u(X)$ ist die Topologie der gleichmässigen Konvergenz (s. 1.4) und ist mit der algebraischen Struktur von $\mathcal{C}(X)$ verträglich. Daher ist nach Lemma 7 \mathcal{A}_c die Topologie der kompakten Konvergenz. Wir betrachten die Nullumgebung

$$U = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid |f(x)| \leq 1 \quad \text{für jedes } x \in X\}$$

in $\mathcal{C}_u(X)$. Nach Voraussetzung enthält U eine Nullumgebung der Form

$$V = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid |f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für jedes } x \in K\},$$

wobei $\varepsilon > 0 \in \mathfrak{R}$ und K eine kompakte Menge ist. Wenn nun $K \neq X$ wäre, so gäbe es ein $x \in X$, das nicht in K liegen würde. Nun ist X vollständig regulär und daher findet sich ein $f \in \mathcal{C}(X)$ mit $f(x) = 2$ und $f|_K = 0$. Diese Funktion wäre offensichtlich in V aber nicht in U . Also ist $K = X$.

SATZ 1. *Sei X ein Limesraum. Eine Teilmenge $H \subset \mathcal{H}om \mathcal{C}_c(X)$ mit $H \supset I(X)$ ist genau dann gleichstetig, wenn H_c ein kompakter, topologischer Raum ist.*

Wenn H_c kompakt ist, so ist nach Lemma 4 H gleichstetig. Nun nehmen wir umgekehrt H als gleichstetig an. Dann gelten (s. Definition 2 und Lemma 5):

$$(i) \quad d: \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathcal{C}_u(H_s) \text{ ist stetig.}$$

und

$$(ii) \quad H_c = H_s.$$

Die Limitierung von $\mathcal{C}_u(H_s)$ ist feiner als diejenige von $\mathcal{C}_c(H_s)$ (s. 1.4). Daher folgert man aus (ii) und Lemma 6, dass

$$id: \mathcal{C}_u(H_s) \longrightarrow \mathcal{C}_c(H_c)$$

ein Homöomorphismus ist. Weil der Limesraum H_c wegen (ii) ein vollständig regulärer topologischer Raum ist, muss er nach Lemma 8 kompakt und topologisch sein.

2.2. Sei X ein Limesraum. $\mathcal{C}^0(X)$ bezeichne die \mathfrak{R} -Algebra aller stetigen, beschränkten Funktionen von X nach \mathfrak{R} . Weiter bezeichne $\text{Hom}_s \mathcal{C}^0(X)$ den topologischen Raum, bestehend aus der Menge aller Homomorphismen von $\mathcal{C}^0(X)$ nach \mathfrak{R} und der Topologie der punktweisen Konvergenz.

SATZ 2. *Für jeden Limesraum X ist $\text{Hom}_s \mathcal{C}^0(X)$ kompakt.*

Weil $i_x^*: \mathcal{C}(I_s(X)) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ ein Isomorphismus ist (s. Satz 9 in [2]), sind

$\mathcal{C}^o(I_s(X))$ und $\mathcal{C}^o(X)$ vermöge $i_X^*|\mathcal{C}^o(I_s(X))$ isomorph. Daher sind $\text{Hom}_s \mathcal{C}^o(I_s(X))$ und $\text{Hom}_s \mathcal{C}^o(X)$ homöomorph. Es ist $I_s(X)$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Nach 11.5 und 11.9 in [8] ist $\text{Hom}_s \mathcal{C}^o(I_s(X))$ kompakt. Also ist auch $\text{Hom}_s \mathcal{C}^o(X)$ kompakt.

SATZ 3. *Seien X ein Limesraum und $H \subset \mathcal{H}om \mathcal{C}_c(X)$ eine Teilmenge, welche $I(X)$ umfasst. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) H_c ist kompakt.

(ii) $I_c(X)$ und $\text{Hom}_s \mathcal{C}^o(X)$ sind identisch.

(ii) impliziert nach Satz 2 offensichtlich (i). Umgekehrt sei H_c kompakt. Dann sind H und $I(X)$ gleichstetig (s. Lemmata 4 und 3). Also ist nach Satz 1 der Raum $I_c(X)$ kompakt und nach Lemma 5 gar topologisch. Mit Hilfe von Lemma 1 schliessen wir nun $I_c(X) = \text{Hom}_s \mathcal{C}^o(X)$.

KOROLLAR 1. *Für jeden kompakten Limesraum X ist $I_c(X) = \text{Hom}_s \mathcal{C}(X)$.*

Denn für jeden kompakten Limesraum X ist $I_c(X)$ kompakt und folglich ist die Behauptung nach Satz 3 wahr.

3. Kompaktheit und c -Einbettbarkeit

Hier nun soll angegeben werden, welche der kompakten Limesräume c -einbettbar (s. Definition 1 in (1.3)) sind.

3.1. Ein kompakter, c -einbettbarer Limesraum ist nach Satz 3 topologisch und es gilt $\mathcal{H}om_c \mathcal{C}_c(X) = \text{Hom}_s \mathcal{C}(X)$. Umgekehrt ist jeder kompakte, topologische Raum c -volleinbettbar (s. [2]). Zusammengefasst können wir also sagen:

SATZ 4. *Ein kompakter Limesraum ist genau dann c -einbettbar, wenn er topologisch ist. Jeder kompakte, topologische Raum X ist c -volleinbettbar und es gilt $\mathcal{H}om_c \mathcal{C}_c(X) = \text{Hom}_s \mathcal{C}(X)$.*

Jeder Unterraum eines c -einbettbaren Limesraumes ist c -einbettbar. Also gilt:

SATZ 5. *Jeder kompakte Unterraum eines c -einbettbaren Limesraumes ist topologisch.*

Für jeden Limesraum X ist $\mathcal{C}_c(X)$ c -einbettbar (s. [2]). Folglich ist jeder kompakte Unterraum von $\mathcal{C}_c(X)$ topologisch.

3.2. Nun sei X ein kompakter Limesraum. Der Limesraum $I_c(X)$ ist ebenfalls kompakt und nach Satz 3 sogar topologisch. Daher ist die Limitierung auf $\mathcal{C}_c(I_c(X))$ identisch mit der üblichen *Supremumsnormtopologie*. Also ist $\mathcal{C}_c(I_c(X))$ eine Banachalgebra. Die Abbildung

$$i_X^*: \mathcal{C}_c(I_c(X)) \longrightarrow \mathcal{C}_c(X)$$

ist ein bistetiger Isomorphismus (s. 1.3). Daraus folgt:

SATZ 6. Für jeden kompakten Limesraum X ist $\mathcal{C}_c(X)$ eine Banachalgebra unter der üblichen Supremumsnorm.

4. $\mathcal{C}_c(X)$ als Banachalgebra

Der eben ausgesprochene Satz 6 führt uns nun zur Frage, für welche der c -einbettbaren Limesräume X die Limesalgebra $\mathcal{C}_c(X)$ eine Banachalgebra ist. Eine vollständige Antwort enthält Satz 9.

4.1. Sei X ein pseudokompakter Limesraum (d.h. alle stetigen Funktionen von X nach \mathfrak{R} sind beschränkt). $\mathcal{C}(X)$ versehen mit der üblichen Supremumsnormtopologie heiße $\mathcal{C}_n(X)$.

SATZ 7. Sei X ein Limesraum, für den $\mathcal{C}_c(X)$ eine Banachalgebra ist. Dann ist X pseudokompakt und

$$\text{id}: \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathcal{C}_n(X)$$

ist ein bistetiger Isomorphismus.

Wir weisen erst nach, dass jedes $f \in \mathcal{C}_c(X)$ beschränkt ist. Sei $V_0 = \{f \in \mathcal{C}_c(X) \mid \|f\| < 1\}$. Dabei bedeutet $f \rightarrow \|f\|$ die Norm in $\mathcal{C}_c(X)$. Es ist V_0 eine offene Nullumgebung. Alle Elemente in $e + V_0$ sind invertibel. Hierin bedeutet e das Einselement. Man wähle nun ein $\lambda \in \mathfrak{R}$ mit $|\lambda| \geq 1$. Dann gilt

$$e + \lambda^{-1} \cdot V_0 \subset e + V_0.$$

Also ist für jedes $f \in V_0$ die Funktion $e + \lambda^{-1} \cdot f$ invertibel, was $f(x) \neq -\lambda$ für jedes $x \in X$ bedeutet. Der Allgemeinheit von λ wegen folgt $|f(x)| < 1$ für alle $x \in X$. Also ist jede Funktion in V_0 beschränkt, was aber die Beschränktheit aller Funktionen in $\mathcal{C}_c(X)$ nach sich zieht. Daher ist X pseudokompakt. Wie man nun leicht verifiziert, ist id als Isomorphismus von der Banachalgebra $\mathcal{C}_c(X)$ auf die Banachalgebra $\mathcal{C}_n(X)$ stetig. Daher ist id sogar bistetig.

LEMMA 9. Für einen pseudokompakten, vollständig regulären topologischen Raum X ist $\mathcal{H}om_c \mathcal{C}_n(X)$ ein kompakter, topologischer Raum.

Es bezeichne $\beta(X)$ die Stone-Čech'sche Kompaktifizierung (s. [8]) von X und $i_\beta: X \longrightarrow \beta(X)$ die (stetige) natürliche Inklusionsabbildung. Es ist

$$i_\beta^*: \mathcal{C}_n(\beta(X)) \longrightarrow \mathcal{C}_n(X)$$

ein bistetiger Isomorphismus. Deshalb ist

$$i_\beta^{**}: \mathcal{H}om_c \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow \mathcal{H}om_c \mathcal{C}_n(\beta(X))$$

ein Homöomorphismus. Als kompakter, topologischer Raum ist $\beta(X)$ homöomorph zu $\mathcal{H}om_c \mathcal{C}_n(\beta(X))$. Mithin ist auch $\mathcal{H}om_c \mathcal{C}_n(X)$ kompakt und topologisch.

SATZ 8. Wenn für einen Limesraum X die Limesalgebra $\mathcal{C}_c(X)$ eine Banachalgebra ist, dann ist $I_c(X)$ ein kompakter, topologischer Raum.

Sei $\mathcal{C}_c(X)$ eine Banachalgebra. Einerseits wissen wir, dass

$$i_X^*: \mathcal{C}_c(I_c(X)) \longrightarrow \mathcal{C}_c(X)$$

ein bistetiger Isomorphismus ist. Wir folgern damit aus Satz 7: Es ist $I_c(X)$ pseudokompakt und $\mathcal{C}_c(I_c(X))$ und $\mathcal{C}_n(I_c(X))$ sind vermöge der Identität homöomorph. Andererseits sind $\mathcal{C}(I_c(X))$ und $\mathcal{C}(I_s(X))$ identisch. Also ist auch $I_s(X)$ pseudokompakt und

$$id: \mathcal{C}_c(I_c(X)) \longrightarrow \mathcal{C}_n(I_s(X))$$

ist bistetig. Jetzt folgern wir mit Hilfe von Lemma 9 die Kompaktheit von $\mathcal{H}om_c \mathcal{C}_c(I_c(X))$. Daraus schliessen wir, dass auch $\mathcal{H}om_c \mathcal{C}_c(X)$ kompakt ist. Aus Satz 3 lesen wir daher ab, dass $I_c(X)$ kompakt und topologisch ist.

Mit Hilfe der Sätze 4, 6 und 8 folgern wir abschliessend:

SATZ 9. Für einen c -einbettbaren Limesraum X sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- (i) X ist kompakt.
- (ii) X ist kompakt und topologisch.
- (iii) $\mathcal{C}_c(X)$ ist eine Banachalgebra.

University of Michigan, Ann Arbor, Mich.

LITERATUR

- [1] BINZ, E., und KELLER, H. H., *Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume*, Ann. Acad. Sci. Fenn. [A], I, 383 (1966).
- [2] BINZ, E., *Bemerkungen zu limitierten Funktionenalgebren*, Math. Ann. 175 (1968), 169–184.
- [3] BOURBAKI, N., *Topologie général*, Chap. II, 3^e ed., Act. Sci. Ind. 1142, Paris (1961).
- [4] BOURBAKI, N., *Topologie général*, Chap. X, 3^e ed., Act. Sci. Ind. 1084, Paris (1961).
- [5] COCHRAN, A. C., *On uniform convergence structures and convergence spaces*, Diss., University of Oklahoma (1966).
- [6] COOK, C. H., und FISCHER, H. R., *Equicontinuity and continuous convergence*, Math. Ann., 159 (1965), 94–104.
- [7] FISCHER, H. R., *Limesräume*, Math. Ann. 137 (1959), 269–303.
- [8] GILLMAN, L., und JERISON, M., *Rings of continuous functions* (Van Nostrand, Princeton 1960).

Eingegangen den 6. Juli 1967